



合肥工业大学
HEFEI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

复变函数与积分变换

张神星 (合肥工业大学)

翡翠科教楼 B1810 东

zhangshenxing@hfut.edu.cn

<https://faculty.hfut.edu.cn/zhangshenxing>

第一节 复习课

- 复数的运算
- 解析理论
- 积分理论
- 级数理论
- 积分变换
- 在积分和级数中的应用

- 复数的三角/指数形式主要是要求它的模和辐角.
- 复数的乘法, 除法, 乘幂的计算.
- 以下等式成立 (Arg 可以换成 Ln)

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2, \quad \operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2, \quad \operatorname{Arg} \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \operatorname{Arg} z.$$

- 以下等式未必成立

$$\text{Arg } z^n = n \text{ Arg } z.$$

上述等式中 $\text{Arg } z$ 换成 $\arg$ 或 $\ln$ 都不成立.

- $f(z) = u + iv$ 在 z_0 可导等价于 u, v 均可微且满足 C-R 方程:

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

- $f'(z) = u_x + \mathrm{i}v_x$.
- 会计算函数的可导点和解析区域.

练习. 求 $f(z) = 3x^2 - y^2 + 2xyi$ 的可导点和解析点.

- $f(z) = u + iv$ 在 z_0 可导等价于 u, v 均可微且满足 C-R 方程:

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

- $f'(z) = u_x + \mathrm{i}v_x$.
- 会计算函数的可导点和解析区域.

练习. 求 $f(z) = 3x^2 - y^2 + 2xyi$ 的可导点和解析点.

答案. 可导点为 $\operatorname{Re} z = 0$, 没有解析点.

- 若 $f(z)$ 有原函数 (解析, 简单非闭路),

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) \, dz = F(z_2) - F(z_1), \quad F(z) = \int f(z) \, dz.$$

- 若 $f(z)$ 有原函数 (解析, 简单非闭路),

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) \, dz = F(z_2) - F(z_1), \quad F(z) = \int f(z) \, dz.$$

- 会求原函数: 分部积分, 凑微分等.

复变函数积分的计算

- 若 $f(z)$ 有原函数 (解析, 简单非闭路),

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) \, dz = F(z_2) - F(z_1), \quad F(z) = \int f(z) \, dz.$$

- 会求原函数: 分部积分, 凑微分等.

- 若 $f(z)$ 在闭路 C 内只有奇点 $z_1, \dots, z_n$, 则

$$\oint_C f(z) \, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[f(z), z_k].$$

若 C 是圆周, $f(z)$ 中的 $z, |z|$ 可以换成 z 的形式用此法计算.

- 若 $f(z)$ 有原函数 (解析, 简单非闭路),

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) \, dz = F(z_2) - F(z_1), \quad F(z) = \int f(z) \, dz.$$

- 会求原函数: 分部积分, 凑微分等.

- 若 $f(z)$ 在闭路 C 内只有奇点 $z_1, \dots, z_n$, 则

$$\oint_C f(z) \, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[f(z), z_k].$$

若 C 是圆周, $f(z)$ 中的 $z, |z|$ 可以换成 z 的形式用此法计算.

- 一般情形: 曲线 $C: z = z(t), a \leq t \leq b$, 则

$$\int_C f(z) \, dz = \int_a^b f[z(t)] z'(t) \, dt.$$

复变函数积分的计算

- 若 $f(z)$ 有原函数 (解析, 简单非闭路),

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) \, dz = F(z_2) - F(z_1), \quad F(z) = \int f(z) \, dz.$$

- 会求原函数: 分部积分, 凑微分等.

- 若 $f(z)$ 在闭路 C 内只有奇点 $z_1, \dots, z_n$, 则

$$\oint_C f(z) \, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[f(z), z_k].$$

若 C 是圆周, $f(z)$ 中的 $z, |z|$ 可以换成 z 的形式用此法计算.

- 一般情形: 曲线 $C: z = z(t), a \leq t \leq b$, 则

$$\int_C f(z) \, dz = \int_a^b f[z(t)] z'(t) \, dt.$$

练习. 三类积分题, 自己多翻书.

- 柯西古萨定理: 若 $f(z)$ 在闭路 C 及其内部解析, 则 $\oint_C f(z) dz = 0$.
- 复合闭路定理: 若 $f(z)$ 在复合闭路 $C = C_0 + C_1^- + \cdots + C_n^-$ 及其围成的多连通区域内解析, 则 $\oint_C f(z) dz = 0$, 即

$$\oint_C f(z) \, dz = \oint_{C_1} f(z) \, dz + \cdots + \oint_{C_n} f(z) \, dz.$$

- 柯西古萨定理: 若 $f(z)$ 在闭路 C 及其内部解析, 则 $\oint_C f(z) dz = 0$.
- 复合闭路定理: 若 $f(z)$ 在复合闭路 $C = C_0 + C_1^- + \cdots + C_n^-$ 及其围成的多连通区域内解析, 则 $\oint_C f(z) dz = 0$, 即

$$\oint_C f(z) \, dz = \oint_{C_1} f(z) \, dz + \cdots + \oint_{C_n} f(z) \, dz.$$

- 柯西积分公式: 若 $f(z)$ 在闭路 C 及其内部解析, $z_0 \in D$, 则

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz,$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

从 z_0 是 (至多) $n+1$ 阶极点看出.

- 9 / 21

- 9 / 21

- 可去奇点处留数为 0, 本性奇点留数按照定义计算: c_{-1} .

- 可去奇点处留数为 0, 本性奇点留数按照定义计算: c_{-1} .
- (至多) n 阶极点

$$\text{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)^n f(z)]^{(n-1)},$$

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z), \quad \text{若 } n = 1.$$

- 设 z_0 是 P 的解析点, 是 Q 的一阶零点, 则

$$\operatorname{Res}\left[\frac{P}{Q}, z_0\right] = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

常用于 $\frac{1}{z^n + 1}$, $\tan z$, $\operatorname{th} z$ 等情形.

- 定义: 二阶连续可导, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$.
- 解析函数的实部和虚部都是调和函数, 解析函数任意阶可导, 调和函数任意阶可微可导.
- 单连通区域内调和函数是解析函数的实部或虚部.
- 求共轭调和函数:
 - (1) 偏积分法: 通过 $v_y = u_x$ 解得 $v = \varphi(x, y) + \psi(x)$, 其中 $\psi(x)$ 待定. 再代入 $u_y = -v_x$ 中解出 $\psi(x)$.
 - (2) 不定积分法: 对 $f'(z) = u_x - iu_y = v_y + iv_x$ 求不定积分得到 $f(z)$.

- 定义: 二阶连续可导, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$.
- 解析函数的实部和虚部都是调和函数, 解析函数任意阶可导, 调和函数任意阶可微可导.
- 单连通区域内调和函数是解析函数的实部或虚部.
- 求共轭调和函数:
 - (1) 偏积分法: 通过 $v_y = u_x$ 解得 $v = \varphi(x, y) + \psi(x)$, 其中 $\psi(x)$ 待定. 再代入 $u_y = -v_x$ 中解出 $\psi(x)$.
 - (2) 不定积分法: 对 $f'(z) = u_x - iu_y = v_y + iv_x$ 求不定积分得到 $f(z)$.

练习. 证明 $u(x, y) = x^3 - 6x^2y - 3xy^2 + 2y^3$ 是调和函数并求它的共轭调和函数.

- 定义: 二阶连续可导, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$.
- 解析函数的实部和虚部都是调和函数, 解析函数任意阶可导, 调和函数任意阶可微可导.
- 单连通区域内调和函数是解析函数的实部或虚部.
- 求共轭调和函数:
 - (1) 偏积分法: 通过 $v_y = u_x$ 解得 $v = \varphi(x, y) + \psi(x)$, 其中 $\psi(x)$ 待定. 再代入 $u_y = -v_x$ 中解出 $\psi(x)$.
 - (2) 不定积分法: 对 $f'(z) = u_x - iu_y = v_y + iv_x$ 求不定积分得到 $f(z)$.

练习. 证明 $u(x, y) = x^3 - 6x^2y - 3xy^2 + 2y^3$ 是调和函数并求它的共轭调和函数.

答案. $v(x, y) = 2x^3 + 3x^2y - 6xy^2 - y^3 + C.$

- 级数收敛 $\iff$ 实部和虚部级数都收敛.
- 级数绝对收敛 $\iff$ 实部和虚部级数都绝对收敛.
- 幂级数的收敛区域是一个圆域, 半径 $R = \frac{1}{r}$, 其中

(1) 比值法: $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$;

(2) 根式法: $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$.

- 级数收敛 $\iff$ 实部和虚部级数都收敛.
- 级数绝对收敛 $\iff$ 实部和虚部级数都绝对收敛.
- 幂级数的收敛区域是一个圆域, 半径 $R = \frac{1}{r}$, 其中

(1) 比值法: $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$;

(2) 根式法: $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$.

- 在收敛圆周上可能收敛可能发散.

- 级数收敛 $\iff$ 实部和虚部级数都收敛.
- 级数绝对收敛 $\iff$ 实部和虚部级数都绝对收敛.
- 幂级数的收敛区域是一个圆域, 半径 $R = \frac{1}{r}$, 其中

(1) 比值法: $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$;

(2) 根式法: $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$.

- 在收敛圆周上可能收敛可能发散.
- 幂级数有理运算, 逐项求导, 逐项积分性质; 等比级数的展开.

- 级数收敛 $\iff$ 实部和虚部级数都收敛.
- 级数绝对收敛 $\iff$ 实部和虚部级数都绝对收敛.
- 幂级数的收敛区域是一个圆域, 半径 $R = \frac{1}{r}$, 其中

(1) 比值法: $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$;

(2) 根式法: $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$.

- 在收敛圆周上可能收敛可能发散.
- 幂级数有理运算, 逐项求导, 逐项积分性质; 等比级数的展开.
- 上述技巧在函数的幂级数/洛朗级数展开中的运用.

- 级数收敛 $\iff$ 实部和虚部级数都收敛.
- 级数绝对收敛 $\iff$ 实部和虚部级数都绝对收敛.
- 幂级数的收敛区域是一个圆域, 半径 $R = \frac{1}{r}$, 其中

(1) 比值法: $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$;

(2) 根式法: $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$.

- 在收敛圆周上可能收敛可能发散.
- 幂级数有理运算, 逐项求导, 逐项积分性质; 等比级数的展开.
- 上述技巧在函数的幂级数/洛朗级数展开中的运用.
- 幂级数的收敛域是圆域, 双边幂级数的收敛域是圆环域.

- 级数收敛 $\iff$ 实部和虚部级数都收敛.
- 级数绝对收敛 $\iff$ 实部和虚部级数都绝对收敛.
- 幂级数的收敛区域是一个圆域, 半径 $R = \frac{1}{r}$, 其中

(1) 比值法: $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$;

(2) 根式法: $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$.

- 在收敛圆周上可能收敛可能发散.
- 幂级数有理运算, 逐项求导, 逐项积分性质; 等比级数的展开.
- 上述技巧在函数的幂级数/洛朗级数展开中的运用.
- 幂级数的收敛域是圆域, 双边幂级数的收敛域是圆环域.
- 泰勒展开与洛朗展开的成立范围的判定: 看奇点位置.

- 傅里叶变换:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

- 傅里叶变换的性质: 重点是位移性质和微分性质

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)] = e^{-i\omega t_0} F(\omega), \quad \mathcal{F}^{-1}[F(\omega - \omega_0)] = e^{i\omega_0 t} f(t),$$

$$\mathcal{F}[f'(t)] = i\omega F(\omega), \quad \mathcal{F}^{-1}[F'(\omega)] = -itf(t).$$

- $\mathcal{F}[\delta(t)] = 1, \mathcal{F}[\delta(t - t_0)] = e^{-i\omega t_0},$

- $\mathcal{F}[\delta(t)] = 1, \mathcal{F}[\delta(t - t_0)] = e^{-i\omega t_0},$
- $\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta(\omega), \mathcal{F}[e^{i\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega - \omega_0).$

- $\mathcal{F}[\delta(t)] = 1, \mathcal{F}[\delta(t - t_0)] = e^{-i\omega t_0},$
- $\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta(\omega), \mathcal{F}[e^{i\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega - \omega_0).$
- $\mathcal{F}[\sin \omega_0 t] = i\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)],$

- # 傅里叶变换
- $\mathcal{F}[\delta(t)] = 1, \mathcal{F}[\delta(t - t_0)] = e^{-i\omega t_0},$
 - $\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta(\omega), \mathcal{F}[e^{i\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega - \omega_0).$
 - $\mathcal{F}[\sin \omega_0 t] = i\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)],$
 - $\mathcal{F}[\cos \omega_0 t] = \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)].$

- $\mathcal{F}[\delta(t)] = 1, \mathcal{F}[\delta(t - t_0)] = e^{-i\omega t_0},$
- $\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta(\omega), \mathcal{F}[e^{i\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
- $\mathcal{F}[\sin \omega_0 t] = i\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)],$
- $\mathcal{F}[\cos \omega_0 t] = \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)].$
- $\mathcal{F}[u(t)] = \frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega),$
- $\mathcal{F}[u(t)e^{-\beta t}] = \frac{1}{\beta + i\omega},$
- $\mathcal{F}[e^{-\beta t^2}] = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}e^{-\omega^2/(4\beta)}$

- 拉普拉斯变换:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt.$$

- 拉普拉斯变换的性质: 重点是位移性质和微分性质

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s - a),$$

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0),$$

$$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0),$$

其它性质可由此类推.

- 拉普拉斯变换:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt.$$

- 拉普拉斯变换的性质: 重点是位移性质和微分性质

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s - a),$$

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0),$$

$$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0),$$

其它性质可由此类推.

- $\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}, \mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}, \mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}.$

- 拉普拉斯变换:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt.$$

- 拉普拉斯变换的性质: 重点是位移性质和微分性质

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s - a),$$

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0),$$

$$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0),$$

其它性质可由此类推.

- $\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}, \mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}, \mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}.$

- $\mathcal{L}[\sin kt] = \frac{k}{s^2 + k^2}, \mathcal{L}[\cos kt] = \frac{s}{s^2 + k^2}.$

解微分方程: 两边同时做 $\mathcal{L}$, 利用微分性质求得 $X = \mathcal{L}[x]$, 然后利用常见函数的拉普拉斯变换反解得到 $x(t)$.

练习. 解方程 $\begin{cases} x''(t) + 4x(t) = 3 \cos t, \\ x(0) = x'(0) = 0. \end{cases}$

这些公式均不要求背诵.

三角函数的有理函数在 0 到 2π 的积分: 若 R 是有理函数, 则由 $z = e^{i\theta}$ 可得:

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) \, d\theta = \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right) \frac{1}{iz} \, dz.$$

这些公式均不要求背诵.

三角函数的有理函数在 0 到 2π 的积分: 若 R 是有理函数, 则由 $z = e^{i\theta}$ 可得:

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right) \frac{1}{iz} dz.$$

有理函数及带三角函数的广义积分: 若 $f(x)$ 是有理函数, 分母比分子至少高 2 次, 且分母没有实根, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a > 0} \operatorname{Res}[R(z), a],$$

这些公式均不要求背诵.

三角函数的有理函数在 0 到 2π 的积分: 若 R 是有理函数, 则由 $z = e^{i\theta}$ 可得:

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) \, d\theta = \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right) \frac{1}{iz} \, dz.$$

有理函数及带三角函数的广义积分: 若 $f(x)$ 是有理函数, 分母比分子至少高 2 次, 且分母没有实根, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } a > 0} \text{Res}[R(z), a],$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\lambda x} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } a > 0} \text{Res}[f(z)e^{i\lambda z}, a],$$

实部和虚部分别是 $f(x) \cos \lambda x$ 和 $f(x) \sin \lambda x$ 的积分.

含幂函数的积分: 设实数 p 不是整数, $f(x)$ 是一个有理函数, 分母没有正实根, 且满足

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{p+1} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^{p+1} f(x) = 0,$$

则

$$\int_0^{+\infty} f(x)x^p \, dx = -\frac{\pi}{\sin p\pi} \sum_a \operatorname{Res}[e^{p \ln(-z)} f(z), a],$$

其中 a 取遍 $f(z)$ 的非零奇点.

含幂函数的积分: 设实数 p 不是整数, $f(x)$ 是一个有理函数, 分母没有正实根, 且满足

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{p+1} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^{p+1} f(x) = 0,$$

则

$$\int_0^{+\infty} f(x)x^p \, dx = -\frac{\pi}{\sin p\pi} \sum_a \operatorname{Res}[e^{p \ln(-z)} f(z), a],$$

其中 a 取遍 $f(z)$ 的非零奇点.

含对数函数的积分: 设 $f(x)$ 是一个有理函数, 分母没有正实根, 且分母至少比分子高 2 次, 则

$$\int_0^{+\infty} f(x) \ln x \, dx = -\frac{1}{2} \sum_a \operatorname{Res}[\ln^2(-z) f(z), a],$$

其中 a 取遍 $f(z)$ 的奇点.

若 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$, $\mathcal{F}[g(t)] = G(\omega)$, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{g(t)} \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \overline{G(\omega)} \, d\omega.$$

特别地,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega.$$

定义

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) \, d\tau.$$

定义

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) \, \mathrm{d}\tau.$$

卷积定理:

$$\mathcal{F}[f_1 * f_2] = F_1 \cdot F_2, \quad \mathcal{F}^{-1}[F_1 * F_2] = \frac{1}{2\pi} f_1 \cdot f_2.$$

定义

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) \, \mathrm{d}\tau.$$

卷积定理:

$$\mathcal{F}[f_1 * f_2] = F_1 \cdot F_2, \quad \mathcal{F}^{-1}[F_1 * F_2] = \frac{1}{2\pi} f_1 \cdot f_2.$$

可用于计算积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)G(\omega) \, \mathrm{d}\omega = 2\pi(f * g)(0).$$

帕赛瓦尔等式: 若 $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\omega_n t}$, 则 $\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$.

计算级数和的方法

帕赛瓦尔等式: 若 $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\omega_n t}$, 则 $\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$.

泊松求和公式: 若 $\mathcal{F}[f] = F$, 则 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(2\pi n)$, 间断点处需修改为左右极限平均值.

帕赛瓦尔等式: 若 $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\omega_n t}$, 则 $\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$.

泊松求和公式: 若 $\mathcal{F}[f] = F$, 则 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(2\pi n)$, 间断点处需修改为左右极限平均值.

柯西公式:

帕赛瓦尔等式: 若 $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\omega n t}$, 则 $\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$.

泊松求和公式: 若 $\mathcal{F}[f] = F$, 则 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(2\pi n)$, 间断点处需修改为左右极限平均值.

柯西公式: 设函数 $f(z)$ 只有有限多个奇点, 其中不是整数的奇点为 $a_1, \dots, a_k$, 且满足 $\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0$, 则

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \operatorname{Res}[f(z) \cot(\pi z), n] = - \sum_{j=1}^k \operatorname{Res}[f(z) \cot(\pi z), a_j].$$

计算级数和的方法

帕赛瓦尔等式: 若 $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\omega_n t}$, 则 $\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$.

泊松求和公式: 若 $\mathcal{F}[f] = F$, 则 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(2\pi n)$, 间断点处需修改为左右极限平均值.

柯西公式: 设函数 $f(z)$ 只有有限多个奇点, 其中不是整数的奇点为 $a_1, \cdots, a_k$, 且满足 $\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0$, 则

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{Res}[f(z) \cot(\pi z), n] = - \sum_{j=1}^k \text{Res}[f(z) \cot(\pi z), a_j].$$

可用于计算 $\frac{1}{n^2 + a^2}$ 等有理函数级数.