

合肥工業大學
HEFEI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

复变函数与积分变换

张神星 (合肥工业大学)
翡翠科教楼 *B1810* 东
zhangshenxing@hfut.edu.cn
https://faculty.hfut.edu.cn/zhangshenxing

002 班 (机器人、自动化) 课程信息

- 课时: 共 10 周 40 课时, 从 2026-09-09 到 2026-11-13
- 期末考试在课程结束后两周左右

复变函数 002 班 (机器人、自动化)
群号: 1036723606
入群答案 1400261B



教材: 《复变函数与积分变换》
机械工业出版社

004 班 (电气) 课程信息

- 课时: 共 10 周 40 课时, 从 2026-09-09 到 2026-11-13
- 期末考试在课程结束后两周左右

复变函数 004 班 (电气)
群号: 1036737671
入群答案 1400261B



教材: 《复变函数与积分变换》
机械工业出版社

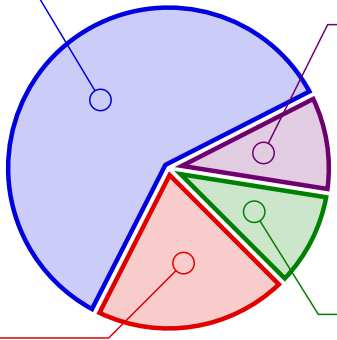
成绩构成

期末考试 60 分

期末卷面需要达到 50 分才计算总评分数, 50 分以下直接不及格. 电子匿名阅卷, 请务必重视!

课堂测试 20 分

课堂测试共两次取平均, 测试时间会提前通知. 测试时在教室内作答, 否则按未考处理.



课后作业 10 分

作业通过超星发布, 扫描后在线提交. 作业必须按时提交, 不允许补交.

智慧课程 10 分

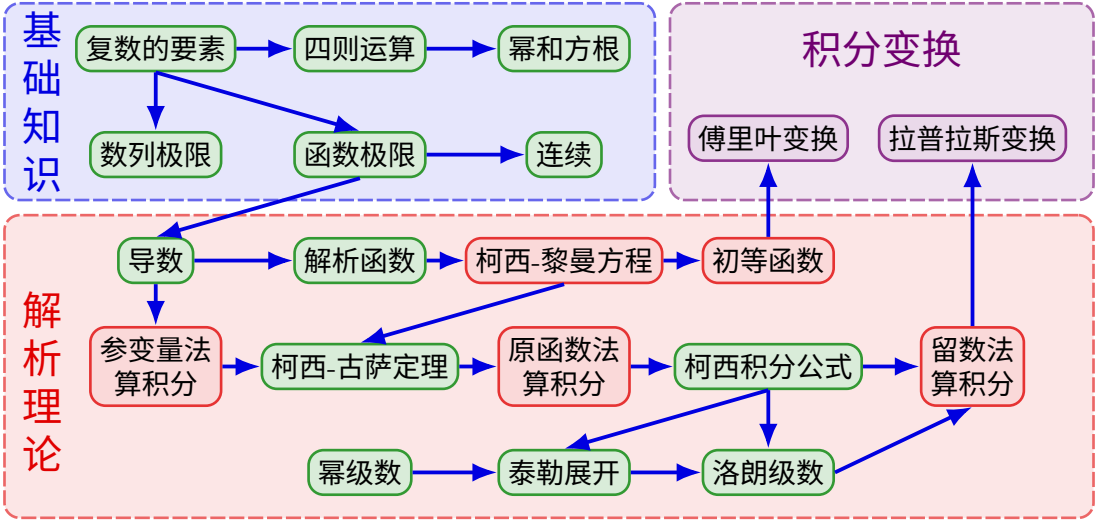
在学习通内完成.
章节 $\rightarrow$ 章节测试 (提交后无法修改或打回, 5 分);
讨论 (回答讨论题, 5 分).

复变函数的应用

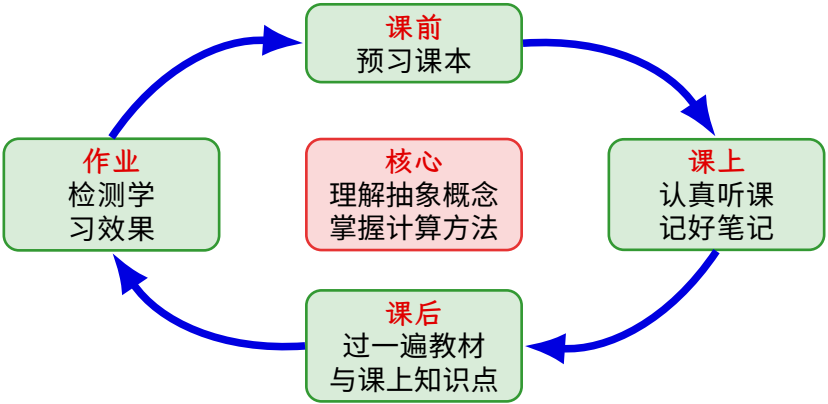
复变函数的应用非常广泛, 它包括:

- 数学中的代数、数论、几何、分析、动力系统……
- 物理学中流体力学、材料力学、电磁学、光学、量子力学……
- 信息学、电子学、电气工程……

可以说复变函数应用之广, 在大学数学课程中仅次于高等数学和线性代数.


基础知识
复数的要素
四则运算
幂和方根
数列极限
函数极限
连续
积分变换
傅里叶变换
拉普拉斯变换
解析理论
导数
解析函数
柯西-黎曼方程
初等函数
参变量法算积分
柯西-古萨定理
原函数法算积分
柯西积分公式
留数法算积分
幂级数
泰勒展开
洛朗级数

课程学习方法


课前
预习课本
课上
认真听课
记好笔记
课后
过一遍教材
与课上知识点
作业
检测学
习效果
核心
理解抽象概念
掌握计算方法

第一章　复数与复变函数

1. 复数及其代数运算
2. 复数的三角形式与指数形式
3. 三角和指数形式在计算中的运用
4. 曲线和区域
5. 复变函数
6. 极限和连续性

第一节　复数及其代数运算

- 复数的产生
- 复数的概念
- 复数的代数运算
- 共轭复数

复数起源于多项式的求根问题. 考虑一元二次方程 $x^2+bx+c=0$. 配方可得

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2-4c}{4}.$$

于是得到求根公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2}$, 其中 $\Delta=b^2-4c$.

(1) 当 $\Delta>0$ 时, 有两个不同的实根;
(2) 当 $\Delta=0$ 时, 有一个二重的实根;
(3) 当 $\Delta<0$ 时, 无实根.

可以看出, 在一元二次方程中, 我们可以舍去包含负数开方的解. 然而在一元三次方程中, 即便只考虑实数根也会不可避免地引入负数开方.

例题: 三次方程求解 (一个实根)

例. 解方程 $x^3 + 6x - 20 = 0$.

解. 设 $x = u + v$, 那么

$$u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + 6(u + v) - 20 = 0.$$

我们希望

$$u^3 + v^3 = 20, \qquad uv = -2.$$

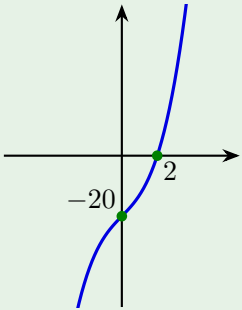
那么 u^3, v^3 满足一元二次方程

$$X^2 - 20X - 8 = 0.$$

解得

$$u^3 = 10 \pm \sqrt{108} = (1 \pm \sqrt{3})^3.$$

所以 $u = 1 \pm \sqrt{3}$, $v = 1 \mp \sqrt{3}$. $x = u + v = 2$.



例题: 三次方程求解 (三个实根)

例. 解方程 $x^3 - 7x + 6 = 0$.

解. 类似地 $x = u + v$, 其中 $u^3 + v^3 = -6$, $uv = \dfrac{7}{3}$. 于是 u^3, v^3 满足一元二次方程

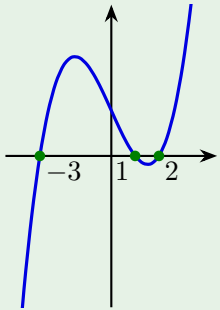
$$X^2 + 6X + \frac{343}{27} = 0.$$

该方程无实数解, 我们可以强行解得 $u^3 = -3 + \dfrac{10}{9}\sqrt{-3}$. 于是

$$u = \frac{3 + 2\sqrt{-3}}{3}, \frac{-9 + \sqrt{-3}}{6}, \frac{3 - 5\sqrt{-3}}{6},$$

$$v = \frac{3 - 2\sqrt{-3}}{3}, \frac{-9 - \sqrt{-3}}{6}, \frac{3 + 5\sqrt{-3}}{6},$$

$$x = u + v = 2, -3, 1.$$

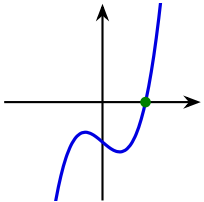


一般情形三次方程的根

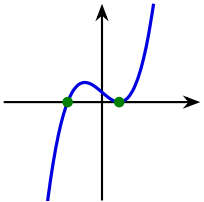
一般地, 方程 $x^3+px+q=0$ 的解为 ($p=0$ 情形较简单, 这里不考虑)

$$x=u-\frac{p}{3u},\quad u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta},\quad \Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}.$$

通过分析函数图像的极值点可以知道:

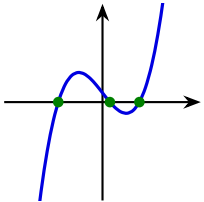


$\Delta>0$, 有 1 个根



$\Delta=0$, 有 2 个根

$x=-\sqrt[3]{4q}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{4q}$ (2 重).



$\Delta<0$, 有 3 个根

由此可见, 若想使用求根公式, 就必须接受负数开方. 那么为什么当 $\Delta < 0$ 时, 从求根公式一定能得到 3 个实根呢? 这个问题在我们学习了第一章的内容之后可以得到回答.

尽管在十六世纪, 人们已经得到了三次方程的求根公式, 然而对其中出现的虚数, 却是难以接受. 莱布尼兹曾说: 圣灵在分析的奇观中找到了超凡的显示, 这就是那个理想世界的端兆, 那个介于存在与不存在之间的两栖物, 那个我们称之为虚的 -1 的平方根。 不过, 现在我们可以用更为现代和严格的语言来引入复数.

复数的定义

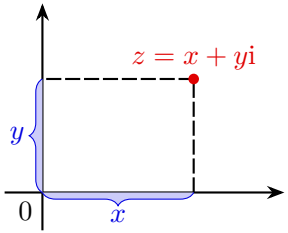
现在我们来正式介绍复数的概念. 为了避免记号 $\sqrt{-1}$ 带来的歧义, 我们先引入抽象符号 i, 再通过定义它的运算来构造复数.

定义. 固定一个记号 i, **复数**就是形如 $z = x + y\mathrm{i}$ 的元素, 其中 x, y 均是实数, 且不同的 (x, y) 对应不同的复数.

回忆全体实数、有理数、整数、自然数构成的集合分别记作 $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$. 将**全体复数记作** $\mathbb{C}$.

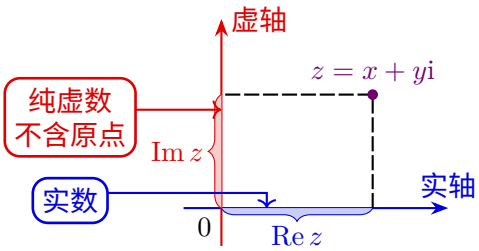
实数 x 可以自然地看成复数 $x + 0\mathrm{i}$. 于是我们有 $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

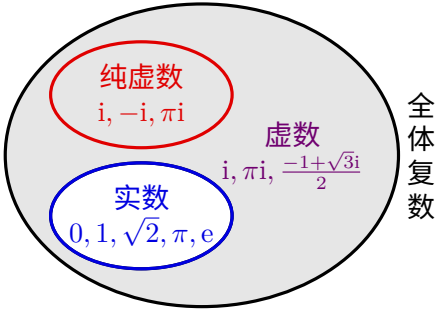
根据复数的定义可知, 全体复数和平面上的点可以建立一一对应. 将建立起这种对应的平面称为**复平面**.



实部和虚部，虚数和纯虚数

- x, y 轴分别对应复平面的**实轴**和**虚轴**.
- 称 $z = x + y\mathrm{i}$ 中 $x = \operatorname{Re} z$ 为 z 的**实部**; $y = \operatorname{Im} z$ 为 z 的**虚部**.
- 当虚部 $\operatorname{Im} z = 0$ 时, z 为实数, 它落在实轴上.
  - 不是实数的复数是**虚数**.
- 当实部 $\operatorname{Re} z = 0$ 且 $z \neq 0$ 时, z 为**纯虚数**, 它落在虚轴上.





例题：判断实数和纯虚数

例. 实数 x 取何值时, $z=(x^2+3x-4)+(x^2+5x-6)\mathrm{i}$ 是:
(1) 实数; (2) 纯虚数.

解.
(1) $\operatorname{Im} z=x^2+5x-6=0$, 即 $x=1$ 或 -6.
(2) $\operatorname{Re} z=x^2+3x-4=0$, 即 $x=1$ 或 -4. 但同时要求 $\operatorname{Im} z=x^2+5x-6\neq 0$, 因此 $x\neq 1$.故 $x=-4$.

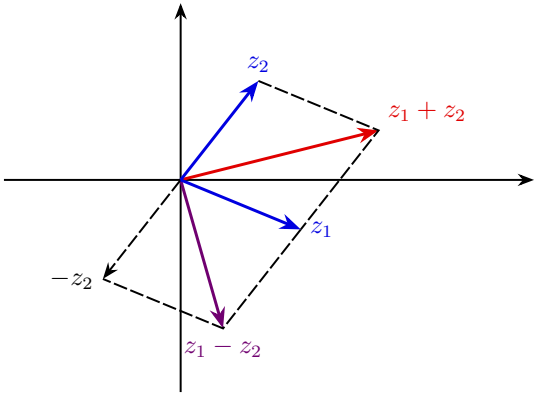
练习. 若 $(x^2-5x+4)+(x^2-4x+3)\mathrm{i}$ 是纯虚数, 则实数 $x=$ 4 .

复数的加法与减法

设 $z_1 = x_1 + y_1\mathrm{i}, z_2 = x_2 + y_2\mathrm{i}$. 定义复数的**加法**和**减法**:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\mathrm{i}, \quad z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)\mathrm{i}.$$

复数的加减法与其对应的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的加减法是一致的.



复数的乘法、除法和乘幂

规定 $\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}=-1$. 定义复数的**乘法**:

$$\begin{aligned} z_1\cdot z_2 &= (x_1+y_1\mathrm{i})(x_2+y_2\mathrm{i}) = x_1\cdot x_2 + x_1\cdot y_2\mathrm{i} + y_1\mathrm{i}\cdot x_2 + y_1\mathrm{i}\cdot y_2\mathrm{i} \\ &= (x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)\mathrm{i}. \end{aligned}$$

此时加法/乘法交换律, 结合律以及乘法分配律均成立.

待定系数可得复数的**除法**:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1+y_1\mathrm{i})(x_2-y_2\mathrm{i})}{x_2^2+y_2^2} = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + \frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\mathrm{i}.$$

对于正整数 n, 定义 z 的 n **次幂**为 n 个 z 相乘. 当 $z\neq 0$ 时, 还可以定义 $z^0=1, z^{-n}=\dfrac{1}{z^n}$.

例题: 复数的乘幂

例.

(1) $\mathrm{i}^2=-1,\mathrm{i}^3=-\mathrm{i},\mathrm{i}^4=1$. 一般地, 对于整数 n,

$$\mathrm{i}^{4n}=1,\quad \mathrm{i}^{4n+1}=\mathrm{i},\quad \mathrm{i}^{4n+2}=-1,\quad \mathrm{i}^{4n+3}=-\mathrm{i}.$$

(2) 令 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$, 则 $\omega^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2},\omega^3=1$.

(3) 令 $z=1+\mathrm{i}$, 则

$$z^2=2\mathrm{i},\quad z^3=-2+2\mathrm{i},\quad z^4=-4,\quad z^8=16=2^4.$$

将满足 $z^n=1$ 的复数 z 称为 n 次单位根. 那么 $1,\mathrm{i},-1,-\mathrm{i}$ 是 4 次单位根, $1,\omega,\omega^2$ 是 3 次单位根, $-\omega$ 是 6 次单位根.

例题: 复数代数式的计算

实数情形的等差数列求和公式、等比数列求和公式、二项式展开、平方差公式等代数恒等式在复数情形也成立.

例. 化简 $1+\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\cdots+\mathrm{i}^{1000}$.

解. 根据等比数列求和公式,

$$1+\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\cdots+\mathrm{i}^{1000}=\frac{\mathrm{i}^{1001}-1}{\mathrm{i}-1}=\frac{\mathrm{i}-1}{\mathrm{i}-1}=1.$$

练习. 化简 $\left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^{2026}=$ $\underline{\quad -1 \quad}$.

共轭复数的定义和性质

定义. 称 z 在复平面关于实轴的对称点为它的共轭复数 $\overline{z}$. 换言之, $\overline{x+y\mathrm{i}}=x-y\mathrm{i}$.

从定义出发, 不难验证共轭复数满足如下性质:

(1) z 是 $\overline{z}$ 的共轭复数.

(2) $\overline{z_1 \pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$, $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

(3) $z\overline{z}=(\operatorname{Re} z)^2+(\operatorname{Im} z)^2$.

(4) $z+\overline{z}=2\operatorname{Re} z$, $z-\overline{z}=2\mathrm{i}\operatorname{Im} z$.

(5) $z=\overline{z} \iff z$ 是实数;
$z=-\overline{z} \iff z$ 是纯虚数或 $z=0$.

共轭是一种对合和四则运算交换

x,y 和 $z,\overline{z}$ 可相互表示

判断实数和纯虚数

用共轭复数进行计算和证明，往往比直接使用 x,y 的形式更简单.

练习. z 关于虚轴的对称点是 $____-\overline{z}____$.

例题：共轭复数证明等式

例. 证明 $z_1 \cdot \overline{z_2} - \overline{z_1} \cdot z_2 = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z_1 \cdot \overline{z_2})$.

我们可以设 $z_1 = x_1 + y_1\mathrm{i}, z_2 = x_2 + y_2\mathrm{i}$, 然后代入等式两边化简并比较实部和虚部得到. 但我们利用共轭复数可以更简单地证明它.

证明. 由于 $\overline{z_1 \cdot \overline{z_2}} = \overline{z_1} \cdot \overline{\overline{z_2}} = \overline{z_1} \cdot z_2$, 因此

$$z_1 \cdot \overline{z_2} - \overline{z_1} \cdot z_2 = z_1 \cdot \overline{z_2} - \overline{z_1 \cdot \overline{z_2}} = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z_1 \cdot \overline{z_2}).$$

□

例题：共轭复数判断实数

例. 设 $z = x + y\mathrm{i}$ 是虚数. 证明: $x^2 + y^2 = 1$ 当且仅当 $z + \dfrac{1}{z}$ 是实数.

证明. $z + \dfrac{1}{z}$ 是实数等价于

$$z + \frac{1}{z} = \overline{\left(z + \frac{1}{z}\right)} = \overline{z} + \frac{1}{\overline{z}},$$

等价于

$$z - \overline{z} = \frac{1}{\overline{z}} - \frac{1}{z} = \frac{z - \overline{z}}{z\overline{z}}, \qquad (z - \overline{z})(z\overline{z} - 1) = 0.$$

由 z 是虚数可知 $z \neq \overline{z}$. 故上述等式等价于 $z\overline{z} = 1$, 即 $x^2 + y^2 = 1$. □

例题: 复数的代数计算

由于 $z\overline{z}$ 是一个实数, 因此在做复数的除法运算时, 可以利用下式将其转化为乘法:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{z_1\overline{z_2}}{x_2^2 + y_2^2}.$$

例. $z = -\dfrac{1}{\mathrm{i}} - \dfrac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$, 求 $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$ 以及 $z\overline{z}$.

解.

$$z = -\frac{1}{\mathrm{i}} - \frac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \mathrm{i} - \frac{3\mathrm{i}-3}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i},$$

$$\operatorname{Re} z = \frac{3}{2}, \quad \operatorname{Im} z = -\frac{1}{2}, \quad z\overline{z} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}.$$

例题：复数的代数计算

例. 设 $z_1 = 5 - 5\mathrm{i}, z_2 = -3 + 4\mathrm{i}$, 求 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$.

解.

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{5-5\mathrm{i}}{-3+4\mathrm{i}} = \frac{(5-5\mathrm{i})(-3-4\mathrm{i})}{(-3)^2+4^2} \\ &= \frac{(-15-20)+(-20+15)\mathrm{i}}{25} = -\frac{7}{5} - \frac{1}{5}\mathrm{i},\end{aligned}$$

因此 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = -\dfrac{7}{5} + \dfrac{1}{5}\mathrm{i}$.

第二节　复数的三角形式与指数形式

- 复数的模和辐角
- 复数的三角和指数形式

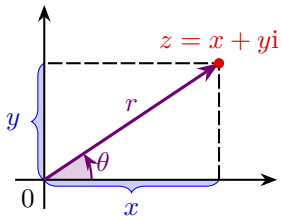
复数的极坐标形式

由平面的极坐标表示, 我们可以得到复数的另一种表示方式. 以 0 为极点, 正实轴为极轴, 逆时针为极角方向可以定义出复平面上的极坐标系.

定义.

(1) 称 r 为 z 的**模**, 记为 $|z| = r$.

(2) 称 θ 为 z 的**辐角**, 记为 $\operatorname{Arg} z = \theta$. 约定 0 的辐角没有定义.



$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

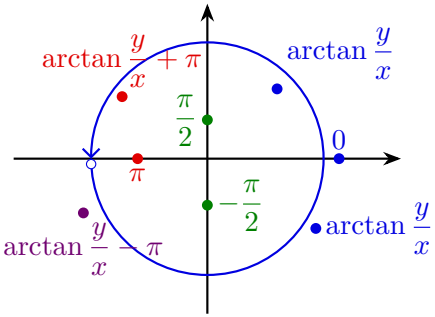
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

辐角主值

任意非零复数 z 都有无穷多个辐角. 称其中位于 $(-\pi, \pi]$ 的那个辐角为**辐角主值**或**主辐角**, 记作 $\arg z$. 那么

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x}, & x > 0; \\ \arctan \dfrac{y}{x} + \pi, & x < 0, y \geqslant 0; \\ \arctan \dfrac{y}{x} - \pi, & x < 0, y < 0; \\ \dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0; \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0. \end{cases}$$



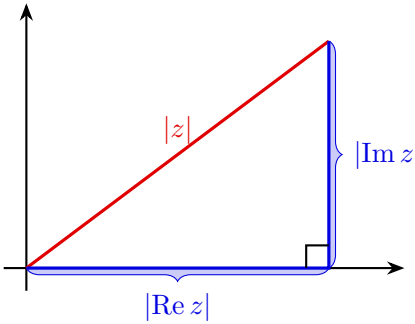
复数模的性质

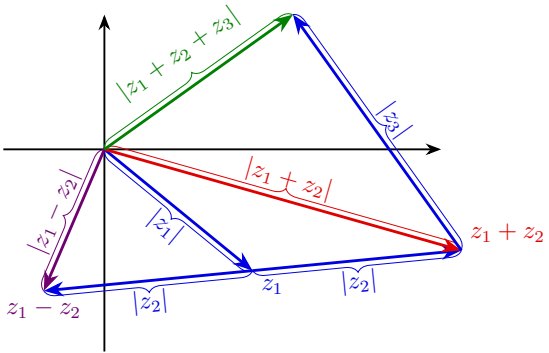
复数的模满足如下性质

(1) $z\overline{z} = |z|^2 = |\overline{z}|^2$;

(2) $|\mathrm{Re}\, z|, |\mathrm{Im}\, z| \leqslant |z| \leqslant |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z|$;

(3) $\big||z_1| - |z_2|\big| \leqslant |z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$; **一般地,** $|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$.





例题：共轭复数解决模的等式

例. 证明

(1) $|z_1 z_2| = |z_1\overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|$;

(2) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$.

证明.

(1) 因为

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \cdot \overline{z_1 z_2} = z_1\overline{z_1} \cdot z_2\overline{z_2} = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2,$$

所以 $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.因此 $|z_1\overline{z_2}| = |z_1| \cdot |\overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|$.

(2) 因为

$$\begin{aligned} &左边 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2, \\ &右边 = z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}}, \end{aligned}$$

而 $\overline{z_1\overline{z_2}} = \overline{z_1}z_2$, 所以两侧相等. □

复数的三角和指数形式

由 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 可得

复数的三角形式.

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta).$$

定义 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \exp(\mathrm{i}\theta) := \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ (欧拉恒等式). 那么我们得到

复数的指数形式.

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = r\exp(\mathrm{i}\theta).$$

这两种形式的等价的, 指数形式可以认为是三角形式的一种缩写方式. 求复数的三角和指数形式的关键在于计算模和辐角.

例题: 求复数的三角和指数形式

例. 将 $z=-\sqrt{12}-2\mathrm{i}$ 化成三角形式和指数形式.

解. $r=|z|=\sqrt{12+4}=4$. 由于 z 在第三象限, 因此

$$\arg z=\arctan\frac{-2}{-\sqrt{12}}-\pi=\frac{\pi}{6}-\pi=-\frac{5\pi}{6}.$$

故

$$z=4\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right]=4\mathrm{e}^{-\frac{5\pi\mathrm{i}}{6}}.$$

例题: 求复数的三角和指数形式

例. 将 $z = \sin\dfrac{\pi}{5} + \mathrm{i}\cos\dfrac{\pi}{5}$ 化成三角形式和指数形式.

解. $r = |z| = 1$. 由于 z 在第一象限, 因此

$$\arg z = \arctan\frac{\cos(\pi/5)}{\sin(\pi/5)} = \operatorname{arctan}\operatorname{cot}\frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{10},$$

$$z = \cos\frac{3\pi}{10} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{10} = \mathrm{e}^{\frac{3\pi\mathrm{i}}{10}}.$$

求复数的三角或指数形式时, 只需取一个辐角就可以了, 不要求必须是辐角主值.

例题: 求复数的三角和指数形式

另解.

$$z = \sin\frac{\pi}{5} + \mathrm{i}\cos\frac{\pi}{5} = \cos\Big(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\Big) + \mathrm{i}\sin\Big(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\Big)$$
$$= \cos\frac{3\pi}{10} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{10} = \mathrm{e}^{\frac{3\pi\mathrm{i}}{10}}.$$

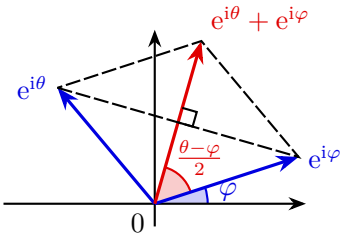
练习. 将 $z = \sqrt{3} - 3\mathrm{i}$ 化成三角形式和指数形式.

答案. $z = 2\sqrt{3}\Big[\cos\Big(-\frac{\pi}{3}\Big) + \mathrm{i}\sin\Big(-\frac{\pi}{3}\Big)\Big] = 2\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\frac{\pi\mathrm{i}}{3}}$, 写成 $\frac{5\pi}{3}$ 也可以.

模相等的复数之和

两个模相等的复数之和的三角和指数形式形式较为简单.

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}=2\cos\frac{\theta-\varphi}{2}\mathrm{e}^{\frac{\theta+\varphi}{2}\mathrm{i}}.$$



例. 若 $|z|=1,\arg z=\theta$, 则 $z+1=2\cos\dfrac{\theta}{2}\mathrm{e}^{\frac{\theta}{2}\mathrm{i}}$.

第三节　三角和指数形式在计算中的运用

- 复数的乘除
- 复数乘法的几何意义
- 复数的乘幂
- 复数的方根

三角和指数形式在复数的乘法、除法、乘幂以及方根等计算中非常有用.

定理. 设

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1) = r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1},$$

$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2) = r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} \neq 0,$$

则

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\big[\cos(\theta_1+\theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)\big] = r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\big[\cos(\theta_1-\theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)\big] = \frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}.$$

换言之,

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2, \quad \operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2.$$

多值函数相等是指两边所能取到的值构成的集合相等. 注意上述等式中 Arg 不能换成 $\arg$, 也就是说

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2, \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$$

未必成立. 这是因为 $\arg z_1 \pm \arg z_2$ 有可能不落在区间 $(-\pi, \pi]$ 上. 当且仅当等式右侧落在区间 $(-\pi, \pi]$ 内时才成立, 否则等式两侧会相差 $\pm 2\pi$.

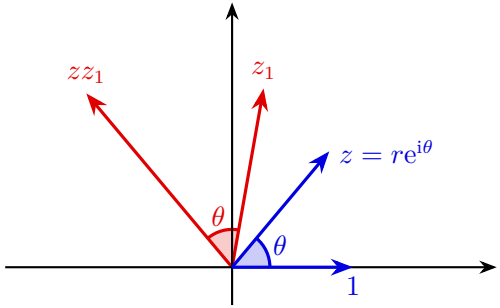
证明. 根据和差的正弦、余弦公式可知

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2\big[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + \mathrm{i}(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)\big] \\ &= r_1 r_2\big[\cos(\theta_1+\theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)\big] \end{aligned}$$

因此乘法情形得证. 除法情形类似可得. □

乘法的几何意义

从该定理可以看出, 乘以复数 $z = re^{i\theta}$ 可以理解为模放大为 r 倍, 并沿逆时针旋转角度 θ.



例题: 复数解决平面几何问题

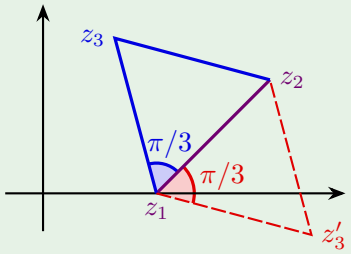
例. 已知正三角形的两个顶点为 $z_1 = 1$ 和 $z_2 = 2 + \mathrm{i}$, 求它的另一个顶点.

解. 由于 $\overrightarrow{z_1z_3}$ 为 $\overrightarrow{z_1z_2}$ 顺时针或逆时针旋转 $\dfrac{\pi}{3}$, 因此

$$z_3 - z_1 = (z_2 - z_1)\mathrm{e}^{\pm\frac{\pi\mathrm{i}}{3}} = (1+\mathrm{i})\Big(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\Big)$$

$$= \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \text{ 或 } \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},$$

$$z_3 = \frac{3-\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \text{ 或 } \frac{3+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$



例题: 复数解决平面几何问题

例. 设 AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, 证明 $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{DB}{DC}$.

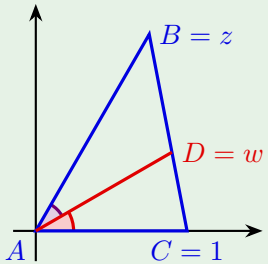
证明. 不妨设 $A=0$, $B=z$, $C=1$, $D=w$. 设

$$\lambda=\frac{DC}{BC}=\frac{w-1}{z-1}\in(0,1).$$

那么

$$w=1+\lambda(z-1)=\lambda z+(1-\lambda).$$

由于 $\angle BAD=\angle DAC$,根据复数乘法的几何意义, $\dfrac{z-0}{w-0}$ 是 $\dfrac{w-0}{1-0}$ 的正实数倍.



续证. 于是

$$\frac{w^2}{z} = \lambda^2 z + 2\lambda(1-\lambda) + \frac{(1-\lambda)^2}{z} \in \mathbb{R},$$

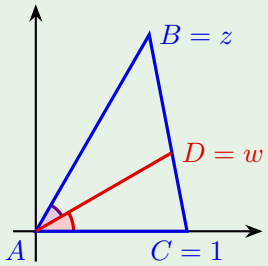
$$\lambda^2 z + \frac{(1-\lambda)^2}{z} = \lambda^2 \overline{z} + \frac{(1-\lambda)^2}{\overline{z}},$$

$$\left[\lambda^2 |z|^2 - (1-\lambda)^2\right](z - \overline{z}) = 0.$$

显然 $z \neq \overline{z}$.又因为 $0 < \lambda < 1$, 故

$$\frac{AB}{AC} = |z| = \frac{1-\lambda}{\lambda} = \frac{BC - DC}{DC} = \frac{DB}{DC}.$$

□



设

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \neq 0.$$

根据复数三角和指数形式的乘法和除法运算法则, 我们有

复数的乘幂.

$$z^n = r^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta) = r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

特别地, 当 $r = 1$ 时, 我们得到棣莫弗公式

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta.$$

对棣莫弗公式左侧进行二项式展开可以得到

$$\begin{aligned}
\cos(2\theta) &= 2\cos^2\theta - 1,\\
\cos(3\theta) &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta,\\
\cos(4\theta) &= 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1,\\
\cos(5\theta) &= 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta.
\end{aligned}$$

一般地, 可以证明 $\cos n\theta$ 是 $\cos\theta$ 的 n 次多项式, 这个多项式

$$T_n(x) = 2^{n-1}x^n - n2^{n-3}x^{n-2} + \cdots$$

叫做**切比雪夫多项式**. 它在计算数学的逼近理论中有着重要作用.

例题: 复数乘幂的计算

例. 求 $(1+\mathrm{i})^n+(1-\mathrm{i})^n$.

解.

$$1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\Big(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\Big),$$

$$1-\mathrm{i}=\sqrt{2}\Big(\cos\frac{\pi}{4}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\Big),$$

$$(1+\mathrm{i})^n+(1-\mathrm{i})^n=2^{\frac{n}{2}}\Big(\cos\frac{n\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{4}+\cos\frac{n\pi}{4}-\mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{4}\Big)=2^{\frac{n}{2}+1}\cos\frac{n\pi}{4}.$$

练习. 求 $(\sqrt{3}+\mathrm{i})^{2022}=$ -2^{2022}.

例题: 复数的乘幂的应用

复数的乘幂可用于计算三角函数有关的式子.

例. 计算 $I = \sin\dfrac{\pi}{5}\sin\dfrac{2\pi}{5}\sin\dfrac{3\pi}{5}\sin\dfrac{4\pi}{5}$.

解. 设 $z = \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{5}}$. 那么

$$\begin{aligned} I &= \frac{z^2 - z^3}{2\mathrm{i}} \cdot \frac{z^4 - z}{2\mathrm{i}} \cdot \frac{z - z^4}{2\mathrm{i}} \cdot \frac{z^3 - z^2}{2\mathrm{i}} \\ &= \frac{1}{16}\left[5 - (1 + z + z^2 + z^3 + z^4)\right] = \frac{5}{16}. \end{aligned}$$

我们利用复数乘幂公式来计算复数 z 的 n 次方根 $\sqrt[n]{z}$. 设

$$w^n = z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \neq 0, \quad w = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},$$

则

$$w^n = \rho^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi) = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta).$$

比较两边的模可知

$$\rho^n = r, \quad \rho = \sqrt[n]{r}.$$

为了避免记号冲突, 当 r 是正实数时, $\sqrt[n]{r}$ 默认表示 r 的唯一的 n 次正实根, 称之为**算术根**. 由于 $n\varphi$ 和 θ 的正弦和余弦均相等, 因此存在整数 k 使得

$$n\varphi = \theta + 2k\pi, \quad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}.$$

故

$$w = w_k = \sqrt[n]{r}\exp\Big(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\mathrm{i}\Big).$$

不难看出, $w_k = w_{k+n}$, 而 $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ 两两不同. 因此只需取 $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

复数的方根. 任意一个非零复数 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 的 n 次方根有 n 个值:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\exp\Big(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\mathrm{i}\Big) = \sqrt[n]{r}\Big(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\Big),$$

其中 $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

这些根的模都相等, 且 w_k 和 w_{k+1} 辐角相差 $\dfrac{2\pi}{n}$. 因此它们是以原点为中心, $\sqrt[n]{r}$ 为半径的圆的内接正 n 边形的顶点.

典型例题: 复数方根的计算

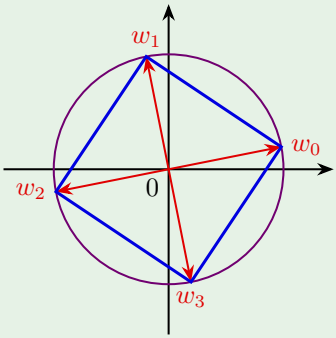
例. 求 $\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}$.

解. 由于 $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\exp\left(\dfrac{\pi\mathrm{i}}{4}\right)$, 因此

$$\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}=\sqrt[8]{2}\exp\frac{(\frac{\pi}{4}+2k\pi)\mathrm{i}}{4},\quad k=0,1,2,3.$$

于是该方根所有值为

$$w_0=\sqrt[8]{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{16}},\quad w_1=\sqrt[8]{2}\mathrm{e}^{\frac{9\pi\mathrm{i}}{16}},$$
$$w_2=\sqrt[8]{2}\mathrm{e}^{\frac{17\pi\mathrm{i}}{16}},\quad w_3=\sqrt[8]{2}\mathrm{e}^{\frac{25\pi\mathrm{i}}{16}}.$$



练习. 计算 $\sqrt[6]{-1}=$ $\pm\dfrac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2},\ \pm\mathrm{i},\ \pm\dfrac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{2}$.

注意当 $|n| \geqslant 2$ 时, $\operatorname{Arg}(z^n) = n \operatorname{Arg} z$ **不成立**. 这是因为

$$\operatorname{Arg}(z^n) = n \arg z + 2k\pi, \quad n \operatorname{Arg} z = n \arg z + 2nk\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

不过我们总有

$$\operatorname{Arg} \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \operatorname{Arg} z = \frac{\arg z + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

其中左边表示 z 的所有 n 次方根的所有辐角.

现在我们来看三次方程 $x^3+px+q=0$ 的根, $p\neq 0$. 回顾求根公式:

$$x=u+v,\quad u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta},\quad uv=-\frac{p}{3},\quad \Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}.$$

(1) 若 $\Delta>0$, 设 $\omega=\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}$, 设实数 α 满足 $\alpha^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}$, 则

$$u=\alpha,\alpha\omega,\alpha\omega^2,\qquad x=\alpha-\frac{p}{3\alpha},\ \alpha\omega-\frac{p}{3\alpha}\omega^2,\ \alpha\omega^2-\frac{p}{3\alpha}\omega.$$

容易证明后两个根都是虚数.

(2) 若 $\Delta\leqslant 0$, 则 $p<0$, $|u|^2=-\frac{p}{3}>0$. 从而 $v=\overline{u}$. 设 $\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}=u_1,u_2,u_3$, 则我们得到 3 个实根

$$x=u_1+\overline{u_1},\ u_2+\overline{u_2},\ u_3+\overline{u_3}.$$

不难验证, 若有重根则 $\Delta=0$.

第四节　曲线和区域

- 复数表平面曲线
- 区域和闭区域
- 区域的特性

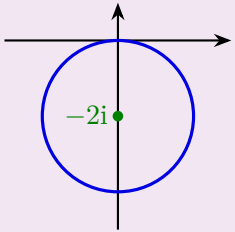
例题: 复数方程表圆

很多的平面图形能用复数形式的方程来表示. 这种表示方程有些时候会显得更加直观和易于理解.

例. $|z+2\mathrm{i}|=2$.

该方程表示与 $-2\mathrm{i}$ 的距离为 2 的点全体, 即圆心为 $-2\mathrm{i}$ 半径为 2 的圆.

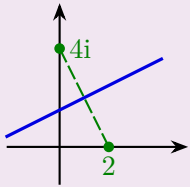
一般的圆方程为 $|z-z_0|=R$, 其中 z_0 是圆心, R 是半径.



例题: 复数方程表直线

例. $|z-4\mathrm{i}|=|z-2|$.
该方程表示与 $4\mathrm{i}$ 和 2 的距离相等的点, 即二者连线的垂直平分线. 两边同时平方化简可得 $x-2y+3=0$. 该方程也可以表达为

$$(1+2\mathrm{i})z+(1-2\mathrm{i})\overline{z}+6=0.$$



例题: 复数方程表椭圆和双曲线

例. $|z-z_1|+|z-z_2|=2a$.

- 当 $2a>|z_1-z_2|$ 时, 该方程表示以 z_1,z_2 为焦点, a 为长半轴的椭圆;
- 当 $2a=|z_1-z_2|$ 时, 该方程表示连接 z_1,z_2 的线段;
- 当 $2a<|z_1-z_2|$ 时, 该方程表示空集.

例. $|z-z_1|-|z-z_2|=2a, a>0$.

- 当 $2a<|z_1-z_2|$ 时, 该方程表示以 z_1,z_2 为焦点, a 为实半轴的双曲线的一支;
- 当 $2a=|z_1-z_2|$ 时, 该方程表示以 z_2 为起点, 与 z_2,z_1 连线反向的射线;
- 当 $2a>|z_1-z_2|$ 时, 该方程表示空集.

例题: 复数方程表平面图形

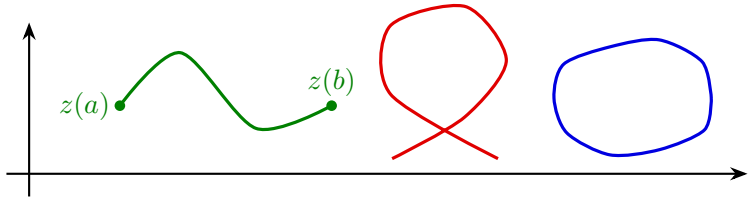
练习. $z^2+\overline{z}^2=1$ 和 $z^2-\overline{z}^2=\mathrm{i}$ 分别表示什么图形?

答案. 双曲线 $x^2-y^2=\dfrac{1}{2}$ 和双曲线 $xy=\dfrac{1}{4}$.

连续曲线、闭路

设 $x(t), y(t), t \in [a,b]$ 是两个连续函数. 参变量方程 $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [a,b]$ 定义了一条**连续曲线**. 这也等价于 $C : z = z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t), t \in [a,b]$.

- 若除了两个端点有可能重叠外, 其它情形不会出现重叠的点, 则称 C 是**简单曲线**.
- 若连续曲线 C 两个端点重叠, 即 $z(a) = z(b)$, 则称 C 是**闭合曲线**.
- 称闭合的简单曲线为**简单闭曲线**或**闭路**.



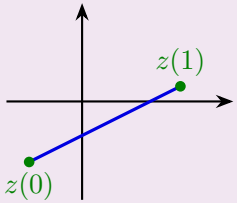
例题: 连续曲线

例. 圆 $|z - z_0| = R$ 的参数方程: $z = z_0 + Re^{i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi]$.

例. 直线段

$$z(t) = z_0 + (z_1 - z_0)t, \quad t \in [0, 1],$$

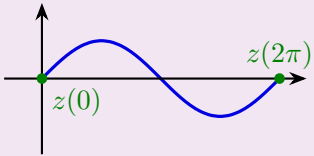
其中 z_0, z_1 为两个端点. 它是简单曲线.



例. 正弦函数曲线段

$$z(t) = t + i\sin t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

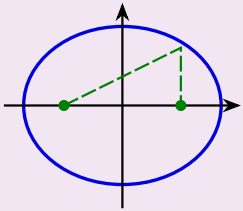
是简单曲线.



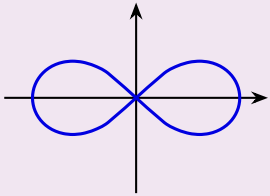
例题: 连续曲线

例. 椭圆 $|z-\sqrt{5}|+|z+\sqrt{5}|=6$ 的参数方程:

$$z=3\cos\theta+2\mathrm{i}\sin\theta,\quad \theta\in[0,2\pi].$$



例. 双纽线 $|z^2-1|=1$ 是闭合曲线, 但不是闭路.



邻域

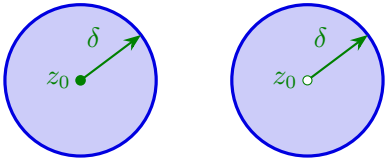
为了引入极限的概念, 我们需要考虑点的邻域. 类比于高等数学中的邻域和去心邻域, 我们在复变函数中, 称开圆盘

$$U(z_0, \delta) = \{z : |z - z_0| < \delta\}$$

为 z_0 的一个 δ-邻域. 称去心开圆盘

$$\mathring{U}(z_0, \delta) = \{z : 0 < |z - z_0| < \delta\}$$

为 z_0 的一个去心 δ-邻域.



内部、外部、边界

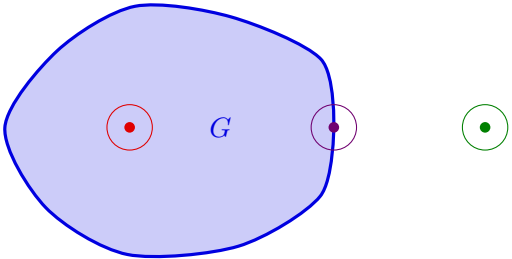
设 G 是复平面的一个子集, $z_0 \in \mathbb{C}$. 它们的位置关系有三种可能:

(1) 若存在 z_0 的一个邻域 U 完全包含在 G 中, 则称 z_0 是 G 的一个**内点**.

(2) 若存在 z_0 的一个邻域 U 完全不包含在 G 中, 则称 z_0 是 G 的一个**外点**.

(3) 若 z_0 既不是内点也不是外点, 则称 z_0 是 G 的一个**边界点**.

内点都属于 G, 外点都不属于 G, 而边界点则都有可能. 这类比于区间的端点和区间的关系.



定义.

(1) 若 G 的所有点都是内点, 也就是说, G 的边界点都不属于它, 称 G 是一个开集.

(2) 若 G 的所有边界点都属于 G, 称 G 是一个闭集.

G 是一个闭集当且仅当它的补集是开集.

例如

$$|z-z_0|<R, \quad 1<\operatorname{Re} z<3, \quad \frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{3\pi}{4}$$

都是开集. 直观上看: 开集往往由 $>,<$ 的不等式给出, 闭集往往由 $\geqslant,\leqslant$ 的不等式给出. 不过注意这并不是绝对的.

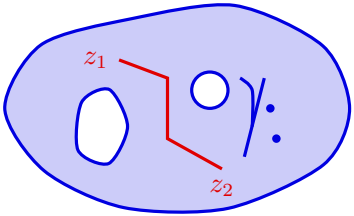
若 D 可以被包含在某个开圆盘 $U(0,R)$ 中, 则称它是有界的. 否则称它是无界的.

区域和闭区域

定义. 若开集 D 的任意两个点之间都可以用一条完全包含在 D 中的折线连接起来, 则称 D 是一个区域. 也就是说, 区域是连通的开集.

观察下侧图案, 阴影部分 (不包含线条部分) 中任意两点可用折线连接, 因此它是一个区域. 这些线条和点构成了它的边界.

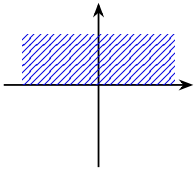
区域和它的边界一起构成了闭区域, 记作 $\overline{D}$. 它是一个闭集.



注意数学中边界的概念与日常所说的边界是两码事. 例如区域 $|z| > 1$ 的边界是 $|z| = 1$, 其闭区域是 $|z| \geqslant 1$.

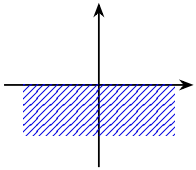
常见区域

很多区域可以由复数的实部、虚部、模和辐角的不等式所确定. 下方区域对应的闭区域是什么?



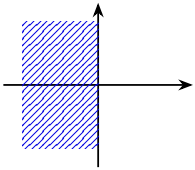
上半平面

$\operatorname{Im} z > 0$



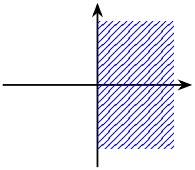
下半平面

$\operatorname{Im} z < 0$



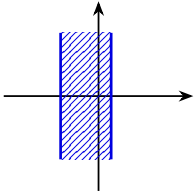
左半平面

$\operatorname{Re} z < 0$



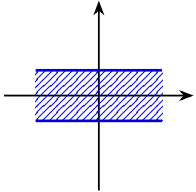
右半平面

$\operatorname{Re} z > 0$



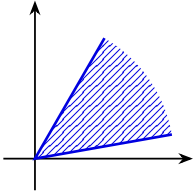
竖直带状区域

$x_1 < \operatorname{Re} z < x_2$



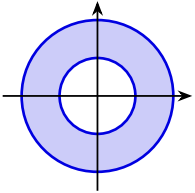
水平带状区域

$y_1 < \operatorname{Im} z < y_2$



角状区域

$\alpha_1 < \operatorname{Arg} z < \alpha_2$

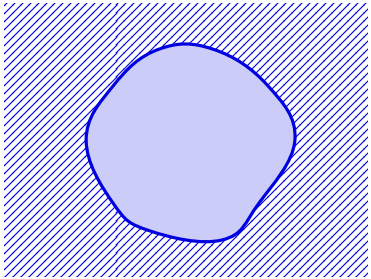


圆环域

$r < |z| < R$

闭路的内部和外部

闭路 C 把复平面划分成了两个区域, 一个有界一个无界. 分别称这两个区域是 C 的内部和外部. C 是它们的公共边界.

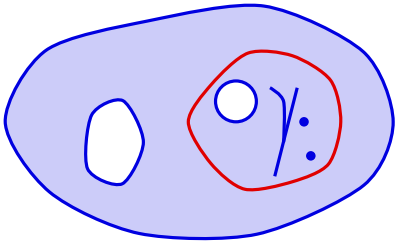


单连通区域和多连通区域

在前面所说的几个常见区域的例子中, 我们在区域中画一条闭路. 除了圆环域之外, 闭路的内部仍然包含在这个区域内.

定义. 若区域 D 中的任一闭路的内部都包含在 D 中, 则称 D 是**单连通区域**. 否则称之为**多连通区域**.

单连通区域内的任一闭路可以 ''连续地变形'' 成一个点. 这也等价于: 设 ℓ_0, ℓ_1 是从 A 到 B 的两条连续曲线, 则 ℓ_0 可以连续地变形为 ℓ_1 且保持端点不动.



典型例题：区域的特性

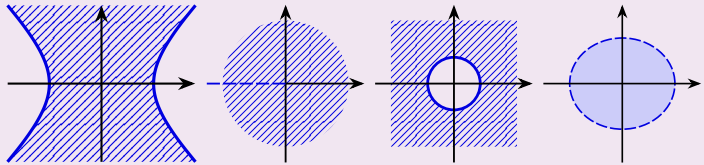
例.

(1) $\mathrm{Re}(z^2) < 1$. 设 $z = x + y\mathrm{i}$, 则 $\mathrm{Re}(z^2) = x^2 - y^2 < 1$. 这是无界的单连通区域.

(2) $\arg z \neq \pi$. 即角形区域 $-\pi < \arg z < \pi$. 这是无界的单连通区域.

(3) $\left|\dfrac{1}{z}\right| \leqslant 3$. 即 $|z| \geqslant \dfrac{1}{3}$. 这是无界的多连通闭区域.

(4) $|z+1| + |z-1| < 4$. 表示一个椭圆的内部. 这是有界的单连通区域.



练习. $|z+1| + |z-1| \geqslant 1$ 表示什么集合？**整个复平面.**

第五节　复变函数

- 复变函数的定义
- 复平面的变换

复变函数的定义

所谓的**映射**, 就是两个集合之间的一种对应 $f : A \to B$, 使得对于每一个 $a \in A$, 有一个唯一确定的 $b = f(a)$ 与之对应.

(1) 当 A 和 B 都是实数集合的子集时, 它就是一个实变函数.

(2) 当 A 和 B 都是复数集合的子集时, 它就是一个**复变函数**.

例. $f(z) = \operatorname{Re} z, \arg z, |z|, z^n$ (n 为整数), $\dfrac{z+1}{z^2+1}$ 都是复变函数.

定义. 称 A 为函数 f 的**定义域**, 称 $\{w = f(z) \mid z \in A\}$ 为它的**值域**.

上述函数的定义域和值域分别是什么?

多值复变函数

在复变函数理论中, 我们常常会遇到**多值的复变函数**, 也就是说一个 $z \in A$ 可能有多个 w 与之对应. 例如 $\operatorname{Arg} z$, $\sqrt[n]{z}$ 等.

为了方便研究, 我们常常需要对每一个 z, 选取固定的一个 $f(z)$ 的值. 这样我们得到了这个多值函数的一个**单值分支**.

例. $\arg z$ 是无穷多值函数 $\operatorname{Arg} z$ 的一个单值分支.

在考虑多值的情况下, 复变函数总有反函数. 若 f 和 f^{-1} 都是单值的, 则称 f 是**一一对应**.

例. $f(z) = z^n$ 的反函数就是 $f^{-1}(w) = \sqrt[n]{w}$. 当 $n = \pm 1$ 时, f 是一一对应.

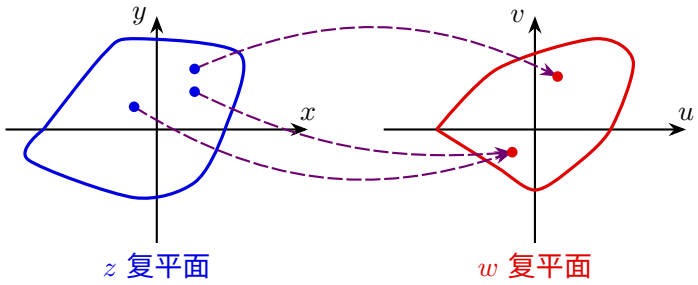
若无特别声明, 本课程中**复变函数总是指单值的复变函数**.

变换

大部分复变函数的图像无法在三维空间中表示出来. 为了直观理解和研究, 我们用两个复平面 (z 复平面和 w 复平面) 之间的**变换**(也叫**映射**、**映照**) 来表示这种对应关系. 注意到 w 的实部和虚部可以看作 z 的实部和虚部的函数, 即

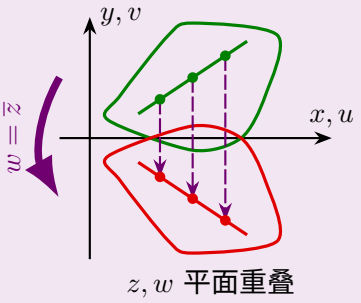
$$w = u + \mathrm{i}v = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$$

的实部和虚部是两个二元实变函数.



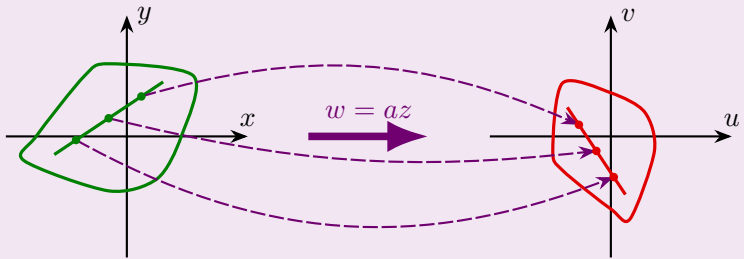
例题: 翻转变换

例. 函数 $w = \overline{z}$. 若把 z 复平面和 w 复平面重叠放置, 则这个变换是关于 z 轴的翻转变换. 它把任一区域映成和它全等的区域, 且 $u = x, v = -y$.



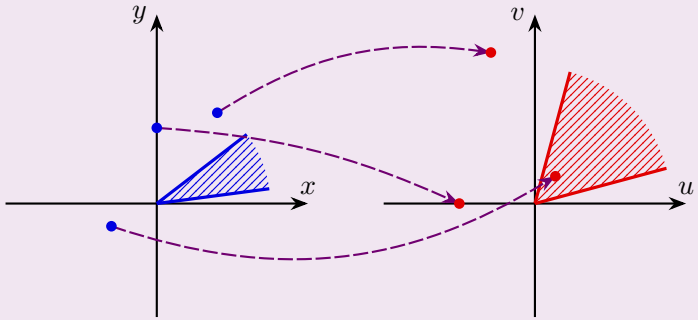
例题: 旋转和相似变换

例. 函数 $w = az$. 设 $a = re^{i\theta}$, 则这个变换是一个旋转变换 (逆时针旋转 θ) 和一个相似变换 (放大为 r 倍) 的复合. 它把任一区域映成和它相似的区域.



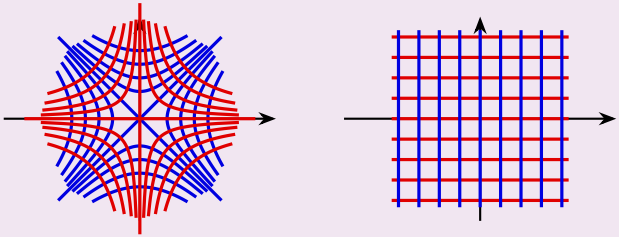
例题: 平方变换

例. 函数 $w = z^2$. 这个变换把 z 的辐角增大一倍, 因此它会把角形区域变换为角形区域, 并将夹角放大一倍.



例题: 平方变换

例. 由于 $u = x^2 - y^2, v = 2xy$. 因此它把 z 复平面上以直线 $y = \pm x$ 为渐近线的等轴双曲线 $x^2 - y^2 = c_1$ 变换为 w 复平面上的直线 $u = c_1$, 把 z 复平面上以坐标轴为渐近线的等轴双曲线 $2xy = c_2$ 变换为 w 复平面上的直线 $v = c_2$.



例题: 变换的像

例. 求线段 $0 < |z| < 3, \arg z = \dfrac{\pi}{4}$ 在变换 $w = z^2$ 下的像.

解. 设 $z = r\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}$, 则 $w = z^2 = r^2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}} = \mathrm{i}r^2$. 因此它的像是连接 0 和 9i 的线段:

$$0 < |w| < 9, \quad \arg w = \frac{\pi}{2}.$$

例. 求双曲线 $x^2 - y^2 = 2$ 在变换 $w = z^2$ 下的像.

解. 由于

$$w = u + \mathrm{i}v = z^2 = (x^2 - y^2) + 2xy\mathrm{i}.$$

因此 $u = x^2 - y^2 = 2$. 由于任意 $2 + \mathrm{i}v$ 均存在平方根, 因此所求的像就是直线 $\operatorname{Re} w = 2$.

例题: 变换的像

例. 求扇形区域 $0 < \arg z < \dfrac{\pi}{3}, 0 < |z| < 2$ 在变换 $w = z^2$ 下的像.

解. 设 $z = re^{i\theta}$, 则 $w = r^2 e^{2i\theta}$. 因此它的像是扇形区域

$$0 < \arg w < \frac{2\pi}{3}, \quad 0 < |w| < 4.$$

例题: 变换的像

例. 求圆周 $|z|=2$ 在映射 $w=\dfrac{z+1}{z-1}$ 下的像.

解. 不难看出 $z=\dfrac{w+1}{w-1}$. 由 $\left|\dfrac{w+1}{w-1}\right|=2$ 可知 $|w+1|=2|w-1|$. 设 $w=u+\mathrm{i}v$, 则

$$(u+1)^2+v^2=4\left[(u-1)^2+v^2\right].$$

化简得到

$$\left(u-\frac{5}{3}\right)^2+v^2=\frac{16}{9},$$

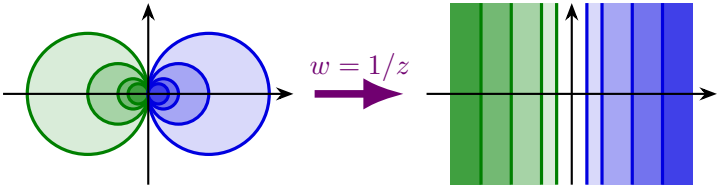
即 $\left|w-\dfrac{5}{3}\right|=\dfrac{4}{3}$, 它是一个圆周.

例题: 变换的像

形如

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

的映射叫作分式线性映射, 其中 $ad\neq bc$. 它总把直线和圆映成直线或圆 (至多相差一点).



练习. 分式线性映射 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 的像不包含复数 a/c .

第六节　极限和连续性

- 数列的极限
- 无穷远点和复球面
- 函数的极限
- 函数的连续性

类似于实数的情形, 我们可以定义复数列和复变函数的极限.

我们先来看数列极限的定义.

定义. 设 $\{z_n\}_{n\geqslant 1}$ 是一个复数列. 若存在复数 z 满足对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N 使得当 $n \geqslant N$ 时, $|z_n - z| < \varepsilon$, 则称 z 是**数列 $\{z_n\}$ 的极限**, 记作 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$.

此时称**极限存在**或**数列收敛**. 若不存在这样的 z, 则称**极限不存在**或**数列发散**.

可以看出, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$ 等价于实极限 $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n - z| = 0$.

由于复数列极限的定义和实数列极限的定义在形式上完全相同, 因此类似地, 极限的四则运算法则对于复数列也是成立的.

定理. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$, $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = w$, 则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} (z_n \pm w_n) = z \pm w$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n w_n = zw$;

(3) 当 $w \neq 0$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{z_n}{w_n} = \dfrac{z}{w}$.

下述定理保证了我们可以使用实数列的敛散性判定方法来研究复数列的敛散性.

定理. 设 $z_n = x_n + y_n\mathrm{i}, z = x + y\mathrm{i}$, 则

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \iff \lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ 且 } \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

证明. 我们只需证明

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - z| = 0 \iff \lim_{n\to\infty} |x_n - x| = \lim_{n\to\infty} |y_n - y| = 0.$$

"$\Rightarrow$": 由三角不等式 $0 \leqslant |x_n - x|, |y_n - y| \leqslant |z_n - z|$ 和夹逼准则可得知.
"$\Leftarrow$": 由极限的四则运算法则可知 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(|x_n - x| + |y_n - y|\right) = 0$.再由三角不等式 $0 \leqslant |z_n - z| \leqslant |x_n - x| + |y_n - y|$ 和夹逼准则可得. □

例题: 数列的敛散性

例. 设 $z_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \mathrm{e}^{\frac{\pi \mathrm{i}}{n}}$. 数列 $\{z_n\}$ 是否收敛?

解. 由于

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cos \frac{\pi}{n} \to 1, \quad y_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sin \frac{\pi}{n} \to 0.$$

因此 $\{z_n\}$ 收敛且 $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = 1$.

数列极限的定义可以用邻域的语言重新表述为:

定义. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$ **是指: 对** z **的任意** δ **邻域** U**, 存在** N **使得当** $n \geqslant N$ **时,** $z_n \in U$**.**

若 $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = +\infty$, 我们将其记为 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$. 这也等价于: 对任意 $X > 0$, 存在 N 使得当 $n \geqslant N$ 时, $|z_n| > X$.

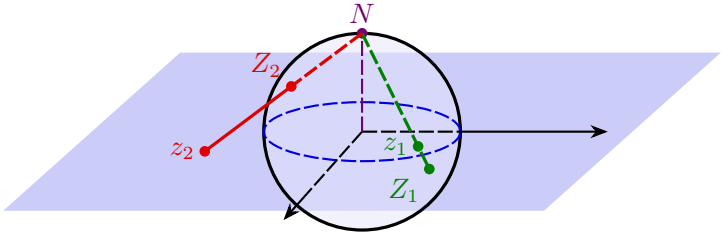
我们能不能也用邻域的语言来描述 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$ 呢? 我们将介绍复球面的概念, 它是复数的一种几何表示方式且自然地包含无穷远点 ∞. 这种思想是在黎曼研究多值复变函数时引入的.

复球面

取一个球心在 $z=0$ 的单位球面. 过 O 做垂直于复平面的直线, 并与球面相交于其中一点 N, 称之为北极.

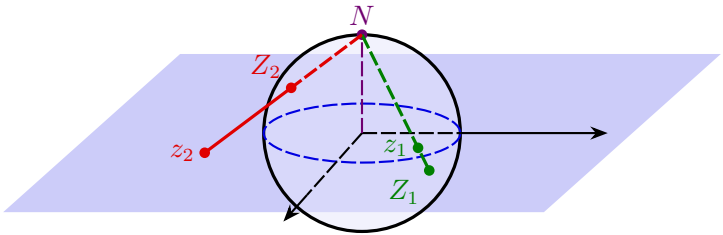
- 对于复平面上的任意一点 z, 连接北极 N 和 z 的直线一定与球面相交于除 N 以外的唯一一个点 Z.
- 反之, 球面上除了北极外的任意一点 Z, 直线 NZ 一定与复平面相交于唯一一点.

这样, 球面上除北极外的所有点和全体复数建立了一一对应.



当 $|z|$ 越来越大时，其对应球面上点也越来越接近 N.

若我们在复平面上添加一个额外的 ‘‘点’’——**无穷远点**，记作 ∞. 那么**扩充复数集合** $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 就正好和球面上的点一一对应. 称这样的球面为**复球面**，称包含无穷远点的复平面为**扩充复平面**或**闭复平面**.



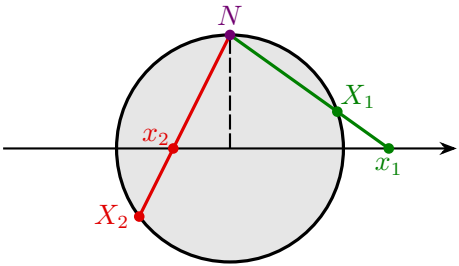
若约定 $|\infty| = +\infty$, 则分别称

$$U(\infty, X) = \{z \in \mathbb{C}^* : |z| > X\}, \quad \mathring{U}(\infty, X) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > X\}$$

为 ∞ 的 X **邻域**和**去心** X **邻域**. 这样, 前述极限可统一表述为: 若对 $z \in \mathbb{C}^*$ 的任意 δ 邻域 U, 存在 N 使得当 $n \geqslant N$ 时, $z_n \in U$, 则记 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$.

朴素地看, 复球面上任意一点可以定义 δ 邻域为与其距离小于 δ 的所有点. 特别地, ∞ 的邻域通过前面所说的对应关系, 可以对应到扩充复平面上 ∞ 的一个邻域. 所以在复球面上, 普通复数和 ∞ 的邻域具有同等地位.

它和实数列极限符号中的 ∞ 有什么联系呢？选取上述图形的一个截面来看，实轴可以和圆周去掉一点建立一一对应. 于是实数列极限符号中的 ∞ 在复球面上就是 ∞.



定义. 设函数 $f(z)$ 在点 z_0 的某个去心邻域内有定义. 若存在复数 A, 使得对 A 的任意邻域 $U(A,\varepsilon), \exists \delta > 0$ 使得

$$z \in \overset{\circ}{U}(z_0,\delta) \implies f(z) \in U(A,\varepsilon),$$

则称 A 为 $f(z)$ 当 $z \to z_0$ 时的极限, 记为 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$ 或 $f(z) \to A(z \to z_0)$.

在此表述下, 将上述定义中的 z_0 或 A 换成 ∞, 即可得到 $z \to \infty$ 时的极限定义, 以及 $\lim f(z) = \infty$ 的含义.

类似于复数列情形, 极限的四则运算法则对于复变函数也是成立的.

定理. 设 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$, $\lim\limits_{z\to z_0} g(z)=B$, 则

(1) $\lim\limits_{z\to z_0}(f\pm g)(z)=A\pm B$;

(2) $\lim\limits_{z\to z_0}(fg)(z)=AB$;

(3) 当 $B\neq 0$ 时, $\lim\limits_{z\to z_0}\left(\dfrac{f}{g}\right)(z)=\dfrac{A}{B}$.

和数列极限类似, 我们有下述定理:

定理. 设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y), z_0=x_0+y_0\mathrm{i}, A=u_0+v_0\mathrm{i}$, 则

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A \iff \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0, \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0.$$

该定理表明: 研究复变函数极限, 只需研究其实部、虚部两个二元实函数的极限.

在学习了复变函数的导数后, 我们也可以使用等价无穷小替换、洛必达法则等工具来计算极限.

例题: 判断函数极限是否存在

例. 证明: 当 $z \to 0$ 时, 函数 $f(z) = \dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|}$ 的极限不存在.

证明. 令 $z = x + y\mathrm{i}$, 则 $f(z) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. 因此

$$u(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad v(x,y) = 0.$$

当 z 在实轴原点两侧分别趋向于 0 时, $u(x,y) \to \pm 1$. 因此 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y)$ 不存在, 从而 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 不存在. □

定义.

(1) 若 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$, 则称 $f(z)$ 在 z_0 处连续.

(2) 若 $f(z)$ 在区域 D 内处处连续, 则称 $f(z)$ 在 D 内连续.

根据前面的极限判定定理可知:

定理.

(1) 函数 $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ 在 $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ 处连续当且仅当 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续.

(2) 在 z_0 处连续的两个函数 $f(z)$, $g(z)$ 之和、差、积、商 $(g(z_0) \neq 0)$ 在 z_0 处仍然连续.

(3) 若函数 $g(z)$ 在 z_0 处连续, 函数 $f(w)$ 在 $g(z_0)$ 处连续, 则 $f[g(z)]$ 在 z_0 处连续.

例题: 连续函数的性质

例.

(1) 设

$$f(z) = \ln(x^2 + y^2) + \mathrm{i}(x^2 - y^2).$$

$u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ 除原点外处处连续, $v(x, y) = x^2 - y^2$ 处处连续. 因此 $f(z)$ 在 $z \neq 0$ 处连续.

(2) 显然 $f(z) = z$ 是处处连续的, 故多项式函数

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

也处处连续, 有理函数 $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 在 $Q(z)$ 的零点以外处处连续.

例题: 函数连续性的判定

例. 证明: 若 $f(z)$ 在 z_0 连续, 则 $\overline{f(z)}$ 在 z_0 也连续.

证明. 设

$$f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y), \quad z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0.$$

那么 $u(x,y), v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续.从而 $-v(x,y)$ 也在 (x_0,y_0) 连续.所以

$$\overline{f(z)} = u(x,y) - \mathrm{i}v(x,y)$$

在 (x_0,y_0) 连续. □

另证. 函数 $g(z) = \overline{z} = x - \mathrm{i}y$ 处处连续, 从而 $g[f(z)] = \overline{f(z)}$ 在 z_0 处连续. □

可以看出, 在极限和连续性上, 复变函数和两个二元实函数没有什么差别. 那么复变函数和多变量微积分的差异究竟是什么导致的呢?

归根到底就在于 $\mathbb{C}$ 是一个域, 上面可以做除法. 这就导致了复变函数有**导数**, 而不是像多变量实函数只有偏导数. 这种特性使得可导的复变函数具有整洁优美的性质, 我们将在下一章来逐步揭开它的神秘面纱.

第二章　解析函数

1. 解析函数的概念
2. 函数解析的充要条件
3. 初等函数

第一节　解析函数的概念

- 可导函数
- 可微函数
- 解析函数

由于 $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{R}$ 一样是域, 因此我们可以像一元实变函数一样去定义复变函数的导数和微分.

定义. 设 $w = f(z)$ 的定义域是区域 D, $z_0 \in D$. 若极限

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

存在, 则称 $f(z)$ 在 z_0 可导. 这个极限值称为 $f(z)$ 在 z_0 的导数, 记作 $f'(z_0)$. 若 $f(z)$ 在区域 D 内处处可导, 称 $f(z)$ 在 D 内可导.

例题: 线性函数的不可导性

例. 函数 $f(z)=x+2y\mathrm{i}$ 在哪些点处可导?

解. 由定义可知

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{(x+\Delta x)+2(y+\Delta y)\mathrm{i}-(x+2y\mathrm{i})}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta x+2\,\Delta y\mathrm{i}}{\Delta x+\Delta y\mathrm{i}}. \end{aligned}$$

当 $\Delta x=0,\Delta y\to 0$ 时, 上式 $\to 2$; 当 $\Delta y=0,\Delta x\to 0$ 时, 上式 $\to 1$. 因此该极限不存在, $f(z)$ 处处不可导.

例题: 复变函数的导数

练习. 函数 $f(z)=\overline{z}=x-y\mathrm{i}$ 在哪些点处可导?

答案. 处处不可导.

例. 求 $f(z)=z^2$ 的导数.

解.

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^2-z^2}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z\to 0}(2z+\Delta z)=2z. \end{aligned}$$

求导运算法则

事实上, 和单变量实函数情形类似, 复变函数也有如下求导法则.

定理.

(1) $(c)' = 0$, **其中** c **为复常数;**

(2) $(z^n)' = nz^{n-1}$, **其中** n **为整数;**

(3) $(f \pm g)' = f' \pm g', \quad (cf)' = cf'$; **线性性质**

(4) $(fg)' = f'g + fg', \quad \left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$; **莱布尼兹法则**

(5) $\Big[f\big[g(z)\big]\Big]' = f'\big[g(z)\big] \cdot g'(z)$; **复合函数求导**

(6) $g'(z) = \dfrac{1}{f'(w)}, g = f^{-1}, w = g(z)$. **反函数求导**

由上述求导法则, 不难知道:

定理.

(1) 在 z_0 处可导的两个函数 $f(z)$, $g(z)$ 之和、差、积、商 ($g(z_0) \neq 0$) 仍然在 z_0 处可导.

(2) 若函数 $g(z)$ 在 z_0 处可导, 函数 $f(w)$ 在 $g(z_0)$ 处可导, 则 $f[g(z)]$ 在 z_0 处可导.

由此可知, 多项式函数处处可导, 有理函数在其定义域内处处可导, 且二者导数形式和单变量实函数情形类似.

例题: 利用求导运算法则计算导数

例. 求 $f(z)=\dfrac{z^2+3}{z+1}$ 的导数.

解. 由于

$$f(z)=z-1+\frac{4}{z+1},$$

因此

$$f'(z)=1-\frac{4}{(z+1)^2}.$$

定理. 若 $f(z)$ 在 z_0 可导, 则 $f(z)$ 在 z_0 连续.

该定理的证明和单变量实函数情形完全相同.

证明. 设 $\Delta w = f(z_0+\Delta z) - f(z_0)$, 则

$$\lim_{\Delta z\to 0}\Delta w = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}\cdot\Delta z = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}\cdot\lim_{\Delta z\to 0}\Delta z = f'(z_0)\cdot 0 = 0,$$

从而 $f(z)$ 在 z_0 处连续. □

复变函数的微分也和单变量实函数情形类似.

定义. 若存在常数 A 使得函数 $w = f(z)$ 满足

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A\,\Delta z + o(\Delta z),$$

其中 $o(\Delta z)$ 表示 Δz 的高阶无穷小量, 则称 $f(z)$ 在 z_0 处可微, 称 $A\,\Delta z$ 为 $f(z)$ 在 z_0 的微分, 记作 $\mathrm{d}w = A\,\Delta z$.

和一元实变函数情形一样, 复变函数的可微和可导是等价的, 且 $\mathrm{d}w = f'(z_0)\,\Delta z$, $\mathrm{d}z = \Delta z$. 故

$$\mathrm{d}w = f'(z_0)\,\mathrm{d}z, \quad f'(z_0) = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}.$$

定义.

(1) 若函数 $f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内处处可导, 则称 $f(z)$ 在 z_0 解析.

(2) 若 $f(z)$ 在区域 D 内处处解析, 则称 $f(z)$ 在 D 内解析, 或称 $f(z)$ 是 D 内的一个解析函数.

(3) 若 $f(z)$ 在 z_0 不解析, 则称 z_0 为 $f(z)$ 的一个奇点.

在一点解析蕴含在这点可导, 反之未必. 无定义、不连续、不可导、可导但不解析, 都会导致奇点的产生. 不过, 若 z_0 是 $f(z)$ 定义域的外点, 即存在 z_0 的邻域与 $f(z)$ 定义域交集为空集, 这种情形不甚有趣, 因此我们不考虑这类奇点.

在区域 D 内解析和在 D 内可导是等价的. 这是因为任意 $z_0 \in D$ 均存在一个包含在 D 内的邻域.

例题: 解析与可导的关系

由于一个点的邻域也是一个开集, 因此若 $f(z)$ 在 z_0 处解析, 则 $f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内处处可导, 从而在该邻域内解析. 因此 $f(z)$ 解析点全体是一个开集, 它是可导点集合的内点构成的集合.

练习. 函数 $f(z)$ 在点 z_0 处解析是 $f(z)$ 在该点可导的(A).

(A) 充分非必要条件
(B) 必要非充分条件
(C) 充要条件
(D) 既非充分也非必要条件

答案. 解析要求在 z_0 的一个邻域内都可导才行.

例题: 函数的解析性

例. 研究函数 $f(z)=|z|^2$ 的解析性.

解. 注意到

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{(z+\Delta z)(\overline{z}+\overline{\Delta z})-z\overline{z}}{\Delta z}=\overline{z}+\overline{\Delta z}+z\frac{\Delta x-\Delta y\mathrm{i}}{\Delta x+\Delta y\mathrm{i}}.$$

- 若 $z=0$, 则当 $\Delta z\to 0$ 时该式极限为 0.
- 若 $z\neq 0$, 则当 $\Delta y=0,\Delta x\to 0$ 时该式极限为 $\overline{z}+z$;

当 $\Delta x=0,\Delta y\to 0$ 时该式极限为 $\overline{z}-z$. 因此此时极限不存在. 故 $f(z)$ 仅在 $z=0$ 处可导, 从而处处不解析.

定理.

(1) 在 z_0 处解析的两个函数 $f(z)$, $g(z)$ 之和、差、积、商 ($g(z_0) \neq 0$) 仍然在 z_0 处解析.

(2) 若函数 $g(z)$ 在 z_0 处解析, 函数 $f(w)$ 在 $g(z_0)$ 处解析, 则 $f[g(z)]$ 在 z_0 处解析.

定理.

(1) 在 D 内解析的两个函数 $f(z)$, $g(z)$ 之和、差、积、商仍然在 D (作商时需要去掉 $g(z) = 0$ 的点) 内解析.

(2) 若函数 $g(z)$ 在 D 内解析且像均落在 D' 中, 函数 $f(w)$ 在 D' 内解析, 则 $f[g(z)]$ 在 D 内解析.

由此可知, 多项式函数处处解析. 有理函数在其定义域内处处解析, 分母的零点是它的奇点.

第二节　函数解析的充要条件

- 柯西-黎曼方程
- 柯西-黎曼方程的应用

可导函数的特点

通过对一些简单函数的分析, 我们发现可导的函数往往可以直接表达为 z 的函数的形式, 而不解析的往往包含 $x, y, \overline{z}$ 等内容.

这种现象并不是偶然的. 我们来研究二元实变量函数的可微性与复变函数可导的关系.

为了简便我们用 u_x, u_y, v_x, v_y 等记号表示偏导数.

设 $f = u + \mathrm{i}v$ 在 z 处可导, $f'(z) = a + b\mathrm{i}$, 则

$$\Delta u + \mathrm{i}\,\Delta v = \Delta f = (a + b\mathrm{i})(\Delta x + \mathrm{i}\,\Delta y) + o(\Delta z).$$

展开可知

$$\begin{aligned} \Delta u &= a\,\Delta x - b\,\Delta y + o(\Delta z), \\ \Delta v &= b\,\Delta x + a\,\Delta y + o(\Delta z). \end{aligned}$$

由于 $o(\Delta z) = o(|\Delta z|) = o(\sqrt{x^2 + y^2})$, 因此 u, v 可微且 $u_x = v_y = a, v_x = -u_y = b$.

反过来, 假设 u, v **可微且** $u_x = v_y, v_x = -u_y$. 由全微分公式

$$\begin{aligned}
\Delta u &= u_x\,\Delta x + u_y\,\Delta y + o(\Delta z) = u_x\,\Delta x - v_x\,\Delta y + o(\Delta z),\\
\Delta v &= v_x\,\Delta x + v_y\,\Delta y + o(\Delta z) = v_x\,\Delta x + u_x\,\Delta y + o(\Delta z),\\
\Delta f &= \Delta(u + \mathrm{i}v) = (u_x + \mathrm{i}v_x)\,\Delta x + (-v_x + \mathrm{i}u_x)\,\Delta y + o(\Delta z)\\
&= (u_x + \mathrm{i}v_x)\,\Delta(x + \mathrm{i}y) + o(\Delta z)\\
&= (u_x + \mathrm{i}v_x)\,\Delta z + o(\Delta z).
\end{aligned}$$

故 $f(z)$ **在** z **处可导, 且** $f'(z) = u_x + \mathrm{i}v_x = v_y - \mathrm{i}u_y$.

由此得到

柯西-黎曼定理. $f(z)$ 在 z 可导当且仅当在 z 点 u, v 可微且满足柯西-黎曼方程 (简称为 C-R 方程):

$$u_x = v_y, \quad v_x = -u_y.$$

此时

$$f'(z) = u_x + \mathrm{i}v_x = v_y - \mathrm{i}u_y.$$

需要注意的是: 柯西-黎曼定理中的可微性和 C-R 方程缺一不可.





注意到 $x=\dfrac{1}{2}z+\dfrac{1}{2}\overline{z}, y=-\dfrac{\mathrm{i}}{2}z+\dfrac{\mathrm{i}}{2}\overline{z}$. 仿照着二元实函数偏导数在变量替换下的变换规则, 定义 f 对 z 和 $\overline{z}$ 的偏导数为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial z}=\dfrac{\partial x}{\partial z}\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial z}\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x}-\dfrac{\mathrm{i}}{2}\dfrac{\partial f}{\partial y},\\ \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}=\dfrac{\partial x}{\partial \overline{z}}\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial \overline{z}}\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\mathrm{i}}{2}\dfrac{\partial f}{\partial y}.\end{cases}$$

若把 $z,\overline{z}$ 看成独立变量, 那么

- 当 f 在 z 处可导时, $\mathrm{d}f=f'\,\mathrm{d}z$.
- 当 f 关于 $z,\overline{z}$ 可微时 (即 u,v 可微), $\mathrm{d}f=\dfrac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z+\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,\mathrm{d}\overline{z}$.

所以 f 在 z 处可导当且仅当 u,v 可微且 $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}=0$, 此时 $f'(z)=\dfrac{\partial f}{\partial z}$. 这也解释了为何含有 $x,y,\overline{z}$ 形式的函数往往不可导, 而可导的函数往往可以直接表达为 z 的形式.

由于二元函数的偏导数均连续蕴含可微, 因此我们有:

定理.

(1) 若 u_x, u_y, v_x, v_y 在 z 处连续, 且满足 **C-R** 方程, 则 $f(z)$ 在 z 可导.

(2) 若 u_x, u_y, v_x, v_y 在区域 D 上处处连续, 且满足 **C-R** 方程, 则 $f(z)$ 在 D 上可导 (从而解析).

这些连续性要求也可以换成 $\dfrac{\partial f}{\partial z}$, $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}$ 的连续性.

典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

例. 函数 $f(z)=\bar{z}$ 在何处可导, 在何处解析?

解. 由 $u=x, v=-y$ 可知

$$u_x=1, \qquad u_y=0,$$
$$v_x=0, \qquad v_y=-1.$$

因为 $u_x=1\neq v_y=-1$, 所以该函数处处不可导, 处处不解析.

也可由 $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}=1\neq 0$ 看出.

典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

例. 函数 $f(z)=z\operatorname{Re}z$ 在何处可导, 在何处解析?

解. 由 $f(z)=x^2+\mathrm{i}xy, u=x^2, v=xy$ 可知

$$u_x=2x, \qquad u_y=0,$$
$$v_x=y, \qquad v_y=x.$$

由 $2x=x, 0=-y$ 可知只有 $x=y=0, z=0$ 满足 C-R 方程. 因此该函数只在 0 可导, 处处不解析且 $f'(0)=u_x(0,0)+\mathrm{i}v_x(0,0)=0$.

也可由

$$f=\frac{1}{2}z(z+\overline{z}), \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}=\frac{1}{2}z$$

看出, $f'(0)=\dfrac{\partial f}{\partial z}\Big|_{z=0}=\left(z+\dfrac{1}{2}\overline{z}\right)\Big|_{z=0}=0.$

典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

例. 函数 $f(z)=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)$ 在何处可导, 在何处解析?

解. 由 $u=\mathrm{e}^x\cos y, v=\mathrm{e}^x\sin y$ 可知

$$u_x=\mathrm{e}^x\cos y,\qquad u_y=-\mathrm{e}^x\sin y,$$
$$v_x=\mathrm{e}^x\sin y,\qquad v_y=\mathrm{e}^x\cos y.$$

因此该函数处处可导, 处处解析, 且

$$f'(z)=u_x+\mathrm{i}v_x=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)=f(z).$$

实际上, 这个函数就是复变量的指数函数 e^z.

典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

练习. 函数(A)在 $z=0$ 处不可导.

(A) $2x+3y\mathrm{i}$
(B) $2x^2+3y^2\mathrm{i}$
(C) $\mathrm{e}^x\cos y+\mathrm{i}\mathrm{e}^x\sin y$
(D) $x^2-xy\mathrm{i}$

答案. 根据 C-R 方程可知对于(A), $u_x(0)=2\neq v_y(0)=3$. 对于(B)(D), 各个偏导数在 0 处取值都是 0. (C)则是处处都可导.

例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

例. 设函数 $f(z)=(x^2+axy+by^2)+\mathrm{i}(cx^2+dxy+y^2)$ 在复平面内处处解析. 求实常数 a,b,c,d 以及 $f'(z)$.

解. 由于

$$u_x=2x+ay, \qquad u_y=ax+2by,$$
$$v_x=2cx+dy, \qquad v_y=dx+2y,$$

因此

$$2x+ay=dx+2y, \quad ax+2by=-(2cx+dy),$$

$$a=d=2, \quad b=c=-1,$$

$$f'(z)=u_x+\mathrm{i}v_x=2x+2y+\mathrm{i}(-2x+2y)=(2-2\mathrm{i})z.$$

例题: 利用 C-R 方程证明解析函数结论

例. 若 $f'(z)$ 在区域 D 内处处为零, 则 $f(z)$ 在 D 内是一常数.

证明. 由于

$$f'(z) = u_x + \mathrm{i}v_x = v_y - \mathrm{i}u_y = 0,$$

因此 $u_x = v_x = u_y = v_y = 0$, u, v 均为常数, 从而 $f(z) = u + \mathrm{i}v$ 是常数. □

类似地可以证明, 若 $f(z)$ 在 D 内解析, 则下述条件均可推出 $f(z)$ 是常数:

- $\arg f(z)$ 是一常数,
- $\mathrm{Re}\, f(z)$ 是一常数,
- $v = u^2$,
- $|f(z)|$ 是一常数,
- $\mathrm{Im}\, f(z)$ 是一常数,
- $u = v^2$.

例. 若 $f(z)$ 解析且 $f'(z)$ 处处非零, 则曲线族 $u(x,y)=c_1$ 和曲线族 $v(x,y)=c_2$ 互相正交.

证明. 由于 $f'(z)=u_x-\mathrm{i}u_y$, 因此 u_x,u_y 不全为零. 对 $u(x,y)=c_1$ 使用隐函数求导法则得

$$u_x\,\mathrm{d}x+u_y\,\mathrm{d}y=0,$$

从而 $\boldsymbol{u}=(u_y,-u_x)$ 是该曲线在 z 处的非零切向量. 同理 $\boldsymbol{v}=(v_y,-v_x)$ 是 $v(x,y)=c_2$ 在 z 处的非零切向量. 由于

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=u_yv_y+u_xv_x=u_yu_x-u_xu_y=0,$$

因此这两个切向量 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 正交, 从而曲线正交. □

当 $f'(z_0) \neq 0$ 时, 经过 z_0 的两条曲线 C_1, C_2 的夹角和它们的像 $f(C_1), f(C_2)$ 在 $f(z_0)$ 处的夹角总是相同的. 这种性质被称为保角性.

这是因为 $\mathrm{d}f = f'(z_0)\,\mathrm{d}z$. 局部来看 f 把 z_0 附近的点以 z_0 为中心放缩至 $|f'(z_0)|$ 倍并逆时针旋转 $\arg f'(z_0)$. 由 w 复平面上曲线族 $u = c_1, v = c_2$ 正交可知上述例题成立.

第三节　初等函数

- 指数函数
- 对数函数
- 幂函数
- 三角函数和反三角函数
- 在有理函数的应用

我们将实变函数中的初等函数推广到复变函数. 多项式函数和有理函数的解析性质已经介绍过, 这里不再重复. 现在我们来定义指数函数.

指数函数有多种等价的定义方式:

(1) $\exp z = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$ (欧拉恒等式);

(2) $\exp z = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n$ (极限定义);

(3) $\exp z = 1 + z + \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^3}{3!} + \cdots = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{z^k}{k!}$ (级数定义);

(4) $\exp z$ 是唯一的一个处处解析的函数, 使得当 $z = x \in \mathbb{R}$ 时, $\exp z = \mathrm{e}^x$ (解析延拓).

有些人会从 $\mathrm{e}^x, \cos x, \sin x$ 的泰勒展开

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots$$

形式地带入得到欧拉恒等式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x$. 事实上我们可以把它当做复指数函数的定义, 而不是欧拉恒等式的证明. 我们将在第四章说明(1)、(3)和(4)是等价的.

我们来证明(1)和(2)等价.

$$\lim_{n\to\infty}\Big|1+\frac{z}{n}\Big|^n=\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\Big)^{\frac{n}{2}}\quad(1^\infty\text{ 型不定式})$$
$$=\exp\Big[\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\Big(\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\Big)\Big]=\mathrm{e}^x.$$

不妨设 $n>|z|$, 这样 $1+\dfrac{z}{n}$ 落在右半平面,

$$\lim_{n\to\infty}n\arg\Big(1+\frac{z}{n}\Big)=\lim_{n\to\infty}n\arctan\frac{y}{n+x}=\lim_{n\to\infty}\frac{ny}{n+x}=y.$$

故 $\exp z=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)$.

定义. 指数函数

$$\exp z := \mathrm{e}^{x}(\cos y + \mathrm{i}\sin y).$$

为了方便, 我们也记 $\mathrm{e}^{z} = \exp z$. 指数函数有如下性质:

- $\exp z$ **处处解析, 且** $(\exp z)' = \exp z$**.**
- $\exp z \neq 0$**.**
- $\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \cdot \exp z_2$**.**
- $\exp(z + 2k\pi\mathrm{i}) = \exp z$**, 即** $\exp z$ **周期为** $2\pi\mathrm{i}$**.**
- $\exp z_1 = \exp z_2$ **当且仅当** $z_1 = z_2 + 2k\pi\mathrm{i}, k \in \mathbb{Z}$**.**
- **指数函数将直线族** $\mathrm{Re}\, z = c$ **映为圆周族** $|w| = \mathrm{e}^{c}$**, 将直线族** $\mathrm{Im}\, z = c$ **映为射线族** $\mathrm{Arg}\, w = c$**.**

例题: 指数函数的周期

例. 计算函数 $f(z)=\exp\left(\frac{z}{6}\right)$ 的周期.

解. 设 $f(z_1)=f(z_2)$, 则 $\mathrm{e}^{z_1/6}=\mathrm{e}^{z_2/6}$. 因此存在 $k\in\mathbb{Z}$ 使得

$$\frac{z_1}{6}=\frac{z_2}{6}+2k\pi\mathrm{i},$$

从而 $z_1-z_2=12k\pi\mathrm{i}$. 所以 $f(z)$ 的周期是 $12\pi\mathrm{i}$.

一般地, $\exp(az+b)$ 的周期是 $\frac{2\pi\mathrm{i}}{a}$ (或写成 $-\frac{2\pi\mathrm{i}}{a}$), $a\neq 0$.

对数函数 $\operatorname{Ln} z$ 定义为指数函数 $\exp z$ 的反函数. 为什么我们用大写的 Ln 呢? 在复变函数中, 很多函数是多值函数. 为了便于研究, 我们会固定它的一个单值分支. 我们将多值的这个开头字母大写, 而对应的单值的则是开头字母小写. 例如 $\operatorname{Arg} z$ 和 $\arg z$.

设 $z \neq 0, \mathrm{e}^w = z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\ln r + \mathrm{i}\theta}$, 则

$$w = \ln r + \mathrm{i}\theta + 2k\pi\mathrm{i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

定义.

(1) 定义对数函数

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + \mathrm{i}\operatorname{Arg} z.$$

它是一个多值函数.

(2) 定义对数函数主值

$$\ln z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z.$$

对于每一个整数 k, $\ln z + 2k\pi\mathrm{i}$ 都给出了 $\operatorname{Ln} z$ 的一个单值分支. 特别地, 当 $z = x > 0$ 是正实数时, $\ln z$ 就是实变的对数函数.

典型例题: 对数函数的计算

例. 求 $\operatorname{Ln} 2, \operatorname{Ln}(-1)$ 以及它们的主值.

解.

(1)

$$\operatorname{Ln} 2 = \ln 2 + 2k\pi \mathrm{i}, k \in \mathbb{Z},$$

主值为 $\ln 2$.

(2)

$$\operatorname{Ln}(-1) = \ln 1 + \mathrm{i} \operatorname{Arg}(-1) = (2k+1)\pi \mathrm{i}, k \in \mathbb{Z},$$

主值为 $\pi \mathrm{i}$.

典型例题: 对数函数的计算

例. 求 $\operatorname{Ln}(-2+3\mathrm{i}), \operatorname{Ln}(3-\sqrt{3}\mathrm{i})$.

解.

(1)

$$\begin{aligned}\operatorname{Ln}(-2+3\mathrm{i}) &= \ln|-2+3\mathrm{i}| + \mathrm{i}\operatorname{Arg}(-2+3\mathrm{i}) \\ &= \frac{1}{2}\ln 13 + \Big(-\arctan\frac{3}{2} + \pi + 2k\pi\Big)\mathrm{i}, \quad k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\operatorname{Ln}(3-\sqrt{3}\mathrm{i}) &= \ln|3-\sqrt{3}\mathrm{i}| + \mathrm{i}\operatorname{Arg}(3-\sqrt{3}\mathrm{i}) \\ &= \ln 2\sqrt{3} + \Big(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi\Big)\mathrm{i} \\ &= \ln 2\sqrt{3} + \Big(2k - \frac{1}{6}\Big)\pi\mathrm{i}, \quad k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

典型例题: 对数函数的计算

例. 解方程 $\mathrm{e}^z - 1 - \sqrt{3}\mathrm{i} = 0$.

解. 由于 $1 + \sqrt{3}\mathrm{i} = 2\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{3}}$, 因此

$$z = \mathrm{Ln}(1 + \sqrt{3}\mathrm{i}) = \ln 2 + \Big(2k + \frac{1}{3}\Big)\pi\mathrm{i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

练习. 求 $\ln(-1 - \sqrt{3}\mathrm{i}) =$ $\underline{\qquad \ln 2 - \dfrac{2\pi\mathrm{i}}{3} \qquad}$.

对数函数与其主值的关系是

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + \operatorname{Ln} 1 = \ln z + 2k\pi \mathrm{i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

根据辐角以及辐角主值的相应等式, 我们有

$$\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2, \quad \operatorname{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2,$$

$$\operatorname{Ln} \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \operatorname{Ln} z.$$

而当 $|n| \geqslant 2$ 时, $\operatorname{Ln} z^n = n \operatorname{Ln} z$ **不成立**. 以上等式换成 $\ln z$ 均未必成立.

设 x 是正实数, 则

$$\ln(-x) = \ln x + \pi\mathrm{i}, \qquad \lim_{y\to 0^-} \ln(-x+y\mathrm{i}) = \ln x - \pi\mathrm{i},$$

因此 $\ln z$ 在负实轴和零处不连续.

而在其它地方 $-\pi < \arg z < \pi$, $\ln z$ 是 e^z 在区域 $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$ 上的单值反函数, 从而 $(\ln z)' = \dfrac{1}{z}$, $\ln z$ 在除负实轴和零处的区域解析.

也可以通过 C-R 方程来得到 $\ln z$ 的解析性和导数: 当 $x > 0$ 时,

$$\ln z = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + \mathrm{i}\arctan\frac{y}{x},$$

$$u_x = v_y = \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad v_x = -u_y = -\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$(\ln z)' = \frac{x-y\mathrm{i}}{x^2+y^2} = \frac{1}{z}.$$

其它情形可取虚部为 $\operatorname{arccot}\dfrac{x}{y}$ 或 $\operatorname{arccot}\dfrac{x}{y} - \pi$ 类似证明.

幂函数的性质: a 为整数时

定义.

(1) 设 $a \neq 0$, $z \neq 0$, 定义幂函数

$$w = z^a = \mathrm{e}^{a\,\mathrm{Ln}\,z} = \exp\big(a\ln|z| + \mathrm{i}a\,\mathrm{Arg}\,z\big), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(2) 幂函数的主值为

$$w = \mathrm{e}^{a\ln z} = \exp\big(a\ln|z| + \mathrm{i}a\arg z\big).$$

根据 a 的不同, 这个函数有着不同的性质.

当 a 为整数时, 辐角的选取不影响幂函数的取值, 所以 $w = z^a$ 是单值的. 此时 z^a 就是我们之前定义的乘幂.

当 a 是非负整数时, z^a 在复平面上解析; 当 a 是负整数时, z^a 在 $\mathbb{C} - \{0\}$ 上解析.

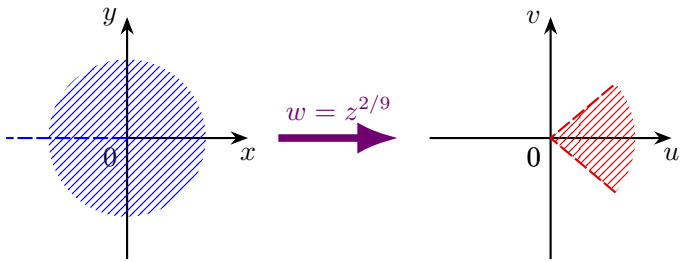
幂函数的性质：a 为分数时

当 $a=\dfrac{p}{q}$ 为分数, p,q 为互质的整数且 $q>1$ 时,

$$z^{\frac{p}{q}}=|z|^{\frac{p}{q}}\exp\left[\frac{\mathrm{i}p(\arg z+2k\pi)}{q}\right],\quad k=0,1,\ldots,q-1$$

具有 q 个值. 事实上它就是 $\sqrt[q]{z^p}=(\sqrt[q]{z})^p$.

去掉负实轴和 0 之后, 它的主值 $w=\exp(a\ln z)$ 是处处解析的.



对于其它的 a, z^a 具有无穷多个值. 因为此时当 $k \neq 0$ 时, $\mathrm{e}^{2k\pi a\mathrm{i}} \neq 1$. 从而不同的 k 得到的是不同的值. 去掉负实轴和 0 之后, 它的主值 $w = \exp(a \ln z)$ 也是处处解析的.

a	z^a 的值	z^a 的解析区域
整数 n	单值	$n \geqslant 0$ 时处处解析 $n < 0$ 时除零点外解析
分数 p/q	q 值	除负实轴和零点外解析
无理数或虚数	无穷多值	除负实轴和零点外解析

典型例题: 幂函数的计算

例. 求 $1^{\sqrt{2}}$ 和 i^{i}.

解.

$$1^{\sqrt{2}} = \mathrm{e}^{\sqrt{2}\,\mathrm{Ln}\,1} = \mathrm{e}^{\sqrt{2}\cdot 2k\pi\mathrm{i}} = \cos(2\sqrt{2}k\pi) + \mathrm{i}\sin(2\sqrt{2}k\pi), k \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathrm{i}^{\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Ln}\,\mathrm{i}} = \exp\left[\mathrm{i}\cdot\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi\mathrm{i}\right] = \exp\left(-2k\pi - \frac{1}{2}\pi\right), k \in \mathbb{Z}.$$

练习. 3^{i} 的辐角主值是 $\ln 3$.

幂函数与其主值有如下关系:

$$z^a = \mathrm{e}^{a\ln z}\cdot 1^a = \mathrm{e}^{a\ln z}\cdot \mathrm{e}^{2ak\pi \mathrm{i}},\quad k\in\mathbb{Z}.$$

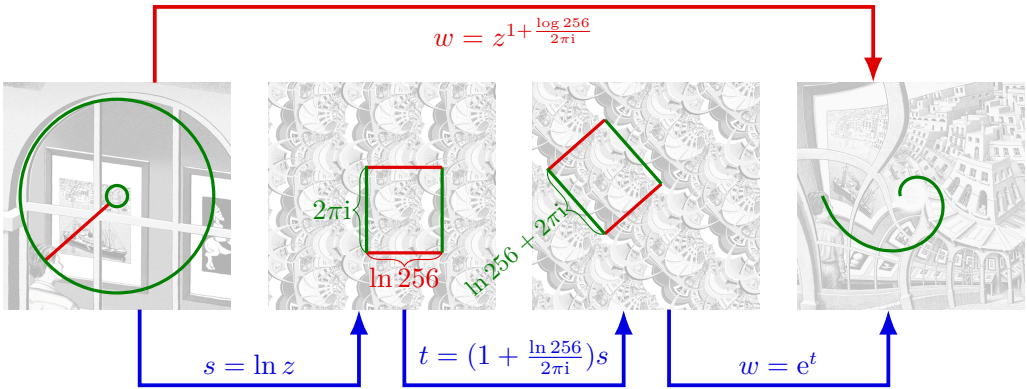
对于幂函数的主值,

$$(z^a)' = (\mathrm{e}^{a\ln z})' = \frac{a\mathrm{e}^{a\ln z}}{z} = az^{a-1}.$$

一般而言, $z^a\cdot z^b = z^{a+b}$ 和 $(z^a)^b = z^{ab}$ 都是不成立的.

最后, 注意 e^a 作为指数函数 $f(z)=\mathrm{e}^z$ 在 a 处的值和作为 $g(z)=z^a$ 在 e 处的值是**不同**的. 因为后者在 $a\notin\mathbb{Z}$ 时总是多值的. 前者实际上是后者的主值. 为避免混淆, 以后我们总**默认 e^a 表示指数函数 $\exp a$**.

幂函数的应用：埃舍尔的《画廊》



三角函数的定义

我们知道

$$\cos x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}, \quad \sin x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}$$

对于任意实数 x 成立, 我们将其推广到复数情形.

定义. 余弦和正弦函数

$$\cos z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}, \quad \sin z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}.$$

那么欧拉恒等式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i}\sin z$ **对任意复数** z **均成立**.

不难得到

$$\cos(\mathrm{i}y)=\frac{\mathrm{e}^{y}+\mathrm{e}^{-y}}{2},\qquad \sin(\mathrm{i}y)=\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{y}-\mathrm{e}^{-y}}{2}.$$

当 $y\to\infty$ 时, $\cos(\mathrm{i}y)$ 和 $\sin(\mathrm{i}y)$ 都 $\to\infty$. 因此 $\sin z$ 和 $\cos z$ 并不有界. 这和实变情形完全不同.

容易看出 $\cos z$ 和 $\sin z$ 的零点都是实数. 于是我们可类似定义其它三角函数

$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z},z\neq\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi,\qquad \cot z=\frac{\cos z}{\sin z},z\neq k\pi,$$

$$\sec z=\frac{1}{\cos z},z\neq\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi,\qquad \csc z=\frac{1}{\sin z},z\neq k\pi.$$

这些三角函数的奇偶性, 周期性和导数与实变情形类似,

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z,$$

且在定义域范围内是处处解析的.

三角函数的各种恒等式在复数情形也仍然成立, 例如

- $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$,
- $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$,
- $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

类似的, 我们可以定义双曲函数:

$$\operatorname{ch} z = \frac{\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}}{2} = \cos \mathrm{i}z,$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z}}{2} = -\mathrm{i} \sin \mathrm{i}z,$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z}}{\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}} = -\mathrm{i} \tan \mathrm{i}z, \quad z \neq \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi\mathrm{i}.$$

它们的奇偶性和导数与实变情形类似, 在定义域范围内是处处解析的.

$\operatorname{ch} z, \operatorname{sh} z$ 的周期是 $2\pi\mathrm{i}$, $\operatorname{th} z$ 的周期是 $\pi\mathrm{i}$.

设 $z = \cos w = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}w}}{2}$, 则

$$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}w} - 2z\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} + 1 = 0, \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}w} = z + \sqrt{z^2 - 1}\ (\text{双值}).$$

因此**反余弦函数**为

$$w = \operatorname{Arccos} z = -\mathrm{i}\operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

显然它是多值的. 同理, 我们有:

- **反正弦函数** $\operatorname{Arcsin} z = -\mathrm{i}\operatorname{Ln}(\mathrm{i}z + \sqrt{1 - z^2})$;
- **反正切函数** $\operatorname{Arctan} z = -\dfrac{\mathrm{i}}{2}\operatorname{Ln}\dfrac{1 + \mathrm{i}z}{1 - \mathrm{i}z}, z \neq \pm\mathrm{i}$;
- **反双曲余弦函数** $\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$;
- **反双曲正弦函数** $\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1})$;
- **反双曲正切函数** $\operatorname{Arth} z = \dfrac{1}{2}\operatorname{Ln}\dfrac{1 + z}{1 - z}, z \neq \pm 1$.

典型例题: 解三角函数方程

例. 解方程 $\sin z = 2$.

解. 由于 $\sin z = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} = 2$, 我们有

$$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} - 4\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - 1 = 0.$$

于是 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = (2 \pm \sqrt{3})\mathrm{i}$,

$$z = -\mathrm{i}\,\mathrm{Ln}\big[(2 \pm \sqrt{3})\mathrm{i}\big] = \Big(2k + \frac{1}{2}\Big)\pi \pm \mathrm{i}\ln(2 + \sqrt{3}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

另解. 由 $\sin z = 2$ 可知

$$\cos z = \sqrt{1-\sin^2 z} = \pm\sqrt{3}\mathrm{i}.$$

于是 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i}\sin z = (2 \pm \sqrt{3})\mathrm{i}$,

$$z = -\mathrm{i}\,\mathrm{Ln}\big[(2 \pm \sqrt{3})\mathrm{i}\big] = \Big(2k + \frac{1}{2}\Big)\pi \pm \mathrm{i}\ln(2+\sqrt{3}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

对于任意 z, 总存在 θ 使得

$$\begin{aligned}
\mathrm{Arcsin}\, z &= (2k + \frac{1}{2})\pi \pm \theta, \\
\mathrm{Arccos}\, z &= 2k\pi \pm \theta, \\
\mathrm{Arctan}\, z &= k\pi + \theta, \quad (z \neq \pm\mathrm{i}).
\end{aligned}$$

称分子次数小于分母次数的有理函数为**真分式**. 任何一个有理函数 $f(z)$ 都可以通过带余除法分解为一个多项式 $g(z)$ 和一个真分式之和.

若这个有理函数分母的零点均能求出, 则这个真分式又可以分拆为部分分式之和, 其中**部分分式**是指形如 $\dfrac{a}{(x-b)^k}$ 的真分式. 我们来介绍求这种分拆的一种方法.

例题: 有理函数分拆

例. 将 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)^2}$ 展开成部分分式之和.

解. 设 $f(z)=\dfrac{a}{z-1}+\dfrac{b}{z-2}+\dfrac{c}{(z-2)^2}$, 则

$$a=\lim_{z\to 1}(z-1)f(z)=\lim_{z\to 1}\frac{1}{(z-2)^2}=1,$$

$$b=\lim_{z\to 2}\big[(z-2)^2f(z)\big]'=\lim_{z\to 2}\Big(\frac{1}{z-1}\Big)'=-1,$$

$$c=\lim_{z\to 2}(z-2)^2f(z)=\lim_{z\to 2}\frac{1}{z-1}=1.$$

因此

$$f(z)=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z-2}+\frac{1}{(z-2)^2}.$$

得到这种分拆之后, 我们可以求出该有理函数的任意阶导数.

例. 计算 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 的 n 阶导数.

解. 设

$$f(z)=\frac{1}{1+z^2}=\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{1}{z+\mathrm{i}}-\frac{1}{z-\mathrm{i}}\right),$$

则它在除 $z=\pm\mathrm{i}$ 外处处解析, 且

$$f^{(n)}(z)=\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{1}{z+\mathrm{i}}-\frac{1}{z-\mathrm{i}}\right)^{(n)}=\frac{\mathrm{i}}{2}\cdot(-1)^n n!\left[\frac{1}{(z+\mathrm{i})^{n+1}}-\frac{1}{(z-\mathrm{i})^{n+1}}\right].$$

当 $z=x$ 为实数时,

$$|x+\mathrm{i}|=\sqrt{x^2+1},\qquad \arg(x+\mathrm{i})=\operatorname{arccot}x,$$

于是

$$\frac{1}{(x\pm\mathrm{i})^{n+1}}=(x^2+1)^{-\frac{n+1}{2}}\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}(n+1)\operatorname{arccot}x}.$$

因此

$$\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(n)}=(-1)^n n!(x^2+1)^{-\frac{n+1}{2}}\sin\big[(n+1)\operatorname{arccot}x\big].$$

我们还可以利用复对数函数来计算实有理函数的不定积分.

例. 计算 $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-1}\,\mathrm{d}x$.

解. 设 $\zeta = \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{3}} = \dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$, 那么我们有分拆

$$f(x) = \frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{x-1} + \frac{\zeta}{x-\zeta} + \frac{\zeta^2}{x-\zeta^2}\Big),$$

设

$$g(z) = \frac{1}{3}\big[\ln(z-1) + \zeta\ln(z-\zeta) + \zeta^2\ln(z-\zeta^2)\big].$$

$g(z)$ 在复平面去掉三条射线 $x+\zeta^k, x\leqslant 0$ 内的导数为 $f(z)$.

续解. 当 $z = x > 1$ 时,

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{3}\ln(x-1) + \frac{2}{3}\operatorname{Re}[\zeta \ln(x-\zeta)] \\ &= \frac{1}{3}\ln(x-1) + \frac{2}{3}\operatorname{Re}\left[\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\ln\Big(x - \frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\Big)\right] \\ &= \frac{1}{3}\ln(x-1) + \frac{2}{3}\operatorname{Re}\left[\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\Big(\ln\sqrt{x^2+x+1} - \mathrm{i}\operatorname{arccot}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big)\right] \\ &= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arccot}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

对于实数 $x < 1$, 可以验证上式的导数也等于 $f(x)$, 从而 $f(x)$ 的不定积分为 $g(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$.

第三章　复变函数的积分

1. 复变函数积分的概念
2. 柯西-古萨定理和复合闭路定理
3. 柯西积分公式
4. 解析函数与调和函数的关系

第一节　复变函数积分的概念

- 复变函数积分的定义
- 参变量法计算复变函数积分
- 长大不等式和大小圆弧引理

设 C 是平面上一条光滑或逐段光滑的连续曲线, 也就是说它的参数方程 $z = z(t), a \leqslant t \leqslant b$ 除去有限个点之外都有非零导数. 这里 $z'(t) = x'(t) + \mathrm{i}y'(t)$.

固定它的一个方向, 称为**正方向**, 则我们得到一条**有向曲线**. 和这条曲线方向相反的记作 C^-, 它的方向被称为该曲线**负方向**.

对于闭路, 它的**正方向总是指逆时针方向**, 负方向总是指顺时针方向. 以后我们不加说明的话**默认是正方向**.

复变函数积分: 线积分定义

所谓的复变函数积分, 本质上仍然是第二类曲线积分. 设复变函数

$$w = f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$$

定义在区域 D 内, 有向曲线 C 包含在 D 中. 形式地展开

$$f(z)\,\mathrm{d}z = (u + \mathrm{i}v)(\mathrm{d}x + \mathrm{i}\,\mathrm{d}y) = (u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y) + \mathrm{i}(u\,\mathrm{d}y + v\,\mathrm{d}x).$$

定义. 若下述右侧两个线积分均存在, 则定义

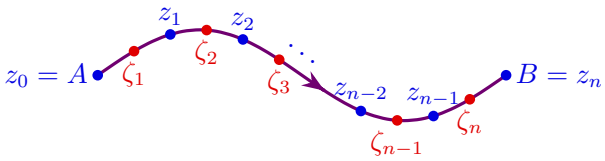
$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_C (u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y) + \mathrm{i}\int_C (v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y)$$

为 $f(z)$ 沿曲线 C 的积分.

当然, 我们也可以像线积分那样通过分割来定义. 在曲线 C 上依次选择分点 $z_0 = A, z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n = B$. 然后在每一段弧上任取 $\zeta_k \in \overset{\frown}{z_{k-1}z_k}$ 并作和式

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\,\Delta z_k, \quad \Delta z_k = z_k - z_{k-1}.$$

然后称 $n \to \infty$, 分割的最大弧长 $\to 0$ 时 S_n 的极限为复变函数积分. 这二者是等价的.



若 C 是闭路, 则该积分记为 $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z$. 此时该积分不依赖端点的选取.

若 C 是实轴上的区间 $[a,b]$ 且 $f(z)=u(x)$, 则

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=\int_a^b f(z)\,\mathrm{d}z=\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x$$

就是黎曼积分.

根据线积分的存在性条件可知:

定理. 若 $f(z)$ 在 D 内连续, C 是光滑曲线, 则 $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ 总存在.

线积分中诸如变量替换等技巧可以照搬过来使用. 设

$$C : z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t), \quad a \leqslant t \leqslant b$$

是一条光滑有向曲线, 且正方向为 t 增加的方向, 则 $\mathrm{d}z = z'(t)\,\mathrm{d}t = \big[x'(t) + \mathrm{i}y'(t)\big]\,\mathrm{d}t$.

积分计算方法 I: 参变量法.

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f\big[z(t)\big]z'(t)\,\mathrm{d}t.$$

若 C 的正方向是从 $z(b)$ 到 $z(a)$, 则需要交换右侧积分的上下限.

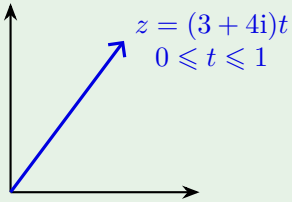
若 C 是逐段光滑的, 则相应的积分就是各段的积分之和. 以后我们只考虑逐段光滑曲线上的连续函数的积分.

典型例题: 计算复变函数沿曲线的积分

例. 求 $\int_C z\,\mathrm{d}z$, 其中 C 是从原点到点 $3+4\mathrm{i}$ 的直线段.

解. 由于 $z=(3+4\mathrm{i})t, 0\leqslant t\leqslant 1$, 因此

$$\begin{aligned}\int_C z\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 (3+4\mathrm{i})t\cdot(3+4\mathrm{i})\,\mathrm{d}t\\ &= (3+4\mathrm{i})^2\int_0^1 t\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}(3+4\mathrm{i})^2 = -\frac{7}{2}+12\mathrm{i}.\end{aligned}$$

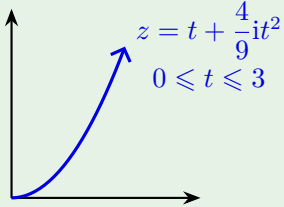


典型例题: 计算复变函数沿曲线的积分

例. 求 $\int_C z\,\mathrm{d}z$, 其中 C 是抛物线 $y=\frac{4}{9}x^2$ 上从原点到点 $3+4\mathrm{i}$ 的曲线段.

解. 由于 $z=t+\frac{4}{9}\mathrm{i}t^2, 0\leqslant t\leqslant 3$, 因此

$$\begin{aligned}\int_C z\,\mathrm{d}z &= \int_0^3 \left(t+\frac{4}{9}\mathrm{i}t^2\right)\cdot\left(1+\frac{8}{9}\mathrm{i}t\right)\mathrm{d}t\\ &= \int_0^3 \left(t+\frac{4}{3}\mathrm{i}t^2-\frac{32}{81}t^3\right)\mathrm{d}t\\ &= \left(\frac{1}{2}t^2+\frac{4}{9}\mathrm{i}t^3-\frac{8}{81}t^4\right)\Big|_0^3 = -\frac{7}{2}+12\mathrm{i}.\end{aligned}$$

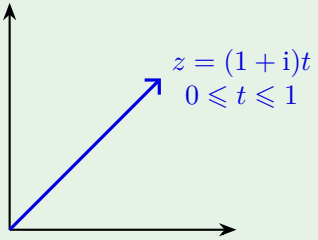


典型例题: 计算复变函数沿曲线的积分

例. 求 $\int_C \operatorname{Re} z \,\mathrm{d}z$, 其中 C 是从原点到点 $1+\mathrm{i}$ 的直线段.

解. 由于 $z=(1+\mathrm{i})t, 0 \leqslant t \leqslant 1$, 因此 $\operatorname{Re} z = t$,

$$\begin{aligned}\int_C \operatorname{Re} z \,\mathrm{d}z &= \int_0^1 t \cdot (1+\mathrm{i}) \,\mathrm{d}t \\ &= (1+\mathrm{i}) \int_0^1 t \,\mathrm{d}t = \frac{1+\mathrm{i}}{2}.\end{aligned}$$

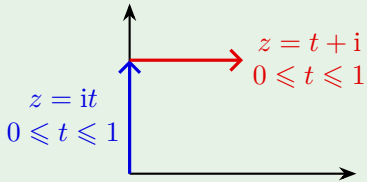


典型例题: 计算复变函数沿曲线的积分

例. 求 $\int_C \operatorname{Re} z \,\mathrm{d}z$, 其中 C 是从原点到点 i 再到 $1+\mathrm{i}$ 的折线段.

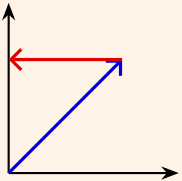
解. 第一段 $z = \mathrm{i}t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $\operatorname{Re} z = 0$, 第二段 $z = t + \mathrm{i}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $\operatorname{Re} z = t$. 因此

$$\int_C \operatorname{Re} z \,\mathrm{d}z = \int_0^1 t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$



可以看出，即便起点和终点相同，沿不同路径 $f(z)=\operatorname{Re} z$ 的积分也可能不同. 而 $f(z)=z$ 的积分则只和起点和终点位置有关，与路径无关. 原因在于 $f(z)=z$ 是处处解析的，我们会在下一节解释为何如此.

练习. 求 $\displaystyle\int_C \operatorname{Im} z\,\mathrm{d}z =$ $-\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2}$，其中 C 是从原点沿 $y=x$ 到点 $1+\mathrm{i}$ 再到 i 的折线段.



例题: 计算复变函数沿圆周的积分

例. 求 $\oint_{|z-z_0|=r} (z-z_0)^{n+1}\,\mathrm{d}z$, 其中 n 为整数.

解. $C:|z-z_0|=r$ 的参数方程为 $z=z_0+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$. 于是 $\mathrm{d}z=\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta$.

$$\oint_C (z-z_0)^n\,\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{i}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^{n+1}\,\mathrm{d}\theta=\mathrm{i}r^{n+1}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\mathrm{i}r^{n+1}\int_0^{2\pi}\Big[\cos\big((n+1)\theta\big)+\mathrm{i}\sin\big((n+1)\theta\big)\Big]\,\mathrm{d}\theta=\begin{cases}2\pi\mathrm{i}, & \text{若 } n=-1;\\ 0, & \text{若 } n\neq -1.\end{cases}$$

这个积分以后经常用到, 它的特点是积分值与圆周的圆心和半径都无关.

定理 (线性性质).

(1) $\displaystyle\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{C^-} f(z)\,\mathrm{d}z.$

(2) $\displaystyle\int_C kf(z)\,\mathrm{d}z = k\int_C f(z)\,\mathrm{d}z.$

(3) $\displaystyle\int_C [f(z)\pm g(z)]\,\mathrm{d}z = \int_C f(z)\,\mathrm{d}z \pm \int_C g(z)\,\mathrm{d}z.$

长大不等式. 设有向曲线 C 的长度为 L, $f(z)$ 在 C 上满足 $|f(z)| \leqslant M$, 则

$$\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \int_C |f(z)|\,\mathrm{d}s \leqslant ML.$$

证明. 对

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\,\Delta z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)\,\Delta z_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)|\,\Delta s_k \leqslant M \sum_{k=1}^{n} \Delta s_k$$

取极限即可. □

长大不等式常常用于证明等式: 估算一个积分和一个具体的数值之差不超过任意给定的 ε, 从而得到二者相等.

注意到: 若被积函数 $f(z)$ 在 C 上的点都连续, 那么 $|f(z)|$ 是 C 的参变量 $t \in [a,b]$ 的连续函数, 从而有界, 即存在 M 使得 $|f(z)| \leqslant M, \forall z \in C$.

小圆弧引理. 设函数 $f(z)$ 满足 $\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)=k$. 那么对于闭路

$$C_r: z=a+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\quad \theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2,$$

有

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r} f(z)\,\mathrm{d}z=\mathrm{i}k(\theta_2-\theta_1).$$

证明. 和前面的例题类似,

$$\int_{C_r} \frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} \cdot \mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{i}(\theta_2-\theta_1).$$

对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得当 $|z-a|<\delta$ 时, $\left|(z-a)f(z)-k\right| \leqslant \varepsilon$.当 $0<r<\delta$ 时,

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{C_r} f(z)\,\mathrm{d}z - \mathrm{i}k(\theta_2-\theta_1)\right| = \left|\int_{C_r}\left[f(z)-\frac{k}{z-a}\right]\mathrm{d}z\right| \\
=&\left|\int_{C_r} \frac{(z-a)f(z)-k}{z-a}\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{r}\cdot(\theta_2-\theta_1)r = (\theta_2-\theta_1)\varepsilon.
\end{aligned}$$

于是命题得证. □

特别地, 若 $C_r : |z-a| = r$, 则上述极限为 $2k\pi\mathrm{i}$.

类似地, 若 $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z) = k$, 则有大圆弧引理.

大圆弧引理. **设函数 $f(z)$ 满足 $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z) = k$. 那么对于闭路**

$$C_R : z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \quad \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2,$$

有

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \mathrm{i}k(\theta_2 - \theta_1).$$

上述结论中实际上只需要 $f(z)$ 在 $\theta_1 \leqslant \operatorname{Arg} z \leqslant \theta_2$ 范围内的极限满足相应条件即可. 此外, 实际应用中遇到的常常是 $k = 0$ 的情形.

第二节　柯西-古萨定理和复合闭路定理

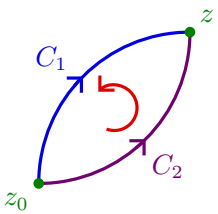
- 柯西-古萨定理
- 复合闭路定理和连续变形定理
- 原函数和不定积分

观察下方的两条曲线 C_1, C_2. 设 $C = C_1^- + C_2$. 可以看出

$$\int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z \iff \oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

所以 $f(z)$ 的积分只与起点终点有关 $\iff$ $f(z)$ 绕任意闭路的积分为零.

这里, 若闭合曲线 C 不是闭路 (有自相交的点), 也可以拆分为一些闭路的并.



上一节中我们计算了 $f(z)=z, \operatorname{Re} z, \dfrac{1}{z-z_0}$ 的积分. 其中

- $f(z)=z$ 处处解析, 积分只与起点终点有关 (闭路积分为零);
- $f(z)=\dfrac{1}{z-z_0}$ 有奇点 z_0, 沿绕 z_0 闭路的积分非零;
- $f(z)=\operatorname{Re} z$ 处处不解析, 积分与路径有关 (闭路积分可能非零).

由此可见函数沿闭路积分为零, 与函数在闭路内部是否解析有关.

设 C 是一条闭路, D 是其内部区域. 设 $f(z)$ 在闭区域 $\overline{D} = D \cup C$ 上解析, 即存在区域 $B \supseteq \overline{D}$ 使得 $f(z)$ 在 B 上解析.

为了简便假设 $f'(z)$ 连续, 则

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z &= \oint_C (u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y) + \mathrm{i}\oint_C (v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y) \\ &\xlongequal{\text{格林公式}} -\iint_D (v_x + u_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \mathrm{i}\iint_D (u_x - v_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &\xlongequal{\text{C-R 方程}} 0.\end{aligned}$$

也可以从

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_D \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\overline{z} = 0$$

看出.

柯西-古萨定理. 设 $f(z)$ 在闭路 C 上连续, C 内部解析, 则 $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

推论. 设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, C 是 D 内一条闭合曲线, 则 $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

这里的闭合曲线可以不是闭路.

例题: 柯西-古萨定理计算积分

例. 求 $\oint_{|z|=1} \dfrac{1}{2z-3}\,\mathrm{d}z$.

解. 由于 $\dfrac{1}{2z-3}$ 在 $|z| \leqslant 1$ 上解析, 因此由柯西-古萨定理

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{2z-3}\,\mathrm{d}z = 0.$$

练习.

(1) $\oint_{|z-2|=1} \dfrac{1}{z^2+z}\,\mathrm{d}z =$ 0 .

(2) $\oint_{|z|=2} \dfrac{\sin z}{|z|}\,\mathrm{d}z =$ 0 .

例题: 柯西-古萨定理计算积分

例. 求 $\oint_C \dfrac{1}{z(z^2+1)}\,\mathrm{d}z$, 其中 $C:|z-\mathrm{i}|=\dfrac{1}{2}$.

解. 注意到

$$\frac{1}{z(z^2+1)}=\frac{1}{z}-\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{z+\mathrm{i}}+\frac{1}{z-\mathrm{i}}\Big).$$

由于 $\dfrac{1}{z},\dfrac{1}{z+\mathrm{i}}$ 在 $|z-\mathrm{i}|\leqslant\dfrac{1}{2}$ 上解析, 因此由柯西-古萨定理

$$\oint_C \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z=\oint_C \frac{1}{z+\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z=0,$$

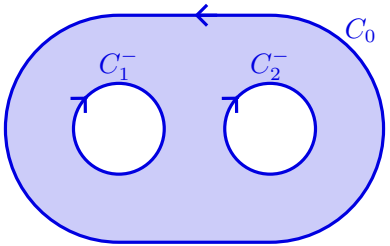
$$\oint_C \frac{1}{z(z^2+1)}\,\mathrm{d}z=-\frac{1}{2}\oint_C \frac{1}{z-\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z=-\pi\mathrm{i}.$$

复合闭路围成的区域

设 $C_0, C_1, \ldots, C_n$ 是 $n+1$ 条闭路, $C_1, \ldots, C_n$ 每一条都包含在其它闭路的外部, 而且它们都包含在 C_0 的内部. 这样它们围成了一个多连通区域 D, 它的边界称为一个**复合闭路**

$$C = C_0 + C_1^- + \cdots + C_n^-.$$

沿着 C 前进的点, D 总在它的左侧, 所以这就是它的正方向.



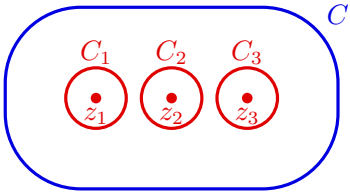
复合闭路定理. 设 $f(z)$ 在复合闭路 $C = C_0 + C_1^- + \cdots + C_n^-$ 及其所围成的多连通区域内解析, 则

$$\oint_{C_0} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \cdots + \oint_{C_n} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

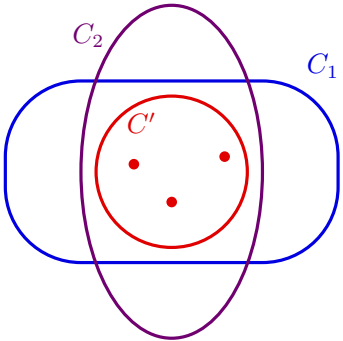
事实上, 复合闭路定理和柯西-古萨定理可以看成一个定理的两种情形: 设 C 是一个闭路或复合闭路, 若 $f(z)$ 在 C 及其围成的区域 (单连通或多连通) 内解析, 则

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

在实际应用中, 若被积函数 $f(z)$ 在 (复合) 闭路 C 的内部有有限多个奇点 $z_1, \ldots, z_k$. 那么我们可以在 C 内部 (围成的区域) 构造闭路 $C_1, \ldots, C_k$, 使得每个 C_j 内部只包含一个奇点 z_j. 这样, 内部含多个奇点的情形就可以化成内部只含一个奇点的情形. 最后将这些闭路上的积分相加即可.



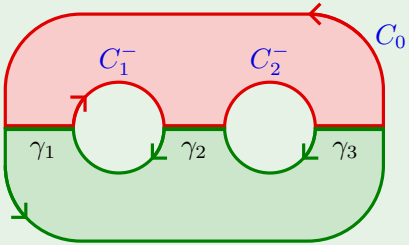
此外, 从复合闭路定理还可以看出, 在计算积分 $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z$ 时, C 的具体形状无关紧要, 只要其内部奇点不变, C 可以任意变形. 因为我们总可以选择一个包含这些奇点的闭路 C', 使得 C' 包含在 C 及其变形后的闭路内部. 这样它们的积分自然都和 C' 上的积分相同. 这里即使 C 是复合闭路也是可以自由变形的.



证明. 以曲线 $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n+1}$ 把 $C_0, C_1, \ldots, C_n$ 连接起来, 则它们把区域 D 分成了两个单连通区域 D_1, D_2. 对 D_1 和 D_2 的边界应用柯西-古萨定理并相加, 则 γ_{i} 对应的部分正好相互抵消, 因此

$$\oint_{C_0} f(z)\,\mathrm{d}z - \oint_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z - \cdots - \oint_{C_n} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

于是定理得证. □



例题: 复合闭路定理的应用

例. 证明对于任意闭路 C, $\oint_C (z-a)^n \,\mathrm{d}z = 0$, 其中 $n \neq -1$ 为整数, $a \notin C$.

证明.

(1) 若 a 不在 C 的内部, 则 $(z-a)^n$ 在 C 及其内部解析. 由柯西-古萨定理,

$$\oint_C (z-a)^n \,\mathrm{d}z = 0.$$

(2) 若 a 在 C 的内部, 则在 C 的内部取一个以 a 为圆心的圆周 C_1. 由复合闭路定理以及上一节的结论

$$\oint_C (z-a)^n \,\mathrm{d}z = \oint_{C_1} (z-a)^n \,\mathrm{d}z = 0.$$

□

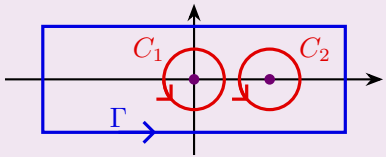
同理, 由复合闭路定理和上一节的结论可知当 a 在 C 的内部且 $n=-1$ 时积分为 $2\pi\mathrm{i}$.

定理. 当 a 在 C 的内部时,

$$\oint_C (z-a)^n \,\mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i}, & n=-1; \\ 0, & n\neq -1. \end{cases}$$

例题: 复合闭路定理的应用

例. 求 $\oint_\Gamma \dfrac{2z-1}{z^2-z}\,\mathrm{d}z$, 其中 Γ 是由 $2\pm\mathrm{i}, -2\pm\mathrm{i}$ 形成的矩形闭路.

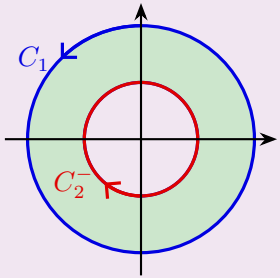


解. 函数 $\dfrac{2z-1}{z^2-z}$ 在 Γ 内有两个奇点 $z=0,1$. 设 C_1, C_2 如图所示, 由复合闭路定理

$$\begin{aligned}\oint_\Gamma \frac{2z-1}{z^2-z}\,\mathrm{d}z &= \oint_{C_1} \frac{2z-1}{z^2-z}\,\mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{2z-1}{z^2-z}\,\mathrm{d}z \\ &= \oint_{C_1} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z + \oint_{C_1} \frac{1}{z-1}\,\mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{1}{z-1}\,\mathrm{d}z \\ &= 2\pi\mathrm{i} + 0 + 0 + 2\pi\mathrm{i} = 4\pi\mathrm{i}.\end{aligned}$$

例题: 复合闭路定理的应用

例. 求 $\oint_\Gamma \dfrac{\mathrm{e}^z}{z}\,\mathrm{d}z$, 其中 $\Gamma = C_1 + C_2^-$, $C_1 : |z| = 2, C_2 : |z| = 1$.



解. 函数 $\dfrac{\mathrm{e}^z}{z}$ 在 C_1, C_2 围城的圆环域内解析. 由复合闭路定理可知 $\oint_\Gamma \dfrac{\mathrm{e}^z}{z}\,\mathrm{d}z = 0.$

例题: 有理函数绕闭路积分

例. 设 $f(z)=\dfrac{p(z)}{q(z)}$ 是一个有理函数, 其中 p,q 的次数分别是 m,n. 证明: 若 $f(z)$ 的所有奇点都在闭路 C 的内部, 则

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z=\begin{cases}0, & \text{若 } n-m\geqslant 2,\\ 2\pi\mathrm{i}a/b, & \text{若 } n-m=1,\end{cases}$$

其中 a,b 分别是 $p(z),q(z)$ 的最高次项系数.

证明. 设 $C_R : |z| = R$. 注意到

$$\lim_{z\to\infty} zf(z) = \begin{cases} 0, & \text{若 } n-m \geqslant 2, \\ a/b, & \text{若 } n-m = 1, \end{cases}$$

于是由大圆弧引理可知

$$\lim_{R\to+\infty} \oint_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \begin{cases} 0, & \text{若 } n-m \geqslant 2, \\ 2\pi \mathrm{i} a/b, & \text{若 } n-m = 1. \end{cases}$$

由连续变形定理可知, 当 R 充分大使得 $f(z)$ 的所有奇点都在 C_R 的内部时,

$$\oint_{C} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z$$

恒成立, 由此命题得证. □

注意闭路 C 内部必须包含 $f(z)$ 的所有奇点上述结论方可成立. 若 $m \geqslant n$, 则我们可将 $f(z)$ 写成一个多项式和上述形式有理函数之和.

练习. $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{z^2}{(2z+1)(z^2+1)}\,\mathrm{d}z = \underline{\quad \pi\mathrm{i} \quad}$.

设有向曲线 $C: z = z(t), a \leqslant t \leqslant b$ 起于 $z_1 = z(a)$ 终于 $z_2 = z(b)$. 若存在 C 上的解析函数 $F(z)$ 使得 $F'(z) = f(z)$, 则

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_a^b f\big[z(t)\big]z'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= F\big[z(t)\big]\Big|_a^b = F(z_2) - F(z_1).\end{aligned}$$

这就是牛顿-莱布尼兹公式. 我们把 $F(z)$ 称为 $f(z)$ 的一个原函数. 特别地, 若 C 是闭路, 则 $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

例如对于整数 $n \neq 0$, 当 a 在闭路 C 的内部时,

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^{n+1}}$$

在 C 上有原函数 $F(z) = -\dfrac{1}{n(z-a)^n}$. 从而 $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$. 于是我们再次证明了该积分结论的 $n \neq 0$ 情形.

但需要注意 $\dfrac{1}{z-a}$ 在 C 上并没有原函数, 因为 $\ln(z-a)$ 在 C 上有奇点.

原函数的存在性

不过, 不同于单变量实函数的情形, 并不是所有的连续函数都有原函数.

设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, C 是 D 内一条起于 z_0 终于 z 的曲线. 由柯西-古萨定理可知, 积分 $\int_C f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$ 与路径无关, 只与 z_0, z 有关. 因此我们也将其记为 $\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$.

定理. 固定 $z_0 \in D$, 则函数

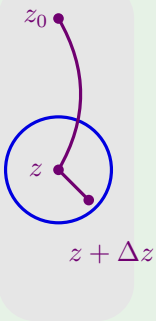
$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta.$$

是 D 内的解析函数, 且 $F'(z) = f(z)$.

由此可知, 单连通区域上的解析函数总有原函数.

证明. 以 z 为中心作一包含在 D 内的圆 K, 取 $|\Delta z|$ 小于 K 的半径. 那么

$$\begin{aligned} F(z+\Delta z)-F(z) &= \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta - \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \\ &= \int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta. \end{aligned}$$



容易知道

$$\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)\,\mathrm{d}\zeta = f(z)\int_{z}^{z+\Delta z}\mathrm{d}\zeta = f(z)\,\Delta z.$$

我们需要比较上述两个积分, 其中 z 到 $z+\Delta z$ 取直线.

由于 $f(z)$ 解析, 因此连续. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得当 $|\zeta - z| < \delta$ 时, z 落在 K 中且 $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$. 当 $|\Delta z| < \delta$ 时, 由长大不等式

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| &= \left|\int_z^{z+\Delta z} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\Delta z}\,\mathrm{d}\zeta\right| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{|\Delta z|}\cdot|\Delta z| = \varepsilon.\end{aligned}$$

由于 ε 是任意的, 因此

$$f(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} = F'(z). \qquad \square$$

积分计算方法 II: 原函数法. 设 $f(z)$ 在单连通区域 D 上解析, z_1 至 z_2 的积分路径落在 D 内, 则

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,\mathrm{d}z = F(z)\Big|_{z_1}^{z_2} = F(z_2) - F(z_1),$$

其中 $F(z)$ 是 $f(z)$ 的一个原函数.

由于导函数为 0 的函数只能是常值函数, 因此

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,\mathrm{d}z + C.$$

我们称之为 $f(z)$ 的不定积分, 记为 $\int f(z)\,\mathrm{d}z$.

复变函数和实变函数的牛顿-莱布尼兹定理的差异在哪呢? 复变情形要求是单连通区域上解析函数, 实变情形要求是闭区间上连续函数.

典型例题: 利用原函数求积分

例. 求 $\int_{z_0}^{z_1} z\,\mathrm{d}z$.

解. 由于 $f(z)=z$ 处处解析, 且 $\int z\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2}z^2+C$, 因此

$$\int_{z_0}^{z_1} z\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2}z^2\Big|_{z_0}^{z_1}=\frac{1}{2}(z_1^2-z_0^2).$$

因此之前的例子中 $\int_0^{3+4\mathrm{i}} z\,\mathrm{d}z=-\frac{7}{2}+12\mathrm{i}$, 无论从 0 到 $3+4\mathrm{i}$ 的路径如何.

典型例题: 利用原函数求积分

例. 求 $\displaystyle\int_0^{\pi \mathrm{i}} z\cos z^2\,\mathrm{d}z.$

解. 由于 $f(z)=z\cos z^2$ 处处解析, 且

$$\int z\cos z^2\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\int \cos z^2\,\mathrm{d}z^2=\frac{1}{2}\sin z^2+C,$$

因此

$$\int_0^{\pi \mathrm{i}} z\cos z^2\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\sin z^2\Big|_0^{\pi \mathrm{i}}=-\frac{1}{2}\sin \pi^2.$$

这里我们使用了凑微分法.

典型例题: 利用原函数求积分

例. 求 $\displaystyle\int_0^{\mathrm{i}} z\cos z\,\mathrm{d}z.$

解. 由于 $f(z)=z\cos z$ 处处解析, 且

$$\int z\cos z\,\mathrm{d}z=\int z\,\mathrm{d}(\sin z)=z\sin z-\int\sin z\,\mathrm{d}z=z\sin z+\cos z+C,$$

因此

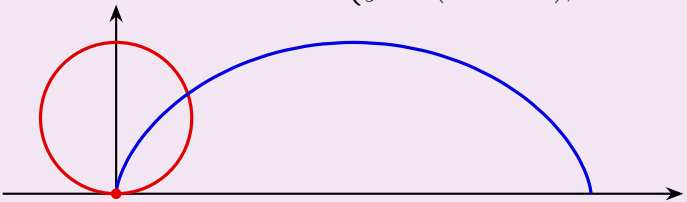
$$\int_0^{\mathrm{i}} z\cos z\,\mathrm{d}z=(z\sin z+\cos z)\Big|_0^{\mathrm{i}}=\mathrm{i}\sin\mathrm{i}+\cos\mathrm{i}-1=\mathrm{e}^{-1}-1.$$

这里我们使用了分部积分法.

练习. 求 $\displaystyle\int_0^1 z\sin z\,\mathrm{d}z=$ $\sin 1-\cos 1$.

典型例题: 利用原函数求积分

例. 求 $\int_C (2z^2+8z+1)\,\mathrm{d}z$, 其中 C 是摆线 $\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta), \\ y = a(1-\cos\theta), \end{cases} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$



解. 由于 $f(z) = 2z^2+8z+1$ 处处解析, 因此

$$\begin{aligned} \text{原积分} &= \int_0^{2\pi a} (2z^2+8z+1)\,\mathrm{d}z \\ &= \left(\frac{2}{3}z^3 + 4z^2 + z\right)\Big|_0^{2\pi a} = \frac{16}{3}\pi^3 a^3 + 16\pi^2 a^2 + 2\pi a. \end{aligned}$$

典型例题: 利用原函数求积分

例. 设 C 为沿着 $|z|=1$ 从 1 到 i 的逆时针圆弧, 求 $\displaystyle\int_C \frac{\ln(z+1)}{z+1}\,\mathrm{d}z$.

解. 函数 $f(z)=\dfrac{\ln(z+1)}{z+1}$ 在单连通区域 $\operatorname{Re} z>-1$ 内解析.

$$\int \frac{\ln(z+1)}{z+1}\,\mathrm{d}z=\int \ln(z+1)\,\mathrm{d}\big[\ln(z+1)\big]=\frac{1}{2}\ln^2(z+1)+C.$$

因此

$$\begin{aligned}\int_C \frac{\ln(z+1)}{z+1}\,\mathrm{d}z&=\frac{1}{2}\ln^2(z+1)\Big|_1^{\mathrm{i}}=\frac{1}{2}\Big[\ln^2(1+\mathrm{i})-\ln^2 2\Big]\\&=\frac{1}{2}\left[\Big(\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}\mathrm{i}\Big)^2-\ln^2 2\right]=-\frac{\pi^2}{32}-\frac{3}{8}\ln^2 2+\frac{\pi\ln 2}{8}\mathrm{i}.\end{aligned}$$

第三节　柯西积分公式

- 柯西积分公式
- 高阶导数的柯西积分公式

柯西-古萨定理是解析函数理论的基础, 但在很多情形下它由柯西积分公式表现.

柯西积分公式. 设

- 函数 $f(z)$ 在闭路 C 及其内部 D 解析,
- $z_0 \in D$,

则

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z.$$

若 $z_0 \notin \overline{D}$, 由柯西-古萨定理, 右侧的积分是 0.

解析函数可以用一个积分

$$f(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta,\quad z\in D$$

来表示, 这是研究解析函数理论的强有力工具.

解析函数在闭路 C 内部的取值完全由它在 C 上的值所确定. 这也是解析函数的特征之一. 特别地, 解析函数在圆心处的值等于它在圆周上的平均值. 设 $z=z_0+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 则 $\mathrm{d}z=\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta$,

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\theta.$$

证明. 由连续性可知, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得当 $|z - z_0| \leqslant \delta$ 时, $z \in D$ 且 $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. 设 $\Gamma : |z - z_0| = \delta$, 则

$$\begin{aligned}\left|\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z - 2\pi \mathrm{i} f(z_0)\right| &\xlongequal{\text{复合闭路定理}} \left|\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z - 2\pi \mathrm{i} f(z_0)\right| \\ &= \left|\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z - \oint_\Gamma \frac{f(z_0)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z\right| \\ &= \left|\oint_\Gamma \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{\delta} \cdot 2\pi\delta = 2\pi\varepsilon.\end{aligned}$$

由 ε 的任意性可知

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} f(z_0).$$

□

典型例题：柯西积分公式的应用

可以看出，当被积函数分子解析而分母形如 $z - z_0$ 时，绕闭路的积分可以使用柯西积分公式计算.

例. 求 $\oint_{|z|=4} \dfrac{\sin z}{z}\,\mathrm{d}z$.

解. 函数 $\sin z$ 处处解析. 取 $f(z) = \sin z, z_0 = 0$ 并应用柯西积分公式得

$$\oint_{|z|=4} \frac{\sin z}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sin z|_{z=0} = 0.$$

典型例题: 柯西积分公式的应用

例. 求 $\oint_{|z|=2} \dfrac{\mathrm{e}^z}{z-1}\,\mathrm{d}z$.

解. 由于函数 e^z 处处解析, 取 $f(z)=\mathrm{e}^z, z_0=1$ 并应用柯西积分公式得

$$\oint_{|z|=2} \frac{\mathrm{e}^z}{z-1}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^z|_{z=1} = 2\pi\mathrm{e}\mathrm{i}.$$

练习. 求 $\oint_{|z|=2\pi} \dfrac{\cos z}{z-\pi}\,\mathrm{d}z =$ $\underline{-2\pi\mathrm{i}}$.

典型例题: 柯西积分公式的应用

例. 设 $f(z)=\oint_{|\zeta|=\sqrt{3}}\dfrac{3\zeta^2+7\zeta+1}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta$, 求 $f'(1+\mathrm{i})$.

解. 当 $|z|<\sqrt{3}$ 时, 由柯西积分公式得

$$f(z)=\oint_{|\zeta|=\sqrt{3}}\frac{3\zeta^2+7\zeta+1}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta=2\pi\mathrm{i}(3\zeta^2+7\zeta+1)|_{\zeta=z}=2\pi\mathrm{i}(3z^2+7z+1).$$

因此 $f'(z)=2\pi\mathrm{i}(6z+7)$,

$$f'(1+\mathrm{i})=2\pi\mathrm{i}(13+6\mathrm{i})=-12\pi+26\pi\mathrm{i}.$$

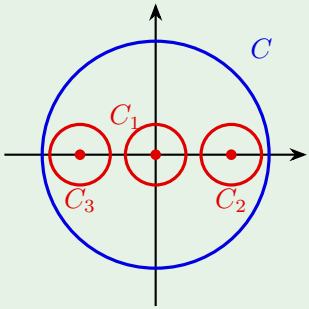
注意当 $|z|>\sqrt{3}$ 时, $f(z)\equiv 0$.

典型例题: 柯西积分公式的应用

例. 求 $\displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{\mathrm{e}^z}{z(z^2-1)}\,\mathrm{d}z$.

解. 被积函数的奇点为 $0, \pm 1$. 设 C_1, C_2, C_3 分别为绕 0, 1, -1 的分离圆周. 由复合闭路定理和柯西积分公式

$$\begin{aligned}
&\oint_{|z|=3} \frac{\mathrm{e}^z}{z(z^2-1)}\,\mathrm{d}z = \oint_{C_1+C_2+C_3} \frac{\mathrm{e}^z}{z(z^2-1)}\,\mathrm{d}z \\
&= 2\pi\mathrm{i}\left[\frac{\mathrm{e}^z}{z^2-1}\Big|_{z=0} + \frac{\mathrm{e}^z}{z(z+1)}\Big|_{z=1} + \frac{\mathrm{e}^z}{z(z-1)}\Big|_{z=-1}\right] \\
&= 2\pi\mathrm{i}\left(-1 + \frac{\mathrm{e}}{2} + \frac{\mathrm{e}^{-1}}{2}\right) = \pi\mathrm{i}(\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1} - 2).
\end{aligned}$$



高阶导数的柯西积分公式

解析函数可以由它的积分所表示. 不仅如此, 通过积分表示, 还可以说明解析函数是任意阶可导的.

柯西积分公式. 设函数 $f(z)$ 在闭路 C 及其内部 D 解析, 则对任意 $z_0 \in D$,

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \,\mathrm{d}z.$$

假如 $f(z)$ 有泰勒展开

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n + \cdots$$

那么由 $\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^n}$ 的性质可知上述公式右侧应当为 $f^{(n)}(z_0)$.

证明. 先证明 $n=1$ 的情形. 不妨设 $C:|z-z_0|=\delta$. 由柯西积分公式,

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z,\quad f(z_0+h)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0-h}\,\mathrm{d}z.$$

两式相减得到

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)(z-z_0-h)}\,\mathrm{d}z.$$

当 $h\to 0$ 时, 左边的极限是 $f'(z_0)$. 因此我们只需要证明右边的极限等于

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,\mathrm{d}z.$$

$$\text{二者之差} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{hf(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)}\,\mathrm{d}z.$$

由于 $f(z)$ 在 C 上连续, 故存在 M 使得 $|f(z)| \leqslant M$. 注意到 $z \in C$ 时, $|z-z_0| = \delta$, $|z-z_0-h| \geqslant \delta - |h|$. 由长大不等式,

$$\left| \oint_C \frac{hf(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)}\,\mathrm{d}z \right| \leqslant \frac{M|h|}{\delta^2(\delta-|h|)} \cdot L,$$

其中 L 是闭路 C 的长度. 当 $h \to 0$ 时, 它的极限为 0, 因此 $n=1$ 情形得证.

对于一般的 n, 我们通过归纳法将 $f^{(n)}(z_0)$ 和 $f^{(n)}(z_0+h)$ 表达为积分形式. 比较 $\dfrac{f^{(n)}(z_0+h)-f^{(n)}(z_0)}{h}$ 与积分公式右侧之差, 并利用长大不等式证明 $h \to 0$ 时, 差趋于零. 具体过程见教材. □

典型例题：使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

柯西积分公式不是用来计算高阶导数的，而是用高阶导数来计算积分的.

例. 求 $\oint_{|z|=2} \dfrac{\cos(\pi z)}{(z-1)^5}\,\mathrm{d}z$.

解. 由于 $\cos(\pi z)$ 处处解析，因此由柯西积分公式，

$$\oint_{|z|=2} \frac{\cos(\pi z)}{(z-1)^5}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi\mathrm{i}}{4!}\cos(\pi z)^{(4)}\big|_{z=1} = \frac{2\pi\mathrm{i}}{24}\cdot\pi^4\cos\pi = -\frac{\pi^5\mathrm{i}}{12}.$$

典型例题: 使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

例. 求 $\oint_{|z|=2} \dfrac{\mathrm{e}^z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z$.

解. 被积函数在 $|z|<2$ 的奇点为 $z=\pm\mathrm{i}$. 取 C_1, C_2 为以 $\mathrm{i}, -\mathrm{i}$ 为圆心的分离圆周.

$$\oint_{C_1} \frac{\mathrm{e}^z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi\mathrm{i}}{1}\left[\frac{\mathrm{e}^z}{(z+\mathrm{i})^2}\right]'\Big|_{z=\mathrm{i}} = 2\pi\mathrm{i}\left[\frac{\mathrm{e}^z}{(z+\mathrm{i})^2} - \frac{2\mathrm{e}^z}{(z+\mathrm{i})^3}\right]\Big|_{z=\mathrm{i}} = \frac{(1-\mathrm{i})\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\pi}{2}.$$

类似地, $\oint_{C_2} \dfrac{\mathrm{e}^z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z = \dfrac{-(1+\mathrm{i})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}}\pi}{2}$. 故

$$\begin{aligned}\oint_{|z|=2} \frac{\mathrm{e}^z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z &= \left(\oint_{C_1} + \oint_{C_2}\right)\frac{\mathrm{e}^z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{(1-\mathrm{i})\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\pi}{2} + \frac{-(1+\mathrm{i})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}}\pi}{2} = \pi\mathrm{i}(\sin 1 - \cos 1).\end{aligned}$$

典型例题: 使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

例. 求 $\oint_{|z|=1} z^n \mathrm{e}^z \,\mathrm{d}z$, 其中 n 是整数.

解.

(1) 当 $n \geqslant 0$ 时, $z^n \mathrm{e}^z$ 处处解析. 由柯西-古萨定理,

$$\oint_{|z|=1} z^n \mathrm{e}^z \,\mathrm{d}z = 0.$$

(2) 当 $n \leqslant -1$ 时, e^z 处处解析. 由柯西积分公式,

$$\oint_{|z|=1} z^n \mathrm{e}^z \,\mathrm{d}z = \frac{2\pi\mathrm{i}}{(-n-1)!} (\mathrm{e}^z)^{(-n-1)}\big|_{z=0} = \frac{2\pi\mathrm{i}}{(-n-1)!}.$$

典型例题: 使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

例. 求 $\oint_{|z-3|=2} \dfrac{1}{(z-2)^2 z^3}\,\mathrm{d}z$ 和 $\oint_{|z-1|=3} \dfrac{1}{(z-2)^2 z^3}\,\mathrm{d}z$.

解.

(1) $\dfrac{1}{(z-2)^2 z^3}$ 在 $|z-3|<2$ 的奇点为 $z=2$. 由柯西积分公式,

$$\oint_{|z-3|=2} \frac{1}{(z-2)^2 z^3}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi\mathrm{i}}{1!}\Big(\frac{1}{z^3}\Big)'\Big|_{z=2} = -\frac{3\pi\mathrm{i}}{8}.$$

(2) $\dfrac{1}{(z-2)^2 z^3}$ 在 $|z-1|<3$ 的奇点为 $z=0,2$. 取 C_1, C_2 为以 $0,2$ 为圆心的分离圆周.

$$\oint_{|z-1|=3} \frac{1}{(z-2)^2 z^3}\,\mathrm{d}z = \oint_{C_1} \frac{1}{(z-2)^2 z^3}\,\mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{1}{(z-2)^2 z^3}\,\mathrm{d}z$$

$$= \frac{2\pi\mathrm{i}}{2!}\Big[\frac{1}{(z-2)^2}\Big]''\Big|_{z=0} + \frac{2\pi\mathrm{i}}{1!}\Big(\frac{1}{z^3}\Big)'\Big|_{z=2} = 0.$$

练习. $\oint_{|z-2\mathrm{i}|=3} \dfrac{1}{z^2(z-\mathrm{i})}\,\mathrm{d}z = \underline{\quad 0 \quad}$.

例 (莫累拉定理). 设 $f(z)$ 在区域 D 内连续, 且对于 D 中任意闭路 C 都有 $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$, 则 $f(z)$ 在 D 内解析.

证明. 由题设可知 $f(z)$ 的积分与路径无关. 固定 $z_0 \in D$, 则

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,\mathrm{d}z$$

定义了 D 内的一个函数. 类似于原函数的证明可知 $F'(z) = f(z)$. 故 $f(z)$ 作为解析函数 $F(z)$ 的导数也是解析的. □

高阶柯西积分公式说明解析函数的导数与实函数的导数有何不同? 高阶柯西积分公式说明, 函数 $f(z)$ 只要在区域 D 中处处可导, 它就一定无限次可导, 并且各阶导数仍然在 D 中解析. **这一点与实变量函数有本质的区别.**

同时我们也可以看出, 若一个二元实函数 $u(x,y)$ 是一个解析函数的实部, 则 u 存在各阶连续偏导数. 这便引出了调和函数的概念.

第四节　解析函数与调和函数的关系

- 调和函数
- 共轭调和函数

调和函数是一类重要的二元实变函数, 它和解析函数有着紧密的联系. 为了简便, 我们用 u_{xx}, u_{yy} 来表示二阶偏导数.

定义. 若二元实变函数 $u(x,y)$ 在区域 D 内有二阶连续偏导数, 且满足拉普拉斯方程

$$\Delta u := u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

则称 $u(x,y)$ 是 D 内的调和函数.

定理. 区域 D 内解析函数 $f(z)$ 的实部和虚部都是调和函数.

证明. 设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$, 则 u,v 存在偏导数且

$$f'(z)=u_x+\mathrm{i}v_x=v_y-\mathrm{i}u_y.$$

由于 $f(z)$ 任意阶可导, 因此 u,v 存在任意阶偏导数. 由 C-R 方程 $u_x=v_y, u_y=-v_x$ 可知

$$\Delta u=u_{xx}+u_{yy}=v_{yx}-v_{xy}=0,$$

$$\Delta v=v_{xx}+v_{yy}=-u_{yx}+u_{xy}=0.$$

□

解析函数与调和函数的联系

反过来, 调和函数是否一定是某个解析函数的实部或虚部呢? 对于单连通的情形, 答案是肯定的.

若 $u+\mathrm{i}v$ 是区域 D 内的解析函数, 则我们称 v 是 u 的**共轭调和函数**. 换言之 $u_x=v_y, u_y=-v_x$. 显然 $-u$ 是 v 的共轭调和函数.

定理. **设 $u(x,y)$ 是单连通区域 D 内的调和函数, 则线积分**

$$v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}(-u_y\,\mathrm{d}x+u_x\,\mathrm{d}y)+C$$

是 u 的共轭调和函数.

由此可知, 区域 D 上的调和函数在 $z\in D$ 的一个邻域内是一解析函数的实部, 从而在该邻域内具有任意阶连续偏导数. 而 z 的任取的, 因此**调和函数总具有任意阶连续偏导数**.

若 D 是多连通区域, 则未必存在共轭调和函数. 例如 $\ln(x^2+y^2)$ 是复平面去掉原点上的调和函数, 但它并不是某个解析函数的实部. 事实上, 它是 $2\operatorname{Ln} z$ 的实部.

在实际计算中, 我们一般不用线积分来得到共轭调和函数, 而是采用下述两种办法:

偏积分法. 通过 $v_y = u_x$ 解得 $v = \varphi(x,y) + \psi(x)$, 其中 $\psi(x)$ 待定. 再代入 $u_y = -v_x$ 中解出 $\psi(x)$.

不定积分法. 对 $f'(z) = u_x - \mathrm{i}u_y = v_y + \mathrm{i}v_x$ 求不定积分得到 $f(z)$.

典型例题：求共轭调和函数和相应的解析函数

例. 证明 $u(x,y)=y^3-3x^2y$ 是调和函数，并求其共轭调和函数以及由它们构成的解析函数.

解. 由 $u_x=-6xy, u_y=3y^2-3x^2$ 可知

$$u_{xx}+u_{yy}=-6y+6y=0,$$

故 u 是调和函数.

由 $v_y=u_x=-6xy$ 得 $v=-3xy^2+\psi(x)$.

由 $v_x=-u_y=3x^2-3y^2$ 得 $\psi'(x)=3x^2$, $\psi(x)=x^3+C$.

故 $v(x,y)=-3xy^2+x^3+C$,

$$\begin{aligned} f(z)&=u+\mathrm{i}v=y^3-3x^2y+\mathrm{i}(-3xy^2+x^3+C)\\ &=\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)^3+\mathrm{i}C=\mathrm{i}(z^3+C), C\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

典型例题：求共轭调和函数和相应的解析函数

当解析函数 $f(z)$ 是 x, y 的多项式形式时, $f(z)$ 本身一定是 z 的多项式. 于是将 x 全部换成 z, y 全部换成 0 就是 $f(z)$. 即使 $f(z)$ 不是 x, y 的多项式形式, 这种替换方式很多时候也奏效.

在上例中我们也可由另一种方法计算得到:

$$f'(z) = u_x - \mathrm{i}u_y = -6xy - \mathrm{i}(3y^2 - 3x^2) = 3\mathrm{i}z^2.$$

因此 $f(z) = \mathrm{i}z^3 + C$.

典型例题：求共轭调和函数和相应的解析函数

例. 求解析函数 $f(z)$ 使得它的虚部为

$$v(x,y)=\mathrm{e}^x(y\cos y+x\sin y)+x+y.$$

解. 由 $u_x=v_y=\mathrm{e}^x(\cos y-y\sin y+x\cos y)+1$ 得

$$u=\mathrm{e}^x(x\cos y-y\sin y)+x+\psi(y).$$

由 $u_y=-v_x=-\mathrm{e}^x(y\cos y+x\sin y+\sin y)-1$ 得

$$\psi'(y)=-1,\quad \psi(y)=-y+C.$$

故

$$\begin{aligned}f(z)&=u+\mathrm{i}v\\&=\mathrm{e}^x(x\cos y-y\sin y)+x-y+C+\mathrm{i}\big[\mathrm{e}^x(y\cos y+x\sin y)+x+y\big]\\&=z\mathrm{e}^z+(1+\mathrm{i})z+C,\quad C\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

也可由

$$\begin{aligned} f'(z) &= v_y + \mathrm{i}v_x \\ &= \mathrm{e}^x(\cos y - y\sin y + x\cos y) + 1 + \mathrm{i}\big[\mathrm{e}^x(y\cos y + x\sin y + \sin y) + 1\big] \\ &= (z+1)\mathrm{e}^z + 1 + \mathrm{i}. \end{aligned}$$

得 $f(z) = z\mathrm{e}^z + (1+\mathrm{i})z + C$.

练习. 证明 $u(x,y) = x^3 - 6x^2y - 3xy^2 + 2y^3$ 是调和函数并求它的共轭调和函数.

答案. $v(x,y) = 2x^3 + 3x^2y - 6xy^2 - y^3 + C$.

显然 $u + \mathrm{i}v = (1+2\mathrm{i})z^3 + \mathrm{i}C$.

第四章　级数

1. 复数项级数
2. 幂级数
3. 泰勒级数
4. 洛朗级数
5. 孤立奇点

第一节　复数项级数

- 复数项级数及其敛散性
- 判别法

复数域上的级数与实数域上的级数并无本质差别.

定义.

(1) 设 $\{z_n\}_{n\geqslant 1}$ 是复数列. 表达式 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 称为复数项无穷级数.

(2) 称 $s_n := z_1 + z_2 + \cdots + z_n$ 为该级数的部分和.

(3) 若部分和数列 $\{s_n\}_{n\geqslant 1}$ 极限存在, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛, 并记 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ 为它的和.

否则称该级数发散.

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = A$ 收敛, 则 $z_n = s_n - s_{n-1} \to A - A = 0$. 因此 $z_n \to 0$ 是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛的必要条件.

复数项级数敛散性的判定

定理. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = a + b\mathrm{i}$ **当且仅当** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = a, \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n = b.$

证明. 设部分和

$$\sigma_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \quad \tau_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n.$$

则

$$s_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n = \sigma_n + \mathrm{i}\tau_n.$$

由复数列的敛散性判定条件可知

$$\lim_{n\to\infty} s_n = a + b\mathrm{i} \iff \lim_{n\to\infty} \sigma_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} \tau_n = b.$$

于是命题得证. □

定理. 若实数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|z_n|$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}z_n$ 也收敛，且 $\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty}z_n\right|\leqslant\sum\limits_{n=1}^{\infty}|z_n|$.

证明. 因为 $|x_n|,|y_n|\leqslant|z_n|$，由比较判别法可知实数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$ 绝对收敛，从而收敛. 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}z_n$ 也收敛.

由三角不等式可知 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}z_k\right|\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}|z_k|$. 两边同时取极限即得级数的不等式关系

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}z_n\right|=\left|\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}z_k\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=1}^{n}z_k\right|\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|z_k|=\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|,$$

其中第二个等式是因为绝对值函数 $|z|$ 连续. □

绝对收敛和条件收敛

定义. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ 收敛, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty}z_n$ 绝对收敛. 称收敛但不绝对收敛的级数条件收敛.

绝对收敛的复级数各项可以任意重排次序而不改变其绝对收敛性, 且不改变其和. 一般的级数重排有限项不改变其敛散性与和, 但若重排无限项则可能会改变其敛散性与和.

定理. $\sum_{n=1}^{\infty}z_n$ 绝对收敛当且仅当它的实部和虚部级数都绝对收敛.

证明. 必要性由前一定理的证明已经知道, 充分性由 $|z_n|\leqslant|x_n|+|y_n|$ 和比较判别法得到. □

绝对收敛和条件收敛的判定

		实部级数		
		发散	条件收敛	绝对收敛
虚部级数	发散	发散	发散	发散
	条件收敛	发散	条件收敛	条件收敛
	绝对收敛	发散	条件收敛	绝对收敛

思考. 什么时候 $\left|\sum_{n=1}^{\infty} z_n\right| = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$? 当且仅当非零的 z_n 的辐角全都相同时成立.

典型例题: 判断级数的敛散性

例. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1+\mathrm{i}^n}{n}$ 发散、条件收敛、还是绝对收敛?

解. 由于实部级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{2}{8} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

发散, 所以该级数发散.

它的虚部级数是一个交错级数, 从而是条件收敛的.

典型例题: 判断级数的敛散性

例. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n}$ 发散、条件收敛、还是绝对收敛?

解. 因为它的实部和虚部级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

均条件收敛, 所以原级数条件收敛.

典型例题：判断级数的敛散性

练习. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{\mathrm{i}}{2^n}\right]$ 发散、条件收敛、还是绝对收敛？

答案. 实部级数条件收敛，虚部级数绝对收敛，所以该级数条件收敛.

由正项级数的相应审敛法可以得到:

(1) **达朗贝尔判别法 (比值法)**: $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right|$ (假设存在);

(2) 柯西判别法 (根式法): $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|z_n|}$ (假设存在);

(3) 柯西-阿达马判别法: $\lambda = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|z_n|}$ (子数列中极限的最大值).

- 当 $\lambda < 1$ 时, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ 绝对收敛.
- 当 $\lambda > 1$ 时, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ 发散.
- 当 $\lambda = 1$ 时, 无法使用该方法判断敛散性.

其证明是通过将该级数与相应的等比级数做比较得到的.

典型例题: 判断级数的敛散性

例. 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(8\mathrm{i})^n}{n!}$ 发散、条件收敛、还是绝对收敛?

解. 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8}{n+1} = 0$, 所以该级数绝对收敛.

实际上, 它的实部和虚部级数分别为

$$1 - \frac{8^2}{2!} + \frac{8^4}{4!} - \cdots = \cos 8, \quad 8 - \frac{8^3}{3!} + \frac{8^5}{5!} - \cdots = \sin 8,$$

因此

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(8\mathrm{i})^n}{n!} = \cos 8 + \mathrm{i}\sin 8 = \mathrm{e}^{8\mathrm{i}}.$$

第二节　幂级数

- 幂级数及其收敛圆
- 收敛半径的计算
- 幂级数的运算性质

复变函数级数与实变量函数级数也是类似的.

定义.

(1) 设 $\{f_n(z)\}_{n\geqslant 1}$ 是一个复变函数列, 其中每一项都在区域 D 上有定义. 表达式 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 称为**复变函数项级数**.

(2) 对于 $z_0 \in D$, 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$ 收敛, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 z_0 处收敛, 相应级数的值称为它的和.

(3) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 D 上处处收敛, 则它的和是一个函数, 称为和函数.

(4) 称形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的函数项级数为幂级数.

我们只需要考虑 $a = 0$ 情形的幂级数, 因为二者的收敛范围与和函数只是差一个平移.

阿贝尔定理.

(1) 若 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 $z_0 \neq 0$ 处收敛, 那么对任意 $|z| < |z_0|$ 的 z, 该级数必绝对收敛.

(2) 若 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 $z_0 \neq 0$ 处发散, 那么对任意 $|z| > |z_0|$ 的 z, 该级数必发散.

证明.

(1) 因为级数收敛, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n z_0^n = 0$. 故存在 M 使得 $|c_n z_0^n| < M$. 对于 $|z| < |z_0|$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n z_0^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leqslant M \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z}{z_0}\right|^n = \frac{M}{1 - \left|\frac{z}{z_0}\right|}.$$

所以级数在 z 处绝对收敛.

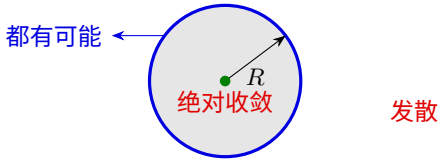
(2) 由(1)的逆否命题得到. □

幂级数的收敛半径

设 R 是实幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|x^n$ 的收敛半径.

- 若 $R=+\infty$, 由阿贝尔定理可知 $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 处处绝对收敛.
- 若 $0<R<+\infty$, 那么 $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 在 $|z|<R$ 上绝对收敛, 在 $|z|>R$ 上发散.
- 若 $R=0$, 那么 $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 仅在 $z=0$ 处收敛, 对任意 $z\neq 0$ 都发散.

我们称 R 为该幂级数的收敛半径.



例题: 收敛半径的计算

例. 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots$ 的收敛半径与和函数.

解. 若幂级数收敛, 则由 $z^n \to 0$ 可知 $|z| < 1$. 当 $|z| < 1$ 时, 和函数为

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z}.$$

因此收敛半径为 1.

收敛半径的计算

由正项级数的相应判别法容易得到公式 $R = \dfrac{1}{r}$, 其中

(1) **达朗贝尔公式 (比值法)**: $r = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ (假设存在);

(2) 柯西公式 (根式法): $r = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}$ (假设存在);

(3) 柯西-阿达马公式: $r = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}$.

若 $r = 0$ 或 $+\infty$, 则 $R = +\infty$ 或 0.

典型例题: 收敛半径的计算

例. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-1)^n}{n}$ 的收敛半径, 并讨论 $z=0,2$ 处的敛散性.

解. 由

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

可知收敛半径为 1.

当 $z=2$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-1)^n}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散.

当 $z=0$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-1)^n}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ 收敛.

典型例题: 收敛半径的计算

例. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n(n+1)}$ 的收敛半径, 并讨论收敛圆周上的情形.

解. 由

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = 1$$

可知收敛半径为 1.

当 $|z|=1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{z^n}{n(n+1)}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)} = 1$ 收敛. 因此该幂级数在收敛圆周上处处绝对收敛.

事实上, **收敛圆周上既可能处处收敛, 也可能处处发散, 也可能既有收敛的点也有发散的点**.

典型例题: 收敛半径的计算

例. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \cos(\mathrm{i}n) z^n$ 的收敛半径.

解. 我们有 $c_n = \cos(\mathrm{i}n) = \dfrac{\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n}}{2}$. 由

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{n+1} + \mathrm{e}^{-n-1}}{\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n}} = \mathrm{e} \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \mathrm{e}^{-2n-2}}{1 + \mathrm{e}^{-2n}} = \mathrm{e}$$

可知收敛半径为 $1/\mathrm{e}$.

练习. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (1+\mathrm{i})^n z^n$ 的收敛半径为 $\underline{\quad \sqrt{2}/2 \quad}$.

定理. 设幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n,|z|<R_1,\quad g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n,|z|<R_2.$$

那么当 $|z|<R=\min\{R_1,R_2\}$ 时,

$$(f\pm g)(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)z^n,\quad (fg)(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\Big)z^n.$$

当 f,g 的收敛半径相同时, $f\pm g$ 或 fg 的收敛半径可以比 f,g 的大.

定理. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径为 R, 则在 $|z| < R$ 上:

(1) 它的和函数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 解析,

(2) $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$,

(3) $\int_0^z f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1}$.

也就是说, 在收敛圆内, 幂级数的和函数解析, 且可以逐项求导, 逐项积分.

由于和函数在 $|z| > R$ 上没有定义, 因此和函数在 $|z| = R$ 上不可能解析.

例题: 幂级数展开

例. 把函数 $\dfrac{1}{z-b}$ 表成形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的幂级数, 其中 $a \neq b$.

解.

$$\frac{1}{z-b} = \frac{1}{(z-a)-(b-a)} = \frac{1}{a-b} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{z-a}{b-a}}.$$

当 $|z-a|<|b-a|$ 时, $\dfrac{1}{z-b} = \dfrac{1}{a-b}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{z-a}{b-a}\right)^n$, 即

$$\frac{1}{z-b} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(b-a)^{n+1}}, \quad |z-a|<|b-a|.$$

典型例题: 幂级数的收敛半径与和函数

例. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2^n-1)z^{n-1}$ 的收敛半径与收敛圆内的和函数.

解. 由

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+2}-1}{2^{n+1}-1} = 2$$

可知收敛半径为 $\dfrac{1}{2}$. 当 $|z|<\dfrac{1}{2}$ 时, $|2z|<1$. 从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2^n-1)z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}2^n z^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty}z^{n-1} = \frac{2}{1-2z} - \frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-2z)(1-z)}.$$

典型例题: 幂级数的收敛半径与和函数

例. 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$ 的收敛半径与收敛圆内的和函数.

解. 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{n+1} = 1$ 可知收敛半径为 1. 当 $|z|<1$ 时,

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} = \frac{z}{1-z} = -1 - \frac{1}{z-1},$$

因此

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n = \left(-\frac{1}{z-1}\right)' = \frac{1}{(z-1)^2}, \quad |z|<1.$$

通过对

$$1+\lambda z+\lambda^2 z^2+\cdots=\frac{1}{1-\lambda z}$$

两边求 k 阶导数可得

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+k)\cdots(n+2)(n+1)\lambda^n z^n=\frac{k!}{(1-\lambda z)^{k+1}}.$$

因此若 $p(n)$ 是次数为 $m-1$ 的多项式, 那么

$$\sum_{n=0}^{\infty}p(n)\lambda^n z^n=\frac{P(z)}{(1-\lambda z)^m},$$

其中 P 是多项式.

一般地, 若幂级数的系数形如

$$c_n = p_1(n)\lambda_1^n + \cdots + p_k(n)\lambda_k^n,$$

则和函数一定是形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \frac{P(z)}{(1-\lambda_1 z)^{m_1}\cdots(1-\lambda_k z)^{m_k}}$$

的有理函数, 其中 $m_j = \deg p_j + 1$. 反过来这样的分式展开成幂级数的系数也一定有上述形式, 至多有有限多项例外. 这可以帮助我们进行计算的验证.

练习. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ 的收敛半径与收敛圆内的和函数.

答案. 收敛半径为 1, 和函数为 $-\ln(1-z)$.

例题：函数项级数的积分

例. 求 $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \Big(\sum\limits_{n=-1}^{\infty} n^2 z^n \Big) \,\mathrm{d}z.$

解. 由于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^2 z^n$ 在 $|z|<1$ 收敛，它的和函数解析. 因此

$$\begin{aligned}\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \Big(\sum_{n=-1}^{\infty} n^2 z^n \Big) \,\mathrm{d}z &= \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z} \,\mathrm{d}z + \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \Big(\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n \Big) \,\mathrm{d}z \\ &= 2\pi\mathrm{i} + 0 = 2\pi\mathrm{i}.\end{aligned}$$

第三节　泰勒级数

- 泰勒展开的形式与性质
- 泰勒展开的计算方法

我们知道, 幂级数在它的收敛域内的和函数是一个解析函数. 反过来, 解析函数是不是也一定可以在一点展开成幂级数呢? 也就是说是否存在泰勒级数展开?

在高等数学中我们知道, 一个函数即使在一点附近无限次可导, 它的泰勒级数也未必收敛到原函数. 例如

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x^{-2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

它处处可导, 但是它在 0 处的各阶导数都是 0. 因此它的泰勒级数是 0, 余项恒为 $f(x)$. 除 0 外它的泰勒级数均不收敛到原函数.

而即使是泰勒级数能收敛到原函数的情形, 它成立的范围也很难从函数本身读出. 例如

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots, \quad |x| < 1.$$

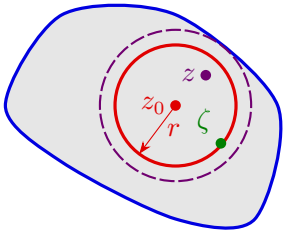
这可以从 $x = -1$ 是奇点看出. 而

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots, \quad |x| < 1$$

却并没有奇点. 为什么它的麦克劳林级数成立的开区间也是 $(-1, 1)$? 这个问题在本节可以得到回答.

设函数 $f(z)$ 在区域 D 解析, $z_0 \in D$. 设 $|z-z_0|$ 小于 z_0 到 D 边界的距离 d, 则存在 $|z-z_0| < r < d$. 设 $K : |\zeta - z_0| = r$, 则 K 和它的内部包含在 D 中. 由于 $\left|\dfrac{z-z_0}{\zeta - z_0}\right| < 1$, 因此

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z-z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}.$$



故

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_K \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_K f(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_K \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right] (z-z_0)^n + R_N(z), \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n + R_N(z),
\end{aligned}
$$

其中

$$
R_N(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_K f(\zeta) \left[\sum_{n=N}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right] \mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_K \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \cdot \left(\frac{z-z_0}{\zeta - z_0} \right)^N \mathrm{d}\zeta.
$$

由于 $f(\zeta)$ 在 $D \supseteq K$ 上解析, 从而在 K 上连续且有界. 设 $|f(\zeta)| \leqslant M, \zeta \in K$, 那么

$$
\begin{aligned}
|R_N(z)| &\leqslant \frac{1}{2\pi} \oint_K \left| \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \cdot \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^N \right| \mathrm{d}s \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{r - |z - z_0|} \cdot \left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right|^N \cdot 2\pi r \to 0 \quad (N \to \infty).
\end{aligned}
$$

故

$$
f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n,
$$

其中 $|z - z_0| < d$.

由于幂级数在收敛半径内的和函数是解析的, 因此上述等式成立的圆域不包含奇点. 故解析函数在 z_0 处**泰勒展开成立的最大圆域半径是 z_0 到最近奇点的距离**. 需要注意的是, 泰勒级数的收敛半径是有可能比这个半径更大的:

$$f(z)=\begin{cases}\mathrm{e}^z, & z\neq 1;\\ 0, & z=1,\end{cases}\qquad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\quad |z|<1.$$

$$f(z)=\ln(z-1-\mathrm{i}),\qquad f(z)=-\frac{1}{1+\mathrm{i}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n(1+\mathrm{i})^n}z^n,\quad |z|<1.$$

若并非这两种情形 (奇点 ‘‘可去’’), 则收敛半径的确就是前述距离.

对于

$$f(z)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-z^{-2}}, & z\neq 0,\\ 0, & z=0.\end{cases}$$

$\lim\limits_{y\to 0} f(\mathrm{i}y)=\infty$, 因此 $f(z)$ 在 0 处不连续, 无法在 0 处进行复的泰勒展开.

幂级数展开的唯一性

对于 $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$, 它的奇点为 $\pm\mathrm{i}$, 所以它的麦克劳林展开成立的半径是 1. 这就解释了为什么函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 的麦克劳林展开成立的开区间是 $(-1,1)$.

若 $f(z)$ 在 z_0 附近展开为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, 则由幂级数的逐项求导性质可知

$$f^{(n)}(z_0)=\sum_{k=n}^{\infty} c_k k(k-1)\cdots(k-n+1)(z-z_0)^{k-n}\Big|_{z=z_0}=n!c_n.$$

所以**解析函数的幂级数展开是唯一的**. 由此, 解析函数的泰勒展开不仅可以**直接求出各阶导数得到**, 也可以**利用幂级数的运算法则得到**.

解析函数的泰勒展开还说明了幂级数的和函数无论怎样扩充定义域, 它在**收敛圆周上一定有奇点**. 否则它就可以在一个半径更大的圆域上泰勒展开成该幂级数.

典型例题: 泰勒展开的计算

例. 由于 $(\mathrm{e}^z)^{(n)}(0) = \mathrm{e}^z|_{z=0} = 1$, 因此

$$\mathrm{e}^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \forall z.$$

例. 由于 $(\cos z)^{(n)} = \cos\Big(z + \frac{n\pi}{2}\Big)$,

$$(\cos z)^{(2n+1)}(0) = 0, \quad (\cos z)^{(2n)}(0) = (-1)^n,$$

因此

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall z.$$

典型例题: 泰勒展开的计算

例. 由 e^z 的泰勒展开可得

$$\sin z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}z)^n - (-\mathrm{i}z)^n}{2\mathrm{i} \cdot n!}$$

$$= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall z.$$

这里, 因为 $\sin z$ 是奇函数, 所以它的麦克劳林展开只有奇数幂次项, 没有偶数幂次项.

典型例题: 泰勒展开的计算

例. 求对数函数的主值 $\ln(1+z)$ 的麦克劳林展开.

解. 由于 $\ln(1+z)$ 在去掉射线 $z=x\leqslant -1$ 的区域内解析, 因此它在 $|z|<1$ 内解析, 且

$$\big[\ln(1+z)\big]'=\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n,\quad |z|<1.$$

逐项积分得到

$$\begin{aligned}\ln(1+z)&=\int_0^z\frac{1}{1+\zeta}\,\mathrm{d}\zeta=\int_0^z\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\zeta^n\,\mathrm{d}\zeta\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}z^n}{n},\quad |z|<1.\end{aligned}$$

例. 本例中幂函数均取主值. $f(z)=(1+z)^{\alpha}$ 在去掉射线 $z=x\leqslant -1$ 的区域内解析. 由于

$$\begin{aligned} f^{(n)}(0) &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+z)^{\alpha-n}\Big|_{z=0} \\ &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1). \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} (1+z)^{\alpha} &= 1+\alpha z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}z^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}z^3+\cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}z^n, \quad |z|<1. \end{aligned}$$

典型例题: 泰勒展开的计算

当 $\alpha = n$ 是正整数时, 上述麦克劳林展开的 $> n$ 幂次项系数为零, 从而

$$(1+z)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k z^k,$$

此即牛顿二项式展开.

例. 将 $\dfrac{1}{(1+z)^2}$ 展开成 z 的幂级数.

解. 由幂函数展开可知当 $|z| < 1$ 时,

$$(1+z)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)(-3)\cdots(-1-n)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) z^n.$$

另解. 由于 $\dfrac{1}{(1+z)^2}$ 的奇点为 $z=-1$, 因此它在 $|z|<1$ 内解析. 由于

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n,$$

因此

$$\frac{1}{(1+z)^2}=-\Big(\frac{1}{1+z}\Big)'=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n z^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)z^n,\quad |z|<1.$$

一般地, 我们有

$$\frac{1}{(\lambda-z)^k}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+k-1)\cdots(n+2)(n+1)}{(k-1)!}\lambda^{-(n+k)}z^n,\ |z|<|\lambda|.$$

典型例题: 泰勒展开的计算

例. 求 $\dfrac{1}{3z-2}$ 的麦克劳林展开.

解. 由于 $\dfrac{1}{3z-2}$ 的奇点为 $z=\dfrac{2}{3}$, 因此它在 $|z|<\dfrac{2}{3}$ 内解析. 此时

$$\begin{aligned}\frac{1}{3z-2} &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{3z}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{3z}{2}\Big)^n \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{2^{n+1}}z^n, \quad |z|<\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

典型例题: 泰勒展开的计算

练习. 求 $\dfrac{1}{1-3z+2z^2}$ 的麦克劳林展开.

答案.

$$\frac{1}{1-3z+2z^2}=\frac{2}{1-2z}-\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}(2^{n+1}-1)z^n,\quad |z|<\frac{1}{2}.$$

第四节　洛朗级数

- 双边幂级数
- 洛朗展开的形式
- 洛朗展开的计算方法

若解析函数 $f(z)$ 在 z_0 处解析, 那么在 z_0 处可以展开成泰勒级数. 若 $f(z)$ 在 z_0 处不解析呢? 此时 $f(z)$ 一定不能展开成 $z-z_0$ 的幂级数, 然而它却可能可以展开为双边幂级数

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}}_{\text{负幂次部分}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n}_{\text{非负幂次部分}}.$$

例如

$$\frac{1}{z^2(1-z)} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + \cdots, \quad 0 < |z| < 1.$$

双边幂级数的非负幂次部分也叫解析部分, 负幂次部分也叫主要部分.

双边幂级数的敛散性

为了保证双边幂级数的收敛范围有一个好的性质以便于我们使用, 我们对它的敛散性作如下定义:

定义. 若双边幂级数的非负幂次部分和负幂次部分作为函数项级数都收敛, 则我们称这个双边幂级数收敛. 否则我们称之为发散.

注意双边幂级数的敛散性不能像幂级数那样通过部分和形成的数列的极限来定义, 因为使用不同的部分和选取方式会影响到极限的数值.

双边幂级数的收敛域

设 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ 的收敛半径为 R_2, 则它在 $|z-z_0|<R_2$ 内收敛, 在 $|z-z_0|>R_2$ 内发散.

对于负幂次部分, 令 $\zeta=\dfrac{1}{z-z_0}$, 那么负幂次部分是 ζ 的一个幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^n$. 设该幂级数的收敛半径为 R, 则它在 $|\zeta|<R$ 内收敛, 在 $|\zeta|>R$ 内发散. 设 $R_1:=\frac{1}{R}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}$ 在 $|z-z_0|>R_1$ 内收敛, 在 $|z-z_0|<R_1$ 内发散.

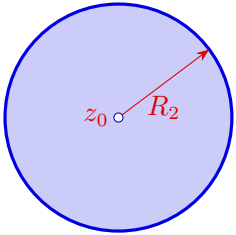
(1) 若 $R_1>R_2$, 则该双边幂级数处处不收敛.

(2) 若 $R_1=R_2$, 则该双边幂级数只在圆周 $|z-z_0|=R_1$ 上可能有收敛的点.

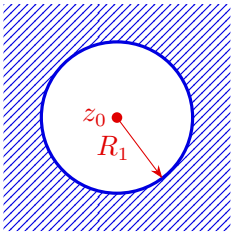
(3) 若 $R_1<R_2$, 则该双边幂级数在 $R_1<|z-z_0|<R_2$ 内收敛, 在 $|z-z_0|<R_1$ 或 $>R_2$ 内发散, 在圆周 $|z-z_0|=R_1$ 或 R_2 上既可能发散也可能收敛.

双边幂级数的收敛域

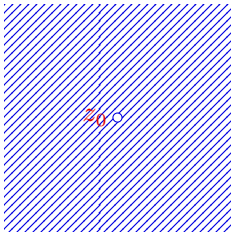
当 $R_1 < R_2$ 时, 称圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 为该**双边幂级数的收敛圆环**.
当 $R_1 = 0$ 或 $R_2 = +\infty$ 时, 圆环域的形状会有所不同.



$0 < |z - z_0| < R_2$



$R_1 < |z - z_0| < +\infty$



$0 < |z - z_0| < +\infty$

双边幂级数的非负幂次部分和负幂次部分在收敛圆环域内都收敛, 因此它们的和函数都解析 ($\zeta = \dfrac{1}{z - z_0}$ 关于 z 解析), 且可以逐项求导、逐项积分. 从而**双边幂级数的和函数也是解析的, 且可以逐项求导、逐项积分**.

例题: 双边幂级数的收敛域

例. 求双边幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{z^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{(2+\mathrm{i})^n}$ 的收敛域与和函数.

解. 非负幂次部分收敛圆为 $|z|<|2+\mathrm{i}|=\sqrt{5}$, 负幂次部分收敛圆为 $|z|>|2|=2$. 因此该双边幂级数的收敛圆环为 $2<|z|<\sqrt{5}$. 此时

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(2+\mathrm{i})^n}=\frac{\dfrac{2}{z}}{1-\dfrac{2}{z}}+\frac{1}{1-\dfrac{z}{2+\mathrm{i}}}=\frac{-\mathrm{i}z}{(z-2)(z-2-\mathrm{i})}.$$

反过来, 在圆环域内解析的函数也一定能展开为双边幂级数, 被称为洛朗级数.

例如 $f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)}$ 在 $z=0,1$ 以外解析. 在圆环域 $0<|z|<1$ 内,

$$f(z)=\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}=\frac{1}{z}+1+z+z^2+z^3+\cdots$$

在圆环域 $1<|z|<+\infty$ 内,

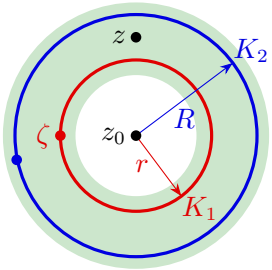
$$f(z)=\frac{1}{z}-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{z}}=-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^4}-\cdots$$

考虑一般情形下的洛朗展开. 设 $f(z)$ 在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内解析. 设

$$K_1 : |z - z_0| = r, \quad K_2 : |z - z_0| = R, \quad R_1 < r < R < R_2.$$

对于 $r < |z - z_0| < R$, 对复合闭路 $K_2 + K_1^-$ 应用柯西积分公式,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{K_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{K_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta.$$



和泰勒级数的推导类似,

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{K_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{K_2}\frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\right](z - z_0)^n$$

可以表达为幂级数的形式. 对于 $\zeta \in K_1$, 由 $\left|\dfrac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right| < 1$ 可得

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{z - z_0}\cdot\frac{1}{1 - \dfrac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z - z_0)^{-n}}{(\zeta - z_0)^{-n+1}},$$

$$-\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{K_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{K_1} f(\zeta)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z - z_0)^{-n}}{(\zeta - z_0)^{-n+1}}\,\mathrm{d}\zeta.$$

令

$$R_N(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{K_1} f(\zeta) \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(z-z_0)^{-n}}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} \,\mathrm{d}\zeta$$
$$= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{K_1} \frac{f(\zeta)}{z-\zeta} \cdot \Big(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\Big)^{N-1} \,\mathrm{d}\zeta.$$

由于 $f(\zeta)$ 在 $D \supseteq K_1$ 上解析, 从而在 K_1 上连续且有界. 设 $|f(\zeta)| \leqslant M, \zeta \in K_1$, 那么

$$|R_N(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \oint_{K_1} \left| \frac{f(\zeta)}{z-\zeta} \cdot \Big(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\Big)^{N-1} \right| \mathrm{d}s$$
$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{|z-z_0| - r} \cdot \left| \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right|^{N-1} \cdot 2\pi r \to 0 \quad (N \to \infty).$$

故

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{K_2}\frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right](z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{K_1}\frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z_0)^{-n+1}}\right](z-z_0)^{-n},$$

其中 $r<|z-z_0|<R$. 由复合闭路定理, K_1, K_2 可以换成任意一条在圆环域内绕 z_0 的闭路 C. 从而我们得到 $f(z)$ 在以 z_0 为圆心的圆环域的洛朗展开

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C}\frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right](z-z_0)^n,$$

其中 $R_1<|z-z_0|<R_2$.

洛朗展开的唯一性

和圆域上解析函数的幂级数展开类似, 圆环域上解析函数的双边幂级数展开也具有唯一性. 设在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内的解析函数 $f(z)$ 可以表达为双边幂级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

逐项积分得到

$$\oint_C \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \oint_C (\zeta - z_0)^{k-n-1}\,\mathrm{d}\zeta = 2\pi \mathrm{i} c_n.$$

因此 $f(z)$ 在圆环域内的**双边幂级数展开是唯一的, 它就是洛朗级数**. 由于计算积分往往较繁琐, 因此我们一般不用直接法, 而是**用双边幂级数的代数、求导、求积分运算**来得到洛朗级数.

例. 将 $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^z-1}{z^2}$ 展开为以 0 为中心的洛朗级数.

由于 $f(z)$ 只有 0 这个奇点, 因此 $f(z)$ 在 $0<|z|<+\infty$ 解析. 我们先使用直接法解答.

解.

$$c_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{\mathrm{e}^z-1}{z^{n+3}}\,\mathrm{d}z=\begin{cases}\dfrac{(\mathrm{e}^z-1)^{(n+2)}}{(n+2)!}\Big|_{z=0}=\dfrac{1}{(n+2)!}, & n\geqslant -1;\\ (\mathrm{e}^z-1)(0)=0, & n=-2;\\ 0, & n\leqslant -3.\end{cases}$$

故 $f(z)=\dfrac{1}{z}+\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)!}z^n$.

另解.

$$\frac{\mathrm{e}^z-1}{z^2}=\frac{1}{z^2}\left(z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots\right)=\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)!}z^n.$$

例. 在下列圆环域中把 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 展开为洛朗级数.

(1) $0<|z|<1$; (2) $1<|z|<2$; (3) $2<|z|<+\infty$.

解. 由于 $f(z)$ 的奇点为 $z=1,2$, 因此在这些圆环域内 $f(z)$ 解析. 我们有

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}.$$

典型例题：求洛朗展开

(1) 由于 $|z|<1, \left|\frac{z}{2}\right|<1$, 因此

$$
\begin{aligned}
f(z) &= -\frac{1}{2-z}+\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}+\frac{1}{1-z} \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n \\
&= \frac{1}{2}+\frac{3}{4}z+\frac{7}{8}z^2+\cdots
\end{aligned}
$$

(2) 由于 $\left|\frac{1}{z}\right|<1, \left|\frac{z}{2}\right|<1$, 因此

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}} \\
&= -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}z^n \\
&= \cdots - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z - \frac{1}{8}z^2 - \cdots
\end{aligned}
$$

(3) 由于 $\left|\frac{1}{z}\right|<1, \left|\frac{2}{z}\right|<1$, 因此

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}+\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}} \\
&= -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n+\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n-1}{z^{n+1}} \\
&= \frac{1}{z^2}+\frac{3}{z^3}+\frac{7}{z^4}+\cdots
\end{aligned}
$$

典型例题：求洛朗展开

例. 将函数 $f(z)=\dfrac{z+1}{(z-1)^2}$ 在圆环域 $0<|z|<1$ 内展开成洛朗级数.

解.

$$f(z)=\frac{z-1+2}{(z-1)^2}=\frac{1}{z-1}+\frac{2}{(z-1)^2}.$$

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n,\qquad \frac{1}{(1-z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n,$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\big[2(n+1)-1\big]z^n=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)z^n.$$

求有理函数洛朗展开的步骤

可以看出, 有理函数的洛朗展开通常需要将其分解成部分分式 $\dfrac{1}{(z-a)^m}$ 的线性组合. 根据 z 所处的圆环域, 选取 $\dfrac{z-z_0}{a-z_0}$ 和 $\dfrac{a-z_0}{z-z_0}$ 中模小于 1 的数作为公比来求得 $\dfrac{1}{z-a}$ 的洛朗展开. 然后对其求 $m-1$ 阶导, 最后合并相同幂次项的系数.

洛朗展开的一些特点可以帮助我们检验计算的正确性.

- 若 $f(z)$ 在 $|z-z_0|<R_2$ 内解析, 则 $f(z)$ 可以展开为泰勒级数. 由唯一性可知泰勒级数等于洛朗级数, 因此此处洛朗展开一定没有负幂次项.
- 若有理函数 (分子分母没有公共零点) 在圆周 $|z-z_0|=R_1>0$ 和 $|z-z_0|=R_2>0$ 上都有奇点, 则在圆环域 $R_1<|z-z_0|<R_2$ 上的洛朗展开一定有无穷多负幂次和无穷多正幂次项.
- 有理函数在解析区域 $0<|z-z_0|<r$ 的洛朗展开最多只有有限多负幂次项, 且最低负幂次是 $z-z_0$ 在分母因式分解中出现的次数; 在解析区域 $R<|z-z_0|<+\infty$ 的洛朗展开最多只有有限多正幂次项, 且最高正幂次是分子次数减去分母次数.

有理函数 $f(z)$ 在圆环域 $r<|z|<R$ 内的洛朗展开总形如

$$f(z)=P(z)+\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n+\sum_{n<0}b_nz^n,$$

其中 $P(z)$ 只有有限多项, a_n 和 b_n 是形如 $p(n)\lambda^{-n}$ 的线性组合, λ 是奇点, $\deg p+1$ 是 λ 在 $f(z)$ 分母出现的重数, 其中 $|\lambda|\geqslant R$ 的那些项出现在 a_n 中, 而 $|\lambda|\leqslant r$ 的那些项出现在 b_n 中. 不仅如此, 从 $f(z)$ 在任一圆环域上的展开可以得到其它圆环域上的展开, 只需要将需要变化求和范围的那些项 n 的求和范围变化, 系数变号.

例如在 $0<|z|<1$ 内,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{120}{(z-1)(z^2-4)(z^2-9)} \\ &= \sum_{n\geqslant 0}\left[-5+\frac{2}{(-2)^{n+1}}+\frac{6}{2^{n+1}}-\frac{1}{(-3)^{n+1}}-\frac{2}{3^{n+1}}\right]z^n. \end{aligned}$$

那么在 $2<|z|<3$ 内洛朗展开需要变动奇点 $1,\pm 2$ 对应的项:

$$f(z)=\sum_{n\geqslant 0}\left[-\frac{1}{(-3)^{n+1}}-\frac{2}{3^{n+1}}\right]z^n+\sum_{n\leqslant -1}\left[5-\frac{2}{(-2)^{n+1}}-\frac{6}{2^{n+1}}\right]z^n.$$

感兴趣的同学可阅读课本相应部分.

典型例题: 求洛朗展开

练习. 将函数 $f(z)=\dfrac{z+1}{(z-1)^2}$ 在圆环域 $1<|z|<+\infty$ 内展开成洛朗级数.

答案.

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{z}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n},\qquad -\frac{1}{(z-1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-n}{z^{n+1}}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{z^n},$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(n-1)+1}{z^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{z^n}.$$

此即 $-\sum\limits_{n\leqslant -1}(2n+1)z^n$.

例题: 洛朗展开的应用

注意到当 $n=-1$ 时, 洛朗级数的系数

$$c_{-1}=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta,$$

因此洛朗展开可以用来帮助计算函数的积分, 这便引出了留数的概念.

例题: 洛朗展开的应用

例. 求 $\oint_{|z|=1} \dfrac{z}{\sin z^2}\,\mathrm{d}z$.

解. 注意到闭路 $|z|=1$ 落在 $0<|z|<\sqrt{\pi}$ 内. 我们在这个圆环域内求 $f(z)=\dfrac{z}{\sin z^2}$ 的洛朗展开.

$$f(z)=\frac{z}{\sin z^2}=\frac{z}{z^2-\dfrac{z^6}{3!}+\dfrac{z^{10}}{5!}+\cdots}=\frac{1}{z}+\frac{z^3}{6}+\cdots$$

故 $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}c_{-1}=2\pi\mathrm{i}$.

第五节　孤立奇点

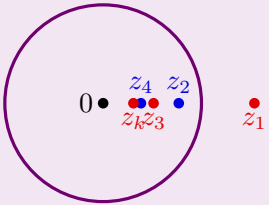
- 孤立奇点的类型
- 零点与极点

我们根据奇点附近洛朗展开的形式来对其进行分类, 以便后面分类计算留数.

例. 考虑函数

$$f(z)=\frac{1}{\sin(1/z)}.$$

显然 $0, z_k=\dfrac{1}{k\pi}$ 是奇点, k 是非零整数.因为 $\lim\limits_{k\to+\infty} z_k=0$, 所以 0 的任何一个去心邻域内都有奇点. 此时无法选取一个圆环域 $0<|z|<\delta$ 作 $f(z)$ 的洛朗展开, 因此我们不考虑这类奇点.



孤立奇点的定义

定义. 若 z_0 是 $f(z)$ 的一个奇点，且 z_0 的某个邻域内没有其它奇点，则称 z_0 是 $f(z)$ 的一个**孤立奇点**.

例.

(1) $z=0$ 是 $\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}, \dfrac{\sin z}{z}$ 的孤立奇点.

(2) $z=-1$ 是 $\dfrac{1}{z(z+1)}$ 的孤立奇点.

(3) $z=0$ 不是 $\dfrac{1}{\sin(1/z)}$ 的孤立奇点.

若 $f(z)$ 只有有限多个奇点，则这些奇点都是孤立奇点.

若 $f(z)$ 在孤立奇点 z_0 的去心邻域 $0 < |z - z_0| < \delta$ 内解析, 则可以作 $f(z)$ 的洛朗展开. 根据该洛朗级数主要部分的项数, 我们可以将孤立奇点分为三种:

孤立奇点类型	洛朗级数特点	$\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$
可去奇点	没有主要部分	存在
m 阶极点	主要部分只有有限项非零 最低次为 $-m$ 次	∞
本性奇点	主要部分有无限项非零	不存在且不为 ∞

可去奇点

定义. 若 $f(z)$ 在孤立奇点 z_0 的去心邻域洛朗级数没有主要部分, 即

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots, \quad 0 < |z - z_0| < \delta,$$

是幂级数, 则称 z_0 是 $f(z)$ 的**可去奇点**.

设 $g(z)$ 为右侧幂级数的和函数, 则 $g(z)$ 在 $|z - z_0| < \delta$ 上解析, 且除 z_0 外 $f(z) = g(z)$. 通过补充或修改定义 $f(z_0) = g(z_0) = c_0$, 可使得 $f(z)$ 也在 z_0 解析. 这就是 ''可去'' 的含义.

定理. z_0 是 $f(z)$ 的可去奇点 $\iff \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ 存在 $\iff \lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$.

例题: 可去奇点

例.

$$f(z)=\frac{\sin z}{z}=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots$$

没有负幂次项, 因此 0 是可去奇点.

也可以从 $\lim\limits_{z\to 0} zf(z)=\sin 0=0$ 看出.

例.

$$f(z)=\frac{\mathrm{e}^z-1}{z}=1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\cdots$$

没有负幂次项, 因此 0 是可去奇点.

也可以从 $\lim\limits_{z\to 0} zf(z)=\mathrm{e}^0-1=0$ 看出.

由于可去奇点的性质比较简单, 本性奇点的性质较为复杂, 我们主要关心的是极点的情形.

定义. 若 $f(z)$ 在孤立奇点 z_0 的去心邻域的洛朗级数主要部分只有有限多项非零, 即

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}+\cdots+c_0+c_1(z-z_0)+\cdots,\ 0<|z-z_0|<\delta,$$

其中 $c_{-m}\neq 0, m\geqslant 1$, 则称 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶极点或 m 级极点.

极点的判定

令

$$g(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z - z_0) + c_{-m+2}(z - z_0)^2 + \cdots,$$

则 $g(z)$ 在 z_0 解析且非零, 且

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}, 0 < |z - z_0| < \delta.$$

定理.

(1) z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶极点 $\iff \lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z)$ 存在且非零.

(2) z_0 是 $f(z)$ 的极点 $\iff \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

典型例题: 函数的极点

例. $f(z)=\dfrac{3z+2}{z^2(z+2)}$, 由于 $\lim\limits_{z\to 0} z^2 f(z)=1$, 因此 0 是二阶极点.同理 -2 是一阶极点.

练习. 求 $f(z)=\dfrac{1}{z^3-z^2-z+1}$ 的奇点, 并指出极点的阶.

答案. -1 是一阶极点, 1 是二阶极点.

本性奇点

定义. 若 $f(z)$ 在孤立奇点 z_0 的去心邻域的洛朗级数主要部分有无限多项非零, 则称 z_0 是 $f(z)$ 的本性奇点.

例. 由于 $\mathrm{e}^{\frac{1}{z}} = 1 + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{2z^2} + \cdots$, 因此 0 是本性奇点.

定理. z_0 是 $f(z)$ 的本性奇点 $\iff \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ 不存在也不是 ∞.

事实上我们有皮卡大定理: 对于本性奇点 z_0 的任何一个去心邻域, $f(z)$ 的像取遍所有复数, 至多有一个取不到.

函数的零点

我们来研究极点与零点的联系, 并给出极点的阶的计算方法.

定义. 若 $f(z)$ 在解析点 z_0 处的泰勒级数最低次项幂次是 $m \geqslant 1$, 即

$$f(z) = c_m(z-z_0)^m + c_{m+1}(z-z_0)^{m+1} + \cdots, \ 0 < |z-z_0| < \delta,$$

其中 $c_m \neq 0$, 则称 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶零点.

此时 $f(z) = (z-z_0)^m g(z)$, $g(z)$ 在 z_0 解析且 $g(z_0) \neq 0$.

定理. 设 $f(z)$ 在 z_0 解析. z_0 是 m 阶零点 $\iff \lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^{-m}f(z)$ 存在且非零

$$\iff f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

例题: 函数的零点

例. $f(z) = z(z-1)^3$ 有一阶零点 0 和三阶零点 1.

例. $f(z) = \sin z^5 - z^5$. 由于

$$f(z) = -\frac{z^{15}}{3!} + \frac{z^{25}}{5!} + \cdots$$

因此 0 是 15 阶零点.

定理. 非零的解析函数的零点总是孤立的.

证明. 设 $f(z)$ 是区域 D 上的非零解析函数, $z_0 \in D$ 是 $f(z)$ 的一个零点. 由于 $f(z)$ 不恒为零, 因此存在 $m \geqslant 1$ 使得在 z_0 的一个邻域内 $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$, $g(z)$ 在 z_0 处解析且非零.

对于 $\varepsilon = \dfrac{1}{2}|g(z_0)|$, 存在 $\delta > 0$ 使得当 $z \in \mathring{U}(z_0, \delta) \subseteq D$ 时, $|g(z) - g(z_0)| < \varepsilon$. 从而 $g(z) \neq 0$, $f(z) \neq 0$. □

若解析函数 $f(z)$ 满足对任意实数 $x, f(x) = \mathrm{e}^x$, 那么所有实数都是解析函数 $f(z) - \mathrm{e}^z$ 的零点, 从而 $f(z) \equiv \mathrm{e}^z$.

下面我们给出分式的奇点和分子分母零点的联系.

命题. 若 z_0 是 f 的 m 阶零点 (若解析且不是零点取 $m=0$), g 的 n 阶零点, 则 z_0 是 fg 的 $m+n$ 阶零点.

命题. 设 z_0 是 f 的 m 阶零点 (若解析且不是零点取 $m=0$), g 的 n 阶零点.

(1) 若 $m \geqslant n$, 则 z_0 是 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的可去奇点.

(2) 若 $m < n$, 则 z_0 是 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的 $n-m$ 阶极点.

典型例题: 函数的极点

例. $z=0$ 是函数 $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^z-1}{z^2}$ 的(A).

(A) 一阶极点　　(B) 二阶极点　　(C) 三阶极点　　(D) 四阶极点

解. 由于

$$\mathrm{e}^z-1=z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots,$$

所以 0 是 e^z-1 的一阶零点. 因此 0 是一阶极点.

典型例题: 函数的极点

例. $z=0$ 是 $f(z)=\dfrac{(\mathrm{e}^z-1)^3z^2}{\sin z^7}$ 的几阶极点?

解. 0 是分子的五阶零点, 分母的七阶零点. 因此 0 是二阶极点.

例. 函数 $f(z)=\dfrac{(z-5)\sin z}{(z-1)^2z^2(z+1)^3}$ 有哪些什么类型的奇点, 并指出极点的阶.

解. 1 是二阶极点, 0 是一阶极点, -1 是三阶极点.

典型例题: 奇点的类型

练习. 函数 $f(z)=\dfrac{z^2+4\pi^2}{z^3(\mathrm{e}^z-1)}$ 有哪些什么类型的奇点, 并指出极点的阶.

答案.

- $z=2k\pi\mathrm{i}$ 是一阶极点, $k\neq 0,\pm 1$.
- $z=0$ 是四阶极点.
- $z=\pm 2\pi\mathrm{i}$ 是可去奇点.

第五章　留数

1. 留数
2. 留数的应用

第一节　留数

- 留数定理
- 留数的计算方法
- 在 ∞ 的留数

定义. 设 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点，$f(z)$ 在它的某个去心邻域内的洛朗展开为

$$f(z) = \cdots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots .$$

称

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] := c_{-1} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C f(z)\,\mathrm{d}z$$

为函数 $f(z)$ 在 z_0 的留数，其中 C 为该去心邻域中绕 z_0 的一条闭路.

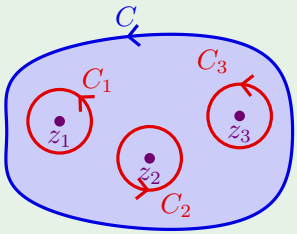
可以看出，知道留数之后可以用来计算积分.

复变函数积分计算方法 III: 留数定理. 若 $f(z)$ 在闭路 C 上解析，在 C 内部的奇点为 $z_1, z_2, \ldots, z_n$，则

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z), z_k].$$

证明. 由复合闭路定理，

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n}\oint_{C_k} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z), z_k]. \qquad \square$$



若 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点, 则显然 $\mathrm{Res}[f(z), z_0] = 0$.

例. $f(z) = \dfrac{z^3(\mathrm{e}^z - 1)^2}{\sin z^4}$. 由于 0 是分子的五阶零点, 分母的四阶零点, 因此 $z = 0$ 是 $f(z)$ 的可去奇点. 故

$$\mathrm{Res}[f(z), 0] = 0.$$

若 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点, 一般只能从定义计算.

例. $f(z) = z^4 \sin \dfrac{1}{z}$. 由于

$$f(z) = z^4 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{-2n-1}}{(2n+1)!} = z^3 - \frac{z}{3!} + \frac{1}{5!z} + \cdots$$

因此

$$\mathrm{Res}[f(z), 0] = \frac{1}{120}.$$

极点的留数计算方法

设 z_0 为 $f(z)$ 的极点.

留数计算公式 I. 若 z_0 是 $\leqslant m$ 阶极点或可去奇点, 那么

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0)^m f(z)\right]^{(m-1)}.$$

留数计算公式 II. 若 z_0 是一阶极点或可去奇点, 那么

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

证明. 设

$$f(z) = c_{-m}(z-z_0)^{-m} + \cdots + c_{-1}(z-z_0)^{-1} + c_0 + \cdots,$$
$$g(z) = c_{-m} + \cdots + c_{-1}(z-z_0)^{m-1} + c_0(z-z_0)^m + \cdots,$$

则 $g(z) = (z-z_0)^m f(z)$. 由泰勒展开系数与函数导数的关系可知

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(z_0).$$

□

典型例题: 留数的计算

例. 求 $\operatorname{Res}\left[\dfrac{\mathrm{e}^z}{z^n}, 0\right]$.

解. 显然 0 是 n 阶极点,

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left[\frac{\mathrm{e}^z}{z^n}, 0\right] &= \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to 0}(\mathrm{e}^z)^{(n-1)} \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to 0}\mathrm{e}^z = \frac{1}{(n-1)!}.\end{aligned}$$

典型例题：留数的计算

例. 求 $\operatorname{Res}\left[\dfrac{z-\sin z}{z^6}, 0\right]$.

解. 因为 $z=0$ 是 $z-\sin z$ 的三阶零点, 所以是 $\dfrac{z-\sin z}{z^6}$ 的三阶极点. 若用公式

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z-\sin z}{z^6}, 0\right] = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\Big(\frac{z-\sin z}{z^3}\Big)''$$

计算会很繁琐.

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z-\sin z}{z^6}, 0\right] = \frac{1}{5!}\lim_{z\to 0}(z-\sin z)^{(5)} = \frac{1}{5!}\lim_{z\to 0}(-\cos z) = -\frac{1}{120}.$$

练习. 求 $\operatorname{Res}\left[\dfrac{\mathrm{e}^z-1}{z^5}, 0\right] = \underline{\quad 1/24 \quad}$.

留数可用于部分分式分拆. 例如

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)^2}=\frac{a}{z-1}+\frac{b}{z-2}+\frac{c}{(z-2)^2},$$

由于 $\dfrac{a}{z-1}$ 在 $z=2$ 处解析, 因此它在 2 附近的洛朗展开没有负幂次项, 所以 $f(z)$ 在 2 附近的洛朗展开的负幂次部分就是 $\dfrac{b}{z-2}+\dfrac{c}{(z-2)^2}$. 故

$$b=\operatorname{Res}[f(z),2]=\lim_{z\to 2}\Big(\frac{1}{z-1}\Big)'=-1.$$

类似地, 若考虑函数 $(z-2)f(z)$, 则有

$$c=\operatorname{Res}\big[(z-2)f(z),2\big]=\lim_{z\to 2}\frac{1}{z-1}=1.$$

留数计算公式 III. 设 $P(z), Q(z)$ 在 z_0 解析且 z_0 是 Q 的一阶零点，则

$$\operatorname{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)}, z_0\right] = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

证明. 不难看出 z_0 是 $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 的一阶极点或可去奇点. 因此

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}[f(z), z_0] &= \lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z)\\ &= \lim_{z\to z_0}\frac{P(z)}{\dfrac{Q(z) - Q(z_0)}{z - z_0}} = \frac{P(z_0)}{\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{Q(z) - Q(z_0)}{z - z_0}} = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.\end{aligned}$$

□

典型例题: 留数的计算

例. 求 $\operatorname{Res}\left[\dfrac{z}{z^8-1}, \dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right]$.

解. 由于 $z=\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$ 是分母的 1 阶零点, 因此

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z}{z^8-1}, \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right] = \frac{z}{(z^8-1)'}\Big|_{z=\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}} = \frac{z}{8z^7}\Big|_{z=\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}} = \frac{\mathrm{i}}{8}.$$

例题：留数的应用

例. 计算积分 $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{\mathrm{e}^z}{z(z-1)^2}\,\mathrm{d}z.$

解. $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^z}{z(z-1)^2}$ 在 $|z|<2$ 内有奇点 $z=0,1.$

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{e}^z}{(z-1)^2}=1,$$

$$\operatorname{Res}[f(z),1]=\lim_{z\to 1}\Big(\frac{\mathrm{e}^z}{z}\Big)'=\lim_{z\to 1}\frac{\mathrm{e}^z(z-1)}{z^2}=0,$$

$$\oint_{|z|=2}\frac{\mathrm{e}^z}{z(z-1)^2}\,\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\big[\operatorname{Res}[f(z),0]+\operatorname{Res}[f(z),1]\big]=2\pi\mathrm{i}.$$

在 ∞ 的留数

定义. 设 $f(z)$ 在某个圆环域 $R<|z|<+\infty$ 内解析, 且洛朗展开为

$$f(z)=\cdots+c_{-1}z^{-1}+c_0+c_1z+\cdots$$

称

$$\operatorname{Res}[f(z),\infty]:=-c_{-1}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C^-}f(z)\,\mathrm{d}z$$

为函数 $f(z)$ 在 ∞ 的留数, 其中 C 为该圆环域中绕 0 的一条闭路.

由于

$$f\Big(\frac{1}{z}\Big)\frac{1}{z^2} = \cdots + \frac{c_1}{z^3} + \frac{c_0}{z^2} + \frac{c_{-1}}{z} + c_{-2} + \cdots$$

因此有

留数计算公式 IV.

$$\mathrm{Res}[f(z), \infty] = -\mathrm{Res}\left[f\Big(\frac{1}{z}\Big)\frac{1}{z^2}, 0\right].$$

留数之和为 0

定理. 若 $f(z)$ 只有有限个奇点, 那么 $f(z)$ 在扩充复平面内各奇点处的留数之和为 0.

证明. 设闭路 C 内部包含除 ∞ 外所有奇点 $z_1, \ldots, z_n$. 由留数定理

$$-\operatorname{Res}[f(z), \infty] = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}[f(z), z_k].$$

故 $\sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{Res}[f(z), z_k] + \operatorname{Res}[f(z), \infty] = 0.$ □

例题: 留数的应用

例. 求 $\oint_{|z|=2} f(z)\,\mathrm{d}z$, 其中 $f(z)=\dfrac{\sin(1/z)}{(z+\mathrm{i})^{10}(z-1)(z-3)}$.

$f(z)$ 在 $|z|<2$ 内有奇点 $1,-\mathrm{i},0$, 其中 0 是本性奇点, 它的留数不易求得. 而 $-\mathrm{i}$ 是 10 阶极点, 它的留数也难以计算. 因此我们将问题转化为计算闭路 C 外部的奇点处留数.

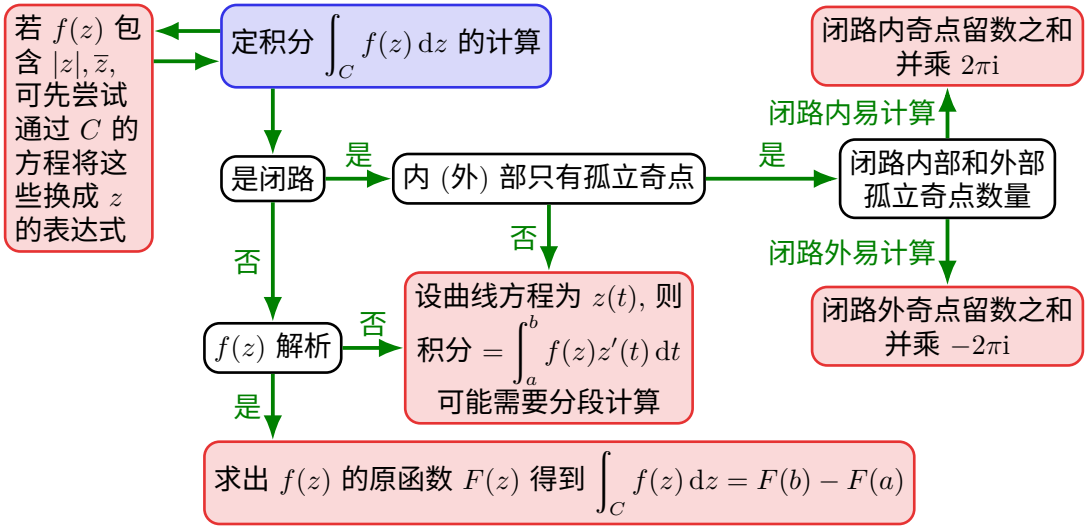
解. $f(z)$ 在 $|z|>2$ 内只有奇点 $3,\infty$.

$$\mathrm{Res}[f(z),3]=\lim_{z\to 3}(z-3)f(z)=\frac{1}{2(3+\mathrm{i})^{10}}\sin\frac{1}{3}.$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}[f(z),\infty] &= -\operatorname{Res}\left[f\Big(\frac{1}{z}\Big)\frac{1}{z^2},0\right]\\ &= -\operatorname{Res}\left[\frac{z^{10}\sin z}{(1+\mathrm{i}z)^{10}(1-z)(1-3z)},0\right]=0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\oint_{|z|=2} f(z)\,\mathrm{d}z &= 2\pi\mathrm{i}\big[\operatorname{Res}[f(z),-\mathrm{i}]+\operatorname{Res}[f(z),1]+\operatorname{Res}[f(z),0]\big]\\ &= -2\pi\mathrm{i}\big[\operatorname{Res}[f(z),3]+\operatorname{Res}[f(z),\infty]\big]=-\frac{\pi\mathrm{i}}{(3+\mathrm{i})^{10}}\sin\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

积分的计算方法汇总


若 $f(z)$ 包含 $|z|, \overline{z},$ 可先尝试通过 C 的方程将这些换成 z 的表达式
定积分 $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ 的计算
是闭路
是
内 (外) 部只有孤立奇点
是
闭路内部和外部孤立奇点数量
闭路内奇点留数之和并乘 $2\pi\mathrm{i}$
闭路内易计算
闭路外易计算
闭路外奇点留数之和并乘 $-2\pi\mathrm{i}$
否
否
设曲线方程为 $z(t)$, 则积分 $=\int_a^b f(z)z'(t)\,\mathrm{d}t$
可能需要分段计算
$f(z)$ 解析
否
是
求出 $f(z)$ 的原函数 $F(z)$ 得到 $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = F(b) - F(a)$

第二节　留数的应用

- 三角函数的有理函数的积分
- 有理函数以及与正弦、余弦之积的广义积分
- 含幂函数和对数函数的积分

三角函数的有理函数的积分

本节中我们将对若干种在实变中难以计算的定积分和广义积分使用复变函数和留数的技巧进行计算. 相应计算公式会在考试中按需提供.

考虑 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$, 其中 R 是一个有理函数. 令 $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 则 $\mathrm{d}z = \mathrm{i}z\,\mathrm{d}\theta$,

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big) = \frac{z^2+1}{2z}, \quad \sin\theta = \frac{1}{2\mathrm{i}}\Big(z - \frac{1}{z}\Big) = \frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z},$$

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = \oint_{|z|=1} R\Big(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}\Big)\frac{1}{\mathrm{i}z}\,\mathrm{d}z.$$

由于被积函数是一个有理函数, 它的积分可以由 $|z| < 1$ 内奇点留数得到.

例题: 三角函数的有理函数的积分

例. 求 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{5-3\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta.$

解. 令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 则 $\mathrm{d}z=\mathrm{i}z\,\mathrm{d}\theta$,

$$\cos\theta=\frac{1}{2}\Big(z+\frac{1}{z}\Big)=\frac{z^2+1}{2z},\qquad \sin\theta=\frac{1}{2\mathrm{i}}\Big(z-\frac{1}{z}\Big)=\frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z},$$

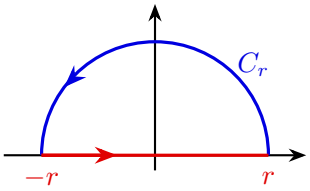
$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{5-3\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta=\oint_{|z|=1}\frac{(z^2-1)^2}{-4z^2}\cdot\frac{1}{5-3\dfrac{z^2+1}{2z}}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}=-\frac{\mathrm{i}}{6}\oint_{|z|=1}\frac{(z^2-1)^2}{z^2(z-3)(z-\frac{1}{3})}\,\mathrm{d}z.$$

设 $f(z)=\dfrac{(z^2-1)^2}{z^2(z-3)(z-\frac{1}{3})}$, 则 $\mathrm{Res}[f(z),0]=\dfrac{10}{3}, \mathrm{Res}[f(z),\dfrac{1}{3}]=-\dfrac{8}{3}$,

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{5-3\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta=-\frac{\mathrm{i}}{6}\cdot 2\pi\mathrm{i}\Big[\mathrm{Res}[f(z),0]+\mathrm{Res}[f(z),\frac{1}{3}]\Big]=\frac{2\pi}{9}.$$

考虑 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$, 其中 $f(x)$ 是一个有理函数, 分母比分子至少高 2 次, 且分母没有实根. 我们先考虑 $\int_{-r}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x$. 设 $C = C_r + [-r, r]$ 如下图所示, 使得上半平面内 $f(z)$ 的奇点均在 C 内, 则

$$2\pi\mathrm{i} \sum_{\operatorname{Im} a>0} \operatorname{Res}[f(z), a] = \oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-r}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{C_r} f(z)\,\mathrm{d}z.$$



由于 $f(x)$ 分母次数比分子至少高 2 次, 当 $r \to +\infty$ 时,

$$\left|\int_{C_r} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \pi r \max_{|z|=r}|f(z)| = \pi \max_{|z|=r}|zf(z)| \to 0.$$

故

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\mathrm{Im}\, a>0} \mathrm{Res}[f(z), a].$$

这里, 由于积分收敛, 因此广义积分值和其柯西主值

$$\mathrm{P.V.}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to+\infty}\int_{-r}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x$$

相等.

例题: 有理函数的广义积分

例. 求 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^3}, a>0.$

解. $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+a^2)^3}$ 在上半平面内的奇点为 $a\mathrm{i}$.

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}[f(z), a\mathrm{i}] &= \frac{1}{2!}\lim_{z\to a\mathrm{i}}\left[\frac{1}{(z+a\mathrm{i})^3}\right]'' \\ &= \frac{1}{2}\lim_{z\to a\mathrm{i}}\frac{12}{(z+a\mathrm{i})^5} = \frac{3}{16a^5\mathrm{i}},\end{aligned}$$

故

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^3} = 2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}[f(z), a\mathrm{i}] = \frac{3\pi}{8a^5}.$$

考虑 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x$, 其中 $f(x)$ 是一个有理函数, 分母比分子至少高 2 次, 且分母没有实根. 和前一种情形类似, 当 $\lambda>0$ 时, 我们有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{\mathrm{Im}\,a>0}\mathrm{Res}[f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda z}, a],$$

因此所求积分分别为它的实部和虚部.

例题: 有理函数与正弦、余弦之积的广义积分

例. 求 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}, a>0.$

解. $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z^2+a^2)^2}$ 在上半平面内的奇点为 $a\mathrm{i}$,

$$\mathrm{Res}[f(z),a\mathrm{i}]=\lim_{z\to a\mathrm{i}}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z+a\mathrm{i})^2}\right]'=-\frac{\mathrm{e}^{-a}(a+1)\mathrm{i}}{4a^3}.$$

故

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}=2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}[f(z),a\mathrm{i}]=\frac{\pi\mathrm{e}^{-a}(a+1)}{2a^3},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}=\frac{\pi\mathrm{e}^{-a}(a+1)}{2a^3}.$$

定理. 设实数 p 不是整数, $f(x)$ 是一个有理函数, 分母没有正实根, 且满足

$$\lim_{x\to 0} x^{p+1} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} x^{p+1} f(x) = 0,$$

则

$$\int_0^{+\infty} f(x)x^p \,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{\sin p\pi} \sum_a \operatorname{Res}\left[\mathrm{e}^{p\ln(-z)} f(z), a\right],$$

其中 a 取遍 $f(z)$ 的非零奇点.

例题: 含幂函数的积分

例. 计算 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x, 0<p<1.$

解. 设

$$f(z)=\frac{\mathrm{e}^{p\ln(-z)}}{z(z+1)},$$

则 $f(z)$ 在正实轴和零以外的奇点为 $a=-1$, 且

$$\operatorname{Res}[f(z),-1]=\lim_{z\to -1}\frac{\mathrm{e}^{p\ln(-z)}}{z}=-\mathrm{e}^{p\ln 1}=-1.$$

因此

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^p}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

定理. 设 $f(x)$ 是一个有理函数, 分母没有非负实根, 且分母至少比分子高 2 次, 则

$$\int_0^{+\infty} f(x)\ln x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\sum_a \mathrm{Res}[\ln^2(-z)f(z), a],$$

其中 a 取遍 $f(z)$ 的奇点.

例题: 含对数函数的积分

例. 计算 $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x.$

解. 设

$$f(z)=\frac{\ln^2(-z)}{z^2-2z+2},$$

则 $f(z)$ 在正实轴和零以外的奇点为 $1\pm\mathrm{i}$, 且

$$\operatorname{Res}[f(z),1+\mathrm{i}]=\lim_{z\to 1+\mathrm{i}}\frac{\ln^2(-z)}{z-(1-\mathrm{i})}=\frac{1}{2\mathrm{i}}\Big(\frac{1}{2}\ln 2-\frac{3\pi\mathrm{i}}{4}\Big)^2,$$

$$\operatorname{Res}[f(z),1-\mathrm{i}]=\lim_{z\to 1-\mathrm{i}}\frac{\ln^2(-z)}{z-(1+\mathrm{i})}=-\frac{1}{2\mathrm{i}}\Big(\frac{1}{2}\ln 2+\frac{3\pi\mathrm{i}}{4}\Big)^2.$$

例题: 含对数函数的积分

由于二者互为共轭, 二者之和为

$$2\,\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{2}\ln 2-\frac{3\pi\mathrm{i}}{4}\right)^2\right]=-\frac{3\pi}{4}\ln 2.$$

因此

$$I=\frac{3\pi}{8}\ln 2.$$

第七章　积分变换

1. 傅里叶变换
2. 拉普拉斯变换

第一节　傅里叶变换

- 积分变换的引入
- 傅里叶级数
- 傅里叶变换的定义
- 狄拉克 δ 函数
- 傅里叶变换的性质
- 傅里叶变换的应用

积分变换的引入

在学习指数和对数的时候, 我们了解到利用对数可以将乘除、幂次转化为加减、乘除.

例. 计算 12345×67890.

解. 通过查对数表得到

$$\ln 12345 \approx 9.4210, \qquad \ln 67890 \approx 11.1256.$$

将二者相加并通过反查对数表得到原值

$$12345 \times 67890 \approx \exp(20.5466) \approx 8.3806 \times 10^8.$$

而对于函数而言，我们常常要解函数的方程.

例. 解微分方程

$$\begin{cases} y'' + y = t, \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

解. 我们希望能找到一种函数的**变换** $\mathscr{L}$，使得它可以把函数的微分和积分变成代数运算，计算之后通过**反变换** $\mathscr{L}^{-1}$ 求得原来的解.

这个变换最常见的就是我们将要介绍的**傅里叶变换**和**拉普拉斯变换**.

周期函数的傅里叶级数展开

为了引入傅里叶变换, 我们回顾下傅里叶级数.

考虑定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上周期为 $T > 0$ 的函数 $f(t)$. 例如

$$1, \sin \omega t, \cos \omega t, \sin 2\omega t, \cos 2\omega t, \sin 3\omega t, \cos 3\omega t, \ldots$$

的周期都是 T, 其中 $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$. 类似于线性组合的概念, 我们希望将 f 表达为上述函数的线性叠加. 若 $f(t)$ 在 $\left[-\dfrac{T}{2}, \dfrac{T}{2}\right]$ 上满足狄利克雷条件:

- 间断点只有有限多个, 且均为第一类间断点;
- 只有有限个极值点,

则我们有傅里叶级数展开:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t \Big).$$

当 t 是间断点时, 傅里叶级数的左侧需改为 $\dfrac{f(t+) + f(t-)}{2}$.

我们来将其改写为复指数形式. 由

$$\cos x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}, \quad \sin x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}$$

可知 $f(t)$ 的傅里叶级数可以表示为函数 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t}$ 的线性叠加

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t}.$$

现在我们来计算这个线性叠加的系数.

对于定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上周期为 $T > 0$ 的复值函数 f, g, 定义内积

$$(f, g) := \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\overline{g}(t)\,\mathrm{d}t.$$

那么

$$(\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\omega t}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t}) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-n)\omega t}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

所以

$$\cdots, \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega t}, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}, 1, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}, \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega t}, \cdots$$

是一组标准正交基. 于是

$$c_n = (f, \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t}) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega t}\,\mathrm{d}t,$$

我们得到周期函数傅里叶级数的复指数形式:

$$f(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t}.$$

帕塞瓦尔恒等式

我们可以利用傅里叶级数计算一些级数的和. 由

$$(f,f)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_m\overline{c_n}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\omega t},\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n|^2$$

可得如下等式 (本章中这些用于计算级数和积分的定理会在考试时按需提供):

帕塞瓦尔恒等式. 对于周期为 T 的函数 $f(t)$, 我们有

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n|^2,$$

其中 c_n 是它的傅里叶系数, 即 $f(t)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}c_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t}$.

例题: 帕塞瓦尔恒等式的应用

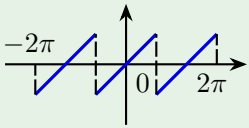
例. 计算 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

解. 设 $f(t)$ 是一个周期为 2π 的函数, 且当 $t\in[-\pi,\pi)$ 时 $f(t)=t$. 当 $n\neq 0$ 时,

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\Big(\frac{\mathrm{i}t}{n}+\frac{1}{n^2}\Big)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{(-1)^n\mathrm{i}}{n}.$$

$$c_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{t^2}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi}=0.$$

因此 $\displaystyle\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n^2}=(f,f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}t^2\,\mathrm{d}t=\frac{\pi^2}{3}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.



对于一般的函数 $f(t)$, 它未必是周期的. 此时它无法像前面的情形一样, 表达成可数多个函数

$$\cdots, \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega t}, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}, 1, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}, \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega t}, \cdots$$

的线性叠加, 而是**所有的** $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}, \omega \in (-\infty, +\infty)$ **的叠加**. 这种叠加的 ''系数'' 应当是无穷小方可, 而求和应当改为积分. 所以, 若记 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ 的 ''系数'' 为函数 $\dfrac{1}{2\pi}F(\omega)$, 则

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega.$$

我们来从傅里叶级数形式地推导出函数 $F(\omega)$. 考虑 $f(t)$ 它在 $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ 上的限制, 并向两边扩展成一个周期函数 $f_T(t)$. 设

$$\omega_n = n\omega, \quad \Delta\omega_n = \omega_n - \omega_{n-1} = \omega,$$

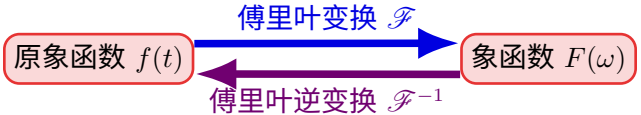
则

$$\begin{aligned} f(t) = \lim_{T\to+\infty} f_T(t) &= \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_n\tau}\,\mathrm{d}\tau\right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\Delta\omega_n\to 0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_n\tau}\,\mathrm{d}\tau\right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n t}\,\Delta\omega_n \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau\right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega. \end{aligned}$$

傅里叶积分定理. 若 $f(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积, 且在任一有限区间上满足狄利克雷条件, 则

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega,\qquad F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t.$$

对于 $f(t)$ 的间断点左边需要改成 $\frac{f(t+)+f(t-)}{2}$.



若 $f(t)$ 表示随时间 t 变化的函数, 那么 $F(\omega)$ 表示的是频率 ω 的函数, 所以傅里叶变换是时域到频域的转换.

傅里叶积分公式的三角形式

傅里叶积分公式有一些变化形式. 例如:

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big[\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau}_{\omega\text{ 的偶函数}} + \mathrm{i}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\sin\omega(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau}_{\omega\text{ 的奇函数}}\Big]\,\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega.
\end{aligned}
$$

此即傅里叶积分公式的三角形式.

若 $f(t)$ 是偶函数, 则 $f(t)\cos\omega t$ 是偶函数, $f(t)\sin\omega t$ 是奇函数,

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t=2\int_{0}^{+\infty}f(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t$$

也是偶函数, 从而得到**傅里叶余弦积分公式**:

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{0}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega\tau\,\mathrm{d}\tau\right]\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega.$$

类似地, 若 $f(t)$ 是奇函数, 则 $F(\omega)=2\mathrm{i}\int_{0}^{+\infty}f(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t$ 也是奇函数, 且有**傅里叶正弦积分公式**:

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{0}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega\tau\,\mathrm{d}\tau\right]\sin\omega t\,\mathrm{d}\omega.$$

例题: 求傅里叶变换

例. 求矩形脉冲函数 $f(t)=\begin{cases}1/2, & |t|\leqslant 1,\\ 0, & |t|>1\end{cases}$ 的傅里叶变换.

解. 由于 $f(t)$ 是偶函数, 因此

$$F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\cos\omega t\,\mathrm{d}t=\frac{\sin\omega}{\omega}.$$

它的傅里叶变换为 sinc 函数 $\operatorname{sinc}(x)=\dfrac{\sin x}{x}$.

例题: 求傅里叶变换

由傅里叶积分公式

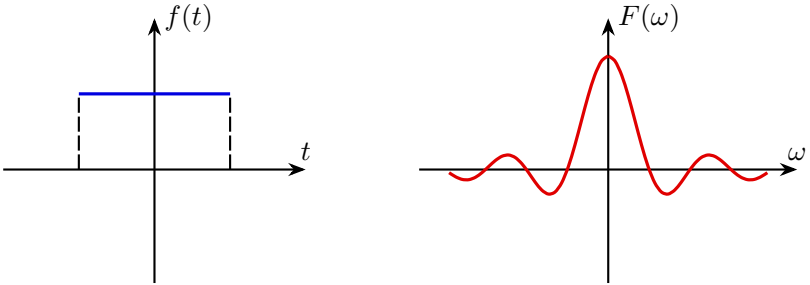
$$f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}(\cos\omega t+\mathrm{i}\sin\omega t)\,\mathrm{d}\omega=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}\,\mathrm{d}\omega.$$

当 $t=\pm1$ 时, 左侧应替换为 $\frac{f(t+)+f(t-)}{2}=\frac{1}{4}$. 由此可得

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}\,\mathrm{d}\omega=\begin{cases}\pi/2, & |t|<1,\\ \pi/4, & |t|=1,\\ 0, & |t|>1.\end{cases}$$

特别地, 可以得到狄利克雷积分 $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}\,\mathrm{d}\omega=\frac{\pi}{2}$.

例题: 求傅里叶变换



我们将 $f(t), F(\omega)$ 称为傅里叶变换对. 不难发现 $F(t), 2\pi f(-\omega)$ 也是傅里叶变换对 (不连续点处值需要修改). 故

$$\mathscr{F}[\mathrm{sinc}(t)] = \begin{cases} \pi, & |\omega| < 1, \\ \pi/2, & |\omega| = 1, \\ 0, & |\omega| > 1. \end{cases}.$$

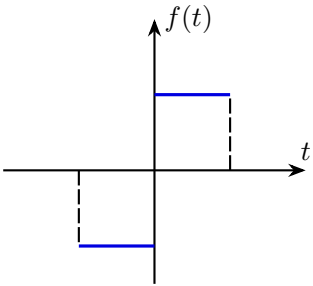
例题: 求傅里叶变换

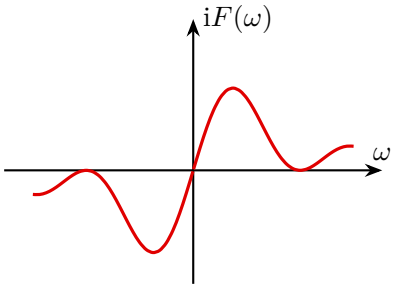
例. 求函数 $f(t)=\begin{cases}1, & t\in(0,1),\\ -1, & t\in(-1,0),\\ 0, & \text{其它情形}\end{cases}$ 的傅里叶变换.

解. 由于 $f(t)$ 是奇函数, 因此

$$F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t=-2\mathrm{i}\int_{0}^{+\infty}f(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t$$
$$=-2\mathrm{i}\int_{0}^{1}\sin\omega t\,\mathrm{d}t=-\frac{2\mathrm{i}(1-\cos\omega)}{\omega}.$$

例题: 求傅里叶变换





类似可得 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(1-\cos\omega)\sin\omega t}{\omega}\,\mathrm{d}\omega = \begin{cases} \pi/2, & 0<t<1, \\ \pi/4, & t=1, \\ 0, & t>1. \end{cases}$

例题: 求傅里叶变换

例. 求**指数衰减函数** $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \mathrm{e}^{-\beta t}, & t\geqslant 0\end{cases}$ 的傅里叶变换, $\beta>0$.

解.

$$\begin{aligned}F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t\\&=\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\beta t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t=\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(\beta+\mathrm{i}\omega)t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\beta+\mathrm{i}\omega}.\end{aligned}$$

类似可得 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\beta\cos\omega t+\omega\sin\omega t}{\beta^2+\omega^2}\,\mathrm{d}\omega=\begin{cases}0, & t<0,\\ \pi/2, & t=0,\\ \pi\mathrm{e}^{-\beta t}, & t>0.\end{cases}$

例题: 求傅里叶变换

例. 求**钟形脉冲函数** $f(t)=\mathrm{e}^{-\beta t^2}$ 的傅里叶变换和积分表达式, $\beta>0$.

解.

$$
\begin{aligned}
F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\beta t^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t\\
&=\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\beta\Big(t+\frac{\mathrm{i}\omega}{2\beta}\Big)^2\right]\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}.
\end{aligned}
$$

类似可得 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega=\sqrt{\pi\beta}\mathrm{e}^{-\beta t^2}$.

傅里叶变换存在的条件是比较苛刻的. 例如常值函数 $f(t)=1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不是可积的, 所以它没有傅里叶变换, 这很影响我们使用傅里叶变换. 为此我们引入广义函数的概念.

设 $\mathscr{S}$ 是由一些 ''非常好'' 的函数 (光滑速降函数) 形成的线性空间. 从一个 (局部可积缓增) 函数 $\lambda(t)$ 出发, 我们可以定义一个线性映射 $\mathscr{S}\to\mathbb{R}$:

$$\langle\lambda,f\rangle:=\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda(t)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

这个线性映射基本上确定了 $\lambda(t)$ 本身.

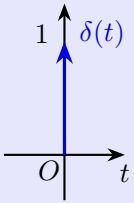
广义函数 (分布)就是指一个线性映射 $\mathscr{S}\to\mathbb{R}$. 为了和普通函数类比, 也可将广义函数表为上述积分形式 (并不是真的积分):

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda(t)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

这里的 $\lambda(t)$ 并不表示一个真正的函数.

定义. 狄拉克 δ 函数是指广义函数

$$\langle \delta, f \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t)\,\mathrm{d}t = f(0).$$



设 $\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon, & 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon, \\ 0, & \text{其它情形,} \end{cases}$ 则

$$\langle \delta_\varepsilon, f \rangle = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon f(t)\,\mathrm{d}t = f(\xi), \quad \xi \in (0, \varepsilon).$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时, 右侧就趋于 $f(0)$. 因此 δ 可以看成 δ_ε 的 "弱极限". 基于此, 我们通常用长度为 1 的有向线段来表示它.

对于广义函数 λ, 我们可以形式地定义 $\lambda(at), \lambda'$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(at) f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(t) \cdot \frac{1}{|a|} f(\frac{t}{a})\,\mathrm{d}t,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda'(t) f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(t) f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

由此可知

- $\langle \delta^{(n)}, f\rangle = (-1)^n f^{(n)}(0)$, 其中 $f(t)$ 是光滑函数.
- $\delta(at) = \dfrac{1}{|a|}\delta(t)$. 特别地 $\delta(t) = \delta(-t)$.
- $u'(t) = \delta(t)$, 其中 $u(t) = \begin{cases} 1, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ 是单位阶跃函数.

根据 δ 函数的定义可知

$$\mathscr{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t = 1.$$

同理可得其傅里叶逆变换. 因此我们得到:

$$\mathscr{F}[\delta(t)] = 1, \qquad \mathscr{F}^{-1}[\delta(\omega)] = \frac{1}{2\pi}.$$

例题: 求傅里叶变换

例. 证明 $\mathscr{F}[u(t)] = \dfrac{1}{\mathrm{i}\omega} + \pi\delta(\omega)$.

证明.

$$\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{\mathrm{i}\omega}\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\mathrm{i}\omega}\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}\,\mathrm{d}\omega.$$

由 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}\,\mathrm{d}\omega = \frac{\pi}{2}$ 可知 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}\,\mathrm{d}\omega = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(t)$.故

$$\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{\mathrm{i}\omega} + \pi\delta(\omega)\right] = \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t) + \frac{1}{2} = u(t) \quad (t \neq 0).$$

□

傅里叶变换的性质：线性性质

我们不可能也没必要每次都对需要变换的函数从定义出发计算傅里叶变换. 通过研究傅里叶变换的性质, 结合常见函数的傅里叶变换, 我们可以得到很多情形的傅里叶变换.

线性性质.

$$\mathscr{F}[\alpha f+\beta g]=\alpha F+\beta G,\quad \mathscr{F}^{-1}[\alpha F+\beta G]=\alpha f+\beta g.$$

位移性质.

$$\mathscr{F}[f(t-t_0)]=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t_0}F(\omega),\quad \mathscr{F}^{-1}[F(\omega-\omega_0)]=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}f(t).$$

证明.

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[f(t-t_0)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-t_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t+t_0)}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t_0}F(\omega).\end{aligned}$$

逆变换情形类似可得. □

由此可得

$$\mathscr{F}[\delta(t-t_0)] = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t_0}, \quad \mathscr{F}^{-1}[\delta(\omega-\omega_0)] = \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}.$$

典型例题: 计算傅里叶变换

例. 求 $\sin\omega_0 t$ 的傅里叶变换.

解. 由于 $\mathscr{F}[1]=2\pi\delta(\omega)$, 因此 $\mathscr{F}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}]=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$,

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[\sin\omega_0 t]&=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\mathscr{F}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}]-\mathscr{F}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}]\right]\\&=\frac{1}{2\mathrm{i}}[2\pi\delta(\omega-\omega_0)-2\pi\delta(\omega+\omega_0)]\\&=\mathrm{i}\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)].\end{aligned}$$

练习. $\mathscr{F}[\cos\omega_0 t]=$ $\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$.

常见傅里叶变换汇总

与 δ 函数有关的傅里叶变换汇总.

(1) $\mathscr{F}[\delta(t)] = 1$, $\mathscr{F}[\delta(t-t_0)] = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t_0}$;

(2) $\mathscr{F}[1] = 2\pi\delta(\omega)$, $\mathscr{F}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$;

(3) $\mathscr{F}[\sin\omega_0 t] = \mathrm{i}\pi[\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0)]$;

(4) $\mathscr{F}[\cos\omega_0 t] = \pi[\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)]$;

(5) $\mathscr{F}[u(t)] = \dfrac{1}{\mathrm{i}\omega} + \pi\delta(\omega)$.

傅里叶变换的性质：微分性质

微分性质.

$$\mathscr{F}[f'(t)] = \mathrm{i}\omega F(\omega), \quad \mathscr{F}^{-1}[F'(\omega)] = -\mathrm{i}tf(t),$$
$$\mathscr{F}[f^{(k)}(t)] = (\mathrm{i}\omega)^k F(\omega), \quad \mathscr{F}^{-1}[F^{(k)}(\omega)] = (-\mathrm{i}t)^k f(t).$$

这里，被变换的函数要求在 ∞ 处趋于 0.

证明.

$$\mathscr{F}[f'] = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t})'\,\mathrm{d}t = \mathrm{i}\omega F(\omega)$$

逆变换情形类似可得. 一般的 k 归纳可得. □

乘多项式性质.

$$\mathscr{F}[tf(t)] = \mathrm{i}F'(\omega), \quad \mathscr{F}^{-1}[\omega F(\omega)] = -\mathrm{i}f'(t),$$
$$\mathscr{F}[t^k f(t)] = \mathrm{i}^k F^{(k)}(\omega), \quad \mathscr{F}^{-1}[\omega^k F(\omega)] = (-\mathrm{i})^k f^{(k)}(t).$$

积分性质.

$$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] = \frac{1}{\mathrm{i}\omega}F(\omega) + \pi\delta(\omega)\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

由变量替换易得

相似性质.

$$\mathscr{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|}F\Big(\frac{\omega}{a}\Big), \quad \mathscr{F}^{-1}[F(a\omega)] = \frac{1}{|a|}f\Big(\frac{t}{a}\Big).$$

典型例题: 计算傅里叶变换

例. 求 $\mathscr{F}[t^k \mathrm{e}^{-\beta t} u(t)], \beta > 0.$

解. 由于

$$\mathscr{F}[\mathrm{e}^{-\beta t} u(t)] = \frac{1}{\beta + \mathrm{i}\omega},$$

因此

$$\mathscr{F}[t^k \mathrm{e}^{-\beta t} u(t)] = \mathrm{i}^k \Big(\frac{1}{\beta + \mathrm{i}\omega}\Big)^{(k)} = \frac{k!}{(\beta + \mathrm{i}\omega)^{k+1}}.$$

由此可得任意真分式的傅里叶 (逆) 变换.

例题: 周期函数的傅里叶变换

例. 设 $f(t)$ 的傅里叶变换为 $F(\omega)$. 求 $g(t)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} f(t+nT)$ 的傅里叶变换.

解. $g(t)$ 是一个周期为 T 的函数, 设 $\omega_0=\dfrac{2\pi}{T}$. 它的傅里叶展开的系数为

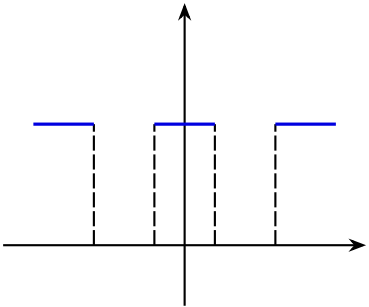
$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\int_0^T f(t+mT)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega_0 t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\int_{mT}^{(m+1)T} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega_0 t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega_0 t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}F(n\omega_0), \end{aligned}$$

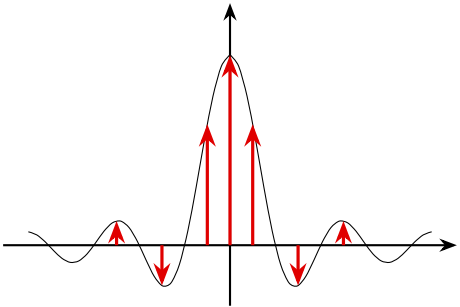
因此

$$G(\omega)=\mathscr{F}[g(t)]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}2\pi c_n\delta(\omega-n\omega_0)=\frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(n\omega_0)\delta(\omega-n\omega_0).$$

例题: 周期函数的傅里叶变换

函数 $f(t)$ 的周期扩展 $g(t)$ 的傅里叶变换是一系列脉冲函数的组合, 而各个脉冲的强度正是由 $F(\omega)$ 所决定. 例如矩形脉冲函数作周期扩展后得到通断比为 $\frac{1}{2}$ 的方波信号, 它的傅里叶变换就是一系列脉冲函数的组合, 各个脉冲函数的强度为脉冲函数所在时间的 sinc 函数值的 $\frac{2\pi}{T}$ 倍.





乘积定理. 若 $\mathscr{F}[f(t)] = F(\omega), \mathscr{F}[g(t)] = G(\omega)$, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\overline{G(\omega)}\,\mathrm{d}\omega.$$

特别地,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega.$$

此即 $(F, G) = 2\pi(f, g)$. 这表明 $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathscr{F}$ 是正交变换.

例题: 乘积定理的应用

例. 计算 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$

解. 由于

$$f(t)=\begin{cases}1, & t\in(0,1),\\ -1, & t\in(-1,0),\\ 0, & \text{其它情形}.\end{cases}$$

的傅里叶变换为 $F(\omega)=-2\mathrm{i}\dfrac{1-\cos\omega}{\omega}$. 因此

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\frac{1-\cos 2x}{2x}\Big)^2\,\mathrm{d}(2x)=\frac{1}{8}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega\\ &=\frac{1}{8}\cdot 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

定理. $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(2\pi n)$, 间断点处需修改为左右极限平均值.

证明. 根据前面的例子可知, $g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t+n)$ 的傅里叶展开为

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(2\pi n)\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} n t}.$$

令 $t = 0$ 即得. □

例题: 泊松求和公式的应用

例. 计算 $S=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2+a^2}$. 由 $\mathscr{F}[\mathrm{e}^{-\beta t}u(t)]=\dfrac{1}{\beta+\mathrm{i}\omega}$ 和对称性质可知

$$\mathscr{F}\left[\frac{1}{\beta+\mathrm{i}t}\right]=2\pi\mathrm{e}^{\beta\omega}u(-\omega),\quad \omega\neq 0.$$

由相似性质,

$$\mathscr{F}\left[\frac{1}{\beta-\mathrm{i}t}\right]=2\pi\mathrm{e}^{-\beta\omega}u(\omega),\quad \omega\neq 0.$$

因此

$$F(\omega)=\mathscr{F}\left[\frac{1}{t^2+a^2}\right]=\frac{1}{2a}\mathscr{F}\left[\frac{1}{a+\mathrm{i}t}+\frac{1}{a-\mathrm{i}t}\right]=\frac{\pi}{a}\mathrm{e}^{-a|\omega|}.$$

$$S=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(2\pi n)=\frac{\pi}{a}\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-2\pi an}\right)=\frac{\pi}{a\,\mathrm{th}\,\pi a}.$$

卷积

定义. $f_1(t), f_2(t)$ 的卷积是指

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

卷积满足如下重要性质:

卷积定理.

$$\mathscr{F}[f_1 * f_2] = F_1 \cdot F_2, \quad \mathscr{F}^{-1}[F_1 * F_2] = \frac{1}{2\pi} f_1 \cdot f_2.$$

证明.

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[f_1 * f_2] &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\cdot f_2(t-\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-\tau)}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\cdot f_2(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t = \mathscr{F}[f_1]\mathscr{F}[f_2].\end{aligned}$$

□

由函数的乘法性质可知卷积满足如下性质:

- $f_1 * f_2 = f_2 * f_1,\ (f_1 * f_2) * f_3 = f_1 * (f_2 * f_3)$;
- $f_1 * (f_2 + f_3) = f_1 * f_2 + f_1 * f_3$;
- $f * \delta = f$;
- $(f_1 * f_2)' = f_1' * f_2 = f_1 * f_2'$.

例题: 计算卷积

例. 设 $f_1(t)=u(t), f_2(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t)$. 求 f_1*f_2.

解.

$$(f_1*f_2)(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\tau)f_1(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\tau}u(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

当 $t<0$ 时, $(f_1*f_2)(t)=0$. 当 $t\geqslant 0$ 时,

$$(f_1*f_2)(t)=\int_0^t \mathrm{e}^{-\tau}\,\mathrm{d}\tau=1-\mathrm{e}^{-t}.$$

故 $(f_1*f_2)(t)=(1-\mathrm{e}^{-t})u(t)$.

例. 求 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}\cdot\frac{\sin(\omega/3)}{\omega/3}\,\mathrm{d}\omega.$

解. 设 $F(\omega)=\frac{\sin\omega}{\omega}, G(\omega)=\frac{\sin(\omega/3)}{\omega/3}$,则

$$\mathscr{F}^{-1}[FG]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)G(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega,$$

$$\mathscr{F}^{-1}[FG](0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)G(\omega)\,\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}I.$$

例题: 卷积的应用

我们之前计算过

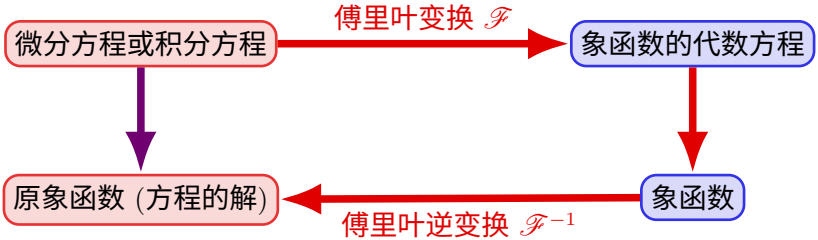
$$\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)] = f(t) = \begin{cases} 1/2, & |t| < 1, \\ 1/4, & |t| = 1, \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$$

所以 $\mathscr{F}^{-1}[G(\omega)] = g(t) = 3f(3t)$,

$$\begin{aligned} \mathscr{F}^{-1}[FG](0) &= (f * g)(0) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(-t)g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

故 $I = 2\pi\mathscr{F}^{-1}[FG](0) = \pi$.

使用傅里叶变换解微积分方程



例题: 使用傅里叶变换解微积分方程

例. 解方程 $y'(t) - \int_{-\infty}^{t} y(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 2\delta(t)$.

解. 设 $\mathscr{F}[y] = Y$. 两边同时作傅里叶变换得到

$$\mathrm{i}\omega Y(\omega) - \frac{1}{\mathrm{i}\omega} Y(\omega) - \pi Y(0)\delta(\omega) = 2,$$

$$Y(\omega) = -\frac{\mathrm{i}\omega}{1+\omega^2}\left[2 + \pi Y(0)\delta(\omega)\right] = -\frac{2\mathrm{i}\omega}{1+\omega^2} = \frac{1}{1+\mathrm{i}\omega} - \frac{1}{1-\mathrm{i}\omega},$$

$$y(t) = \mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{1+\mathrm{i}\omega} - \frac{1}{1-\mathrm{i}\omega}\right] = \begin{cases} 0 - \mathrm{e}^{t} = -\mathrm{e}^{t}, & t < 0, \\ 0, & t = 0, \\ \mathrm{e}^{-t} - 0 = \mathrm{e}^{-t}, & t > 0. \end{cases}$$

例题: 使用傅里叶变换解微积分方程

例. 解方程 $y''(t) - y(t) = 0$.

解. 设 $\mathscr{F}[y] = Y$, 则

$$\mathscr{F}[y''(t) - y(t)] = [(\mathrm{i}\omega)^2 - 1]Y(\omega) = 0,$$

$$Y(\omega) = 0, \quad y(t) = \mathscr{F}^{-1}[Y(\omega)] = 0.$$

显然这是不对的, 该方程的解应该是 $y(t) = C_1\mathrm{e}^t + C_2\mathrm{e}^{-t}$.

原因在于使用傅里叶变换要求函数是绝对可积的, 而 $\mathrm{e}^t, \mathrm{e}^{-t}$ 并不满足该条件. 我们需要一个对函数限制更少的积分变换来解决此类方程, 例如拉普拉斯变换.

第二节　拉普拉斯变换

- 拉普拉斯变换
- 拉普拉斯变换的性质
- 拉普拉斯逆变换
- 拉普拉斯变换的应用

傅里叶变换对函数要求过高, 这使得在很多时候无法应用它, 或者要引入复杂的广义函数. 对于一般的 $f(t)$, 为了让它绝对可积, 我们考虑

$$f(t)u(t)\mathrm{e}^{-\beta t}, \quad \beta > 0.$$

它的傅里叶变换为

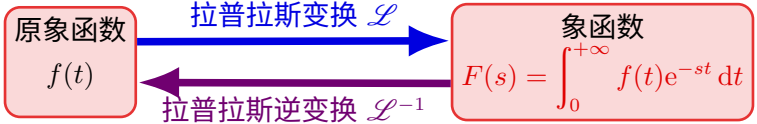
$$\mathscr{F}[f(t)u(t)\mathrm{e}^{-\beta t}] = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-(\beta+\mathrm{i}\omega)t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t,$$

其中 $s = \beta + \mathrm{i}\omega$. 这样的积分在我们遇到的多数情形都是存在的, 只要选择充分大的 $\beta = \operatorname{Re} s$. 我们称之为 $f(t)$ 的**拉普拉斯变换** $\mathscr{L}[f]$.

拉普拉斯变换存在定理. 若定义在 $[0,+\infty)$ 上的函数 $f(t)$ 满足

- $f(t)$ 在任一有限区间上至多只有有限多间断点;
- 存在 M,c 使得 $|f(t)|\leqslant M\mathrm{e}^{ct}$,

则 $F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$ 在 $\mathrm{Re}\,s>c$ 上存在且为解析函数.



虽然我们限定了函数只定义在 $t\geqslant 0$ 处, 但很多时候这不影响我们使用. 这是因为在物理学中, 很多时候我们只考虑系统自某个时间点开始之后的行为.

例题：求拉普拉斯变换

例. 求 $\mathscr{L}[\mathrm{e}^{at}]$.

解.

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[\mathrm{e}^{at}] &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{at}\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(s-a)t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{s-a}\mathrm{e}^{-(s-a)t}\Big|_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{s-a}, \quad \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a.\end{aligned}$$

即 $\boxed{\mathscr{L}[\mathrm{e}^{at}] = \dfrac{1}{s-a}}$.特别地 $\boxed{\mathscr{L}[1] = \dfrac{1}{s}}$.

例题: 求拉普拉斯变换

例. 求 $\mathscr{L}[t^m]$, 其中 m 是正整数.

解. 由前面的例子知道

$$\mathscr{F}[t^m \mathrm{e}^{-\beta t} u(t)] = \frac{m!}{(\beta + \mathrm{i}\omega)^{m+1}}.$$

因此 $\boxed{\mathscr{L}[t^m] = \dfrac{m!}{s^{m+1}}}$.

也可直接由分部积分和递推得到.

和傅里叶变换类似, 拉普拉斯变换也有着各种性质. 我们不加证明地列出它们.

拉普拉斯变换的性质.

- **(线性性质)** $\mathscr{L}[\alpha f+\beta g]=\alpha F+\beta G, \mathscr{L}^{-1}[\alpha F+\beta G]=\alpha f+\beta g$.
- **(积分性质)** $\mathscr{L}\left[\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]=\dfrac{1}{s}F(s)$.
- **(乘多项式性质)** $\mathscr{L}[tf(t)]=-F'(s), \quad \mathscr{L}[t^k f(t)]=(-1)^k F^{(k)}(s)$.
- **(延迟性质)** $\mathscr{L}[f(t-t_0)]=\mathrm{e}^{-st_0}F(s), t_0\geqslant 0$.
- **(位移性质)** $\mathscr{L}[\mathrm{e}^{s_0 t}f(t)]=F(s-s_0)$.

例题: 求拉普拉斯变换

例. 求 $\mathscr{L}[t^m \mathrm{e}^{at}]$, 其中 m 是正整数.

解. 由 $\mathscr{L}[t^m] = \dfrac{m!}{s^{m+1}}$ 可知

$$\mathscr{L}[t^m \mathrm{e}^{at}] = \frac{m!}{(s-a)^{m+1}}.$$

典型例题：求拉普拉斯变换

例. 求 $\mathscr{L}[\sin kt]$.

解.

$$\mathscr{L}[\sin kt] = \frac{\mathscr{L}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}] - \mathscr{L}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}]}{2\mathrm{i}}$$

$$= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{s-\mathrm{i}k} - \frac{1}{s+\mathrm{i}k}\right) = \boxed{\frac{k}{s^2+k^2}}.$$

练习. $\mathscr{L}[\cos kt] =$ ____ $\boxed{\frac{s}{s^2+k^2}}$ ____.

拉普拉斯变换的性质

微分性质.

$$\mathscr{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0),$$
$$\mathscr{L}[f''(t)] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0).$$

从拉普拉斯变换的微分性质可以看出, 拉普拉斯变换可以将微分方程转化为代数方程, 从而可用于解微分方程.

常见拉普拉斯变换汇总

与有理函数有关的拉普拉斯变换汇总.

(1) $\mathscr{L}[1]=\dfrac{1}{s}$, $\mathscr{L}[\mathrm{e}^{at}]=\dfrac{1}{s-a}$;

(2) $\mathscr{L}[t^m]=\dfrac{m!}{s^{m+1}}$, $\mathscr{L}[t^m\mathrm{e}^{at}]=\dfrac{m!}{(s-a)^{m+1}}$;

(3) $\mathscr{L}[\sin kt]=\dfrac{k}{s^2+k^2}$, $\mathscr{L}[\mathrm{e}^{at}\sin kt]=\dfrac{k}{(s-a)^2+k^2}$;

(4) $\mathscr{L}[\cos kt]=\dfrac{s}{s^2+k^2}$, $\mathscr{L}[\mathrm{e}^{at}\cos kt]=\dfrac{s-a}{(s-a)^2+k^2}$.

由于在拉普拉斯变换中, 我们考虑的函数在 $t < 0$ 时都是零. 此时函数的卷积变成了

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad t \geqslant 0,$$

且我们有如下的卷积定理.

卷积定理.

$$\mathscr{L}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s) \cdot F_2(s).$$

拉普拉斯逆变换可以由如下定理给出

拉普拉斯逆变换定理. 设 $F(s)$ 的所有奇点为 $s_1, \ldots, s_k$，且 $\lim\limits_{z\to\infty} F(z) = 0$，则

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left[F(s)\mathrm{e}^{st}, s_k\right].$$

不过我们只要求掌握如何利用常见函数的拉普拉斯变换来计算逆变换.

例题: 求拉普拉斯逆变换

例. 求 $F(s)=\dfrac{1}{s(s-1)^2}$ 的拉普拉斯逆变换.

解.

$$\mathrm{Res}[F(s)\mathrm{e}^{st},0]=\frac{\mathrm{e}^{st}}{(s-1)^2}\Big|_{s=0}=1,$$

$$\mathrm{Res}[F(s)\mathrm{e}^{st},1]=\left(\frac{\mathrm{e}^{st}}{s}\right)'\Big|_{s=1}=\frac{t\mathrm{e}^{st}s-\mathrm{e}^{st}}{s^2}\Big|_{s=1}=(t-1)\mathrm{e}^{t},$$

故 $\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=1+(t-1)\mathrm{e}^{t}$.

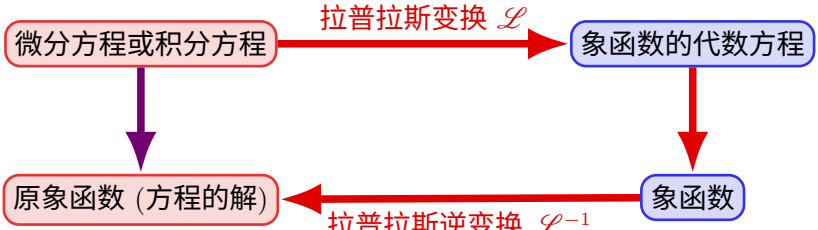
例题: 求拉普拉斯逆变换

另解. 设 $F(s)=\dfrac{a}{s}+\dfrac{b}{s-1}+\dfrac{c}{(s-1)^2}$, 则

$$
\begin{aligned}
a &= \mathrm{Res}[F(s),0]=\lim_{s\to 0} sF(s)=\frac{1}{(s-1)^2}\Big|_{s=0}=1,\\
b &= \mathrm{Res}[F(s),1]=\lim_{s\to 1}\big[(s-1)^2F(s)\big]'=\Big(\frac{1}{s}\Big)'\Big|_{s=1}=-\frac{1}{s^2}\Big|_{s=1}=-1,\\
c &= \mathrm{Res}[(s-1)F(s),1]=\lim_{s\to 1}(s-1)^2F(s)=\frac{1}{s}\Big|_{s=1}=1.
\end{aligned}
$$

故 $\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s-1}+\dfrac{1}{(s-1)^2}\right]=1+(t-1)\mathrm{e}^t.$

使用拉普拉斯变换解微积分方程



例题: 使用拉普拉斯变换解微分方程

例. 解微分方程 $\begin{cases} y'' + 2y = \sin t, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 2. \end{cases}$

解. 设 $\mathscr{L}[y] = Y$, 则 $\mathscr{L}[y''] = s^2Y - sy(0) - y'(0) = s^2Y - 2$, 因此

$$s^2Y - 2 + 2Y = \mathscr{L}[\sin t] = \frac{1}{s^2+1},$$

$$Y(s) = \frac{2}{s^2+2} + \frac{1}{(s^2+1)(s^2+2)} = \frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+2},$$

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+2}\right] = \sin t + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\sqrt{2}t).$$

例题: 使用拉普拉斯变换解微分方程

例. 解微分方程 $y''(t) - y(t) = 0.$

解. 设 $a = y(0), b = y'(0), \mathscr{L}[y] = Y$, 则

$$\mathscr{L}[y''] = s^2Y - as - b,$$

$$s^2Y - as - b - Y = 0,$$

$$Y(s) = \frac{as+b}{s^2-1} = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{1}{s-1} + \frac{a-b}{2} \cdot \frac{1}{s+1},$$

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}[Y(s)] = \frac{a+b}{2}\mathrm{e}^t + \frac{a-b}{2}\mathrm{e}^{-t}.$$

即通解为 $y(t) = C_1\mathrm{e}^t + C_2\mathrm{e}^{-t}.$