

2022 年 合 肥 工 业 大 学 试 卷 (A)

2022 ~ 2023 学年第一学期

复变函数与积分变换 (1400261B)

一、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. i^{-i} 的主值是_____.
2. 设 $z = -i$, 则 $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 =$ _____.
3. 设 C 为正向圆周 $|z| = 2$, 则积分 $\oint_C \left(\frac{\bar{z}}{z} \right) dz =$ _____.
4. 设 a, b, c 为实数. 如果函数 $f(z) = x^2 - 2xy - y^2 + i(ax^2 + bxy + cy^2)$ 在复平面上处处解析, 则 $a + b + c =$ _____.
5. 函数 $\sin t + i \cos t$ 的傅里叶变换为_____.

二、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 方程 $||z + i| - |z - i|| = 1$ 表示的曲线是 ().
A. 直线 B. 不是圆的椭圆 C. 双曲线 D. 圆周
2. 不等式 $-1 \leq \arg z \leq \pi - 1$ (包括 0) 确定的是 ().
A. 有界多连通闭区域 B. 有界单连通区域
C. 无界多连通区域 D. 无界单连通闭区域
3. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (iz)^n$ 的收敛半径是 ().
A. i B. $-i$ C. 1 D. $+\infty$
4. 下面哪个函数在 $z = 0$ 处不可导? ()
A. $2x + 3yi$ B. $2x^2 + 3y^2i$ C. $x^2 - xyi$ D. $e^x \cos y + ie^x \sin y$
5. 如果 z_0 是 $f(z)$ 的一阶极点, $g(z)$ 的一阶零点, 则 z_0 是 $f(z)^3 g(z)^2$ 的 ().
A. 一阶极点 B. 一阶零点 C. 可去奇点 D. 三阶极点

三、解答题

1. (6 分) 设 $z = \frac{3+i}{i} - \frac{10i}{3-i}$, 求 z 的模和辐角.
2. (6 分) 解方程 $\sin z = 2 \cos z$.
3. (6 分) 设 C 为从 i 到 $i - \pi$ 再到 $-\pi$ 的折线, 求 $\int_C \cos^2 z dz$.

4. (10 分) 设 C 为正向圆周 $|z - 3| = 4$, 求 $\oint_C \frac{e^{iz}}{z^2 - 3\pi z + 2\pi^2} dz$.
5. (10 分) 假设 $v(x, y) = x^3 + y^3 - axy(x + y)$ 是调和函数, 求参数 a 以及解析函数 $f(z)$ 使得 $v(x, y)$ 是它的虚部.
6. (10 分) 确定函数 $f(z) = \frac{z + 1}{(z - 1)^2}$ 在圆环域
 (1) $0 < |z| < 1$; (2) $1 < |z| < +\infty$
 内的洛朗级数展开式.
7. (10 分) 求 $f(z) = \frac{\cos z}{z^2(z^2 - \pi^2)}$ 在有限复平面内的奇点和相应的留数.
8. (9 分) 用拉普拉斯变换求解微分方程初值问题
- $$\begin{cases} y''(t) + 2y(t) = \sin t, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 2. \end{cases}$$
9. (3 分) 复变函数 $f(z) = \sin z$ 和实变量函数 $g(x) = \sin x$ 的性质有什么相似和不同之处? 试列举一二.

2022 年合肥工业大学考试参考答案 (A)

2022~2023 学年第一学期

复变函数与积分变换 (1400261B)

一、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

请将你的答案对应填在横线上:

1. $e^{\pi/2}$, 2. 1, 3. 0, 4. 2, 5. $2\pi i \delta(\omega + 1)$.

二、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

请将你所选择的字母 A, B, C, D 之一对应填在下列表格里:

题号	1	2	3	4	5
答案	C	D	C	A	A

三、解答题

1. (6 分) 【解】

由于 $z = -3i + 1 - i(3 + i) = 2 - 6i$, (2 分)

因此 $|z| = 2\sqrt{10}$, (2 分)

$\text{Arg } z = 2k\pi - \arctan 3, k \in \mathbb{Z}$ (2 分, 只有主值得 1 分)

2. (6 分) 【解】

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2 \cdot \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$e^{iz} - e^{-iz} = 2i(e^{iz} + e^{-iz}),$$

$$e^{2iz} = \frac{1 + 2i}{1 - 2i} = \frac{(1 + 2i)^2}{5}, \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$2iz = \text{Ln} \frac{(1 + 2i)^2}{5} = (2 \arctan 2 + 2k\pi)i, \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$z = \arctan 2 + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分, 只有主值得 1 分})$$

另解: 设 $z_0 = \arctan 2$, 则

$$\tan z = \tan z_0, \quad \sin z \cos z_0 = \sin z_0 \cos z, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\sin(z - z_0) = 0, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$z = z_0 + k\pi = \arctan 2 + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分, 只有主值得 1 分})$$

其它答案: $z = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arctan \frac{4}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

3. (6 分) 【解】

由于 $\cos^2 z$ 解析, 且 (1 分)

$$\int \cos^2 z \, dz = \int \frac{1 + \cos(2z)}{2} \, dz \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$= \frac{z}{2} + \frac{\sin(2z)}{4} + C, \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

因此

$$\begin{aligned}\int_C \cos^2 z \, dz &= \left(\frac{z}{2} + \frac{\sin(2z)}{4} \right) \Big|_i^{-\pi} \dots\dots\dots (1 \text{ 分}) \\ &= -\frac{\pi}{2} - \left(\frac{i}{2} + \frac{\sin(2i)}{4} \right) \dots\dots\dots (1 \text{ 分}) \\ &= -\frac{\pi}{2} + \frac{(e^{-2} - 4 - e^2)i}{8}. \dots\dots\dots (1 \text{ 分})\end{aligned}$$

4. (10 分) 【解】

由于 $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 - 3\pi z + 2\pi^2}$ 在 $|z - 3| \leq 4$ 内的奇点为 $\pi, 2\pi$, $\dots\dots\dots (3 \text{ 分})$
因此

$$\begin{aligned}\oint_C f(z) \, dz &= 2\pi i (\text{Res}[f(z), \pi] + \text{Res}[f(z), 2\pi]) \dots\dots\dots (2 \text{ 分}) \\ &= 2\pi i \left(\frac{e^{iz}}{z - 2\pi} \Big|_{z=\pi} + \frac{e^{iz}}{z - \pi} \Big|_{z=2\pi} \right) \dots\dots\dots (2 \text{ 分}) \\ &= 2\pi i \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} \right) = 4i. \dots\dots\dots (3 \text{ 分})\end{aligned}$$

5. (10 分) 【解】

由 $\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = 6x - 2ay + 6y - 2ax = 0$ 可知 $a = 3$. $\dots\dots\dots (3 \text{ 分})$
由

$$\begin{aligned}f'(z) &= v_y + iv_x \dots\dots\dots (2 \text{ 分}) \\ &= (3y^2 - 3x^2 - 6xy) + i(3x^2 - 6xy - 3y^2) \dots\dots\dots (2 \text{ 分}) \\ &= 3(i - 1)(x + iy)^2 = 3(i - 1)z^2 \dots\dots\dots (1 \text{ 分})\end{aligned}$$

可知 $f(z) = (i - 1)z^3 + C$, $C \in \mathbb{R}$. $\dots\dots\dots (2 \text{ 分, 没有常数项得 } 1 \text{ 分})$

其它解法: 由 $u_x = v_y = 3y^2 - 3x^2 - 6xy$ 得 $u = 3xy^2 - x^3 - 3x^2y + \psi(y)$. $\dots\dots\dots (2 \text{ 分})$

由 $u_y = -v_x = -(3x^2 - 6xy - 3y^2)$ 得 $\psi'(y) = 3y^2$,

$\psi(y) = y^3 + C$, $\dots\dots\dots (3 \text{ 分, 没有常数项得 } 2 \text{ 分})$

$$\begin{aligned}f(z) &= u + iv \\ &= 3xy^2 - x^3 - 3x^2y + y^3 + C + i(x^3 + y^3 - 3xy^2 - 3x^2y) \\ &= (i - 1)z^3 + C, \quad C \in \mathbb{R}. \dots\dots\dots (2 \text{ 分})\end{aligned}$$

6. (10 分) 【解】

由于 $f(z)$ 的奇点是 1, 因此 $f(z)$ 在这两个圆环域内都解析.

(1) 由于

$$\frac{1}{1 - z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

因此

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{z-1+2}{(z-1)^2} = \frac{1}{z-1} + \frac{2}{(z-1)^2} = -\frac{1}{1-z} + 2\left(\frac{1}{1-z}\right)' \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分}) \\&= -\sum_{n=0}^{\infty} z^n + 2\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)' = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n + 2\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} \\&= -\sum_{n=0}^{\infty} z^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)z^n. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})\end{aligned}$$

(2) 由于

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n}, \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

因此

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{1}{z-1} - 2\left(\frac{1}{z-1}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} - 2\left(\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n}\right)' \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分}) \\&= \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} - 2\sum_{n=1}^{\infty} (-n)z^{-n-1} \\&= \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} - 2\sum_{n=1}^{\infty} (-n+1)z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)z^{-n}. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})\end{aligned}$$

7. (10 分)【解】

由于 0 是分母的二阶零点, 因此它是 $f(z)$ 的二阶极点. $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

由于 $\pm\pi$ 是分母的一阶零点, 因此它们是 $f(z)$ 的一阶极点. $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

$$\operatorname{Res}[f(z), 0] = \left(\frac{\cos z}{z^2 - \pi^2}\right)' \Big|_{z=0} \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$= \frac{-\sin z \cdot (z^2 - \pi^2) - \cos z \cdot 2z}{(z^2 - \pi^2)^2} \Big|_{z=0} = 0, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\operatorname{Res}[f(z), \pi] = \frac{\cos z}{z^2(z + \pi)} \Big|_{z=\pi} = -\frac{1}{2\pi^3}, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\operatorname{Res}[f(z), -\pi] = \frac{\cos z}{z^2(z - \pi)} \Big|_{z=-\pi} = \frac{1}{2\pi^3}. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

8. (9 分)【解】

设 $\mathcal{L}[y] = Y$, 则

$$\mathcal{L}[y''] = s^2 Y - sy(0) - y'(0) = s^2 Y - 2, \quad \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

因此

$$s^2 Y - 2 + 2Y = \mathcal{L}[\sin t] = \frac{1}{s^2 + 1}, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$Y(s) = \frac{2}{s^2 + 2} + \frac{1}{(s^2 + 1)(s^2 + 2)} = \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{1}{s^2 + 2}, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + 1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + 2}\right] = \sin t + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin(\sqrt{2}t). \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

9. (3 分)【解】

例如 (每项 1 分)

- $f'(z) = \cos z, g'(x) = \cos x.$ $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$
- $\sin z$ 处处可导, $\sin x$ 处处可导. $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$
- 麦克劳林展开的系数相同. $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$
- $\sin z$ 无界, $\sin x$ 有界. $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

2022 年 合 肥 工 业 大 学 试 卷 (B)

2022 ~ 2023 学年第一学期

复变函数与积分变换 (1400261B)

一、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. $-1 + \sqrt{3}i$ 的辐角主值是_____.
2. $i^{2022} - (-i)^{2022} =$ _____.
3. 如果函数 $f(z) = e^{ax}(\cos y - i \sin y)$ 在复平面上处处解析, 则实数 $a =$ _____.
4. 设 C 为正向圆周 $|z| = 1$, 则积分 $\oint_C \left(\frac{1+z+z^2}{z^3} \right) dz =$ _____.
5. 函数 e^{it} 的傅里叶变换为_____.

二、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 不等式 $1 < |z| < 2$ 确定的是 ().
A. 有界多连通区域 B. 有界单连通区域 C. 无界多连通区域 D. 无界单连通区域
2. 方程 $|z+i| = |z-i|$ 表示的曲线是 ().
A. 直线 B. 不是圆的椭圆 C. 双曲线 D. 圆周
3. 幂级数在其收敛圆周上 ().
A. 一定处处绝对收敛 B. 一定处处条件收敛
C. 一定有发散的点 D. 可能处处收敛也可能有发散的点
4. 函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在 $z_0 = x_0 + iy_0$ 处可导的充要条件是 ().
A. u, v 均在 (x_0, y_0) 处连续
B. u, v 均在 (x_0, y_0) 处有偏导数
C. u, v 均在 (x_0, y_0) 处可微
D. u, v 均在 (x_0, y_0) 处可微且满足 C-R 方程
5. $z = \pi$ 是函数 $\frac{\sin z}{(z - \pi)^2}$ 的 ().
A. 一阶极点 B. 一阶零点 C. 可去奇点 D. 本性奇点

三、解答题

1. (6 分) 设 $z = \frac{2+i}{1-2i}$, 求 z 的模和辐角.
2. (6 分) 求 $\sqrt[3]{-8}$.

3. (7 分) 设 C 是从 i 到 $2+i$ 的直线, 求 $\int_C \bar{z} dz$.

4. (7 分) 求 $\int_{-\pi i}^{\pi i} (e^z + 1) dz$.

5. (7 分) 求 $\int_0^\pi (z + \cos 2z) dz$.

6. (7 分) 设 C 为正向圆周 $|z| = 4$, 求 $\oint_C \frac{z-6}{z^2+9} dz$.

7. (8 分) 已知 $f(z) = u + iv$ 是解析函数, 其中 $u(x, y) = x^2 + axy - y^2$, $v = 2x^2 - 2y^2 + 2xy$ 且 a 是实数. 求参数 a 以及解析函数 $f'(z)$, 其中 $f'(z)$ 需要写成 z 的表达式.

8. (10 分) 确定函数 $f(z) = \frac{2}{z(z+2)}$ 在圆环域
(1) $0 < |z| < 2$; (2) $2 < |z| < +\infty$
内的洛朗级数展开式.

9. (9 分) 用拉普拉斯变换求解微分方程初值问题

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) = 8e^{2t}, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 2. \end{cases}$$

10. (3 分) 复积分的计算方法或公式有哪些? 请给出至少三条.

2022 年合肥工业大学考试参考答案 (B)

2022 ~ 2023 学年第一学期

复变函数与积分变换 (1400261B)

一、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

请将你的答案对应填在横线上:

1. $\frac{2\pi}{3}$, 2. 0 , 3. -1 , 4. $2\pi i$, 5. $2\pi\delta(\omega - 1)$.

二、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

请将你所选择的字母 A, B, C, D 之一对应填在下列表格里:

题号	1	2	3	4	5
答案	A	A	D	D	A

三、解答题

1. (6 分) 【解】由于 $z = \frac{(2+i)(1+2i)}{5} = i$, (2 分)

因此 $|z| = 1$, (2 分)

$\text{Arg } z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$ (2 分, 只有主值得 1 分)

2. (6 分) 【解】由于 $-8 = 8e^{\pi i}$, (2 分)

因此

$$\sqrt[3]{-8} = 2e^{\frac{1}{3}(\pi i + 2k\pi)}, \quad k = 0, 1, 2 \quad \text{..... (2 分)}$$

即

$$2e^{\frac{\pi i}{3}} = 1 + \sqrt{3}i, \quad 2e^{\pi i} = -2, \quad 2e^{\frac{5\pi i}{3}} = 1 - \sqrt{3}i. \quad \text{..... (2 分)}$$

3. (7 分) 【解】

直线 C 的方程为 $z = t + i, 0 \leq t \leq 2$ (2 分)

因此 $dz = dt, \bar{z} = t - i$ (2 分)

$$\int \bar{z} dz = \int_0^2 (t - i) dt \quad \text{..... (2 分)}$$

$$= \left(\frac{t^2}{2} - it \right) \Big|_0^2 = 2 - 2i. \quad \text{..... (1 分)}$$

4. (7 分) 【解】由于 $e^z + 1$ 处处解析, 因此 (2 分)

$$\int_{-\pi i}^{\pi i} (e^z + 1) dz = (e^z + z) \Big|_{-\pi i}^{\pi i} \quad \text{..... (2 分)}$$

$$= (e^{\pi i} + \pi i) - (e^{-\pi i} - \pi i) \quad \text{..... (2 分)}$$

$$= 2\pi i. \quad \text{..... (1 分)}$$

5. (7 分)【解】由于 $z + \cos 2z$ 处处解析, 因此 (2 分)

$$\begin{aligned}\int_0^\pi (z + \cos 2z) dz &= \left(\frac{z^2}{2} + \frac{\sin 2z}{2} \right) \Big|_0^\pi \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分}) \\ &= \frac{\pi^2}{2} + \frac{\sin 2\pi}{2} \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分}) \\ &= \frac{\pi^2}{2}. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})\end{aligned}$$

6. (7 分)【解】

由于 $f(z) = \frac{z-6}{z^2+9}$ 在 $|z| \leq 4$ 内的奇点为 $\pm 3i$, (2 分)
因此

$$\begin{aligned}\oint_C f(z) dz &= 2\pi i (\text{Res}[f(z), 3i] + \text{Res}[f(z), -3i]) \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分}) \\ &= 2\pi i \left(\frac{z-6}{z+3i} \Big|_{z=3i} + \frac{z-6}{z-3i} \Big|_{z=-3i} \right) \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分}) \\ &= 2\pi i \left(\frac{3i-6}{6i} + \frac{-3i-6}{-6i} \right) = 2\pi i \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})\end{aligned}$$

7. (8 分)【解】

由 $u_x = 2x + ay = v_y = -4y + 2x$ 可知 $a = -4$ (2 分)
由

$$\begin{aligned}f'(z) &= u_x + iv_x \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分}) \\ &= (-4y + 2x) + i(4x + 2y) \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分}) \\ &= (2 + 4i)z. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})\end{aligned}$$

8. (10 分)【解】

由于 $f(z)$ 的奇点是 0, 2, 因此 $f(z)$ 在这两个圆环域内都解析.

(1)

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{1}{z} - \frac{1}{z+2} \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分}) \\ &= \frac{1}{z} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z}{2}} \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分}) \\ &= \frac{1}{z} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{2} \right)^n \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分}) \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} z^n = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} z^n. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})\end{aligned}$$

(2)

$$f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+2} \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$= \frac{1}{z} - \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{z}} \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$= \frac{1}{z} - \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{z}\right)^n \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{z^{n+1}} = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-2)^{n-1}}{z^n}. \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

9. (9 分)【解】

设 $\mathcal{L}[y] = Y$, 则

$$\mathcal{L}[y''] = s^2Y - sy(0) - y'(0) = s^2Y - 2, \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

因此

$$s^2Y - 2 + 2sY = \mathcal{L}[8e^{2t}] = \frac{8}{s-2}, \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$Y(s) = \frac{2s+4}{(s-2)(s^2+2s)} = \frac{2}{s(s-2)} = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s}, \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = e^{2t} - 1. \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

10. (3 分)【解】例如

- 列出参数方程 $z = z(t)$ 并将积分表达为 t 的积分形式;
- 单连通区域内解析函数的积分可以用原函数计算;
- 利用柯西-古萨定理;
- 利用复合闭路定理;
- 利用柯西积分公式;
- 利用高阶导数的柯西积分公式;
- 利用留数;
- 利用长大不等式.

2023 年 合 肥 工 业 大 学 试 卷 (A)

2023 ~ 2024 学年第一学期

复变函数与积分变换 (1400261B)

一、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 2^{-i} 的辐角主值是_____.
2. $2023 - i$ 绕 0 逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 后得到的复数是_____.
3. 如果函数 $f(z) = \frac{1}{(z+5)\sin z}$ 可以在圆环域 $0 < |z| < R$ 内作洛朗展开, 则 R 的最大值为_____.
4. 设 $f(z) = e^z - |z| \cos z$, 则 $\oint_{|z|=1} f(z) dz =$ _____.
5. 函数 $f(t) = \cos(3t)$ 的傅里叶变换为 $F(\omega) =$ _____.

二、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 函数 $f(z) = \frac{1}{z}$ 在下面哪个区域内有原函数? ()
A. $0 < |z| < 1$ B. $\operatorname{Re} z > 0$
C. $|z-1| > 2$ D. $|z+1| + |z-1| > 4$
2. 设 $f(z) = \oint_{|\zeta|=4} \frac{\sin \zeta - \cos \zeta}{\zeta - z} d\zeta$, 则 $f'(\pi) =$ ()
A. 0 B. $2\pi i$ C. $-2\pi i$ D. πi
3. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$ 的收敛半径是 ().
A. 0 B. $+\infty$ C. e D. 1
4. 下面哪个函数不能作为解析函数的虚部? ()
A. $2x + 3y$ B. $2x^2 + 3y^2$ C. $x^2 - xy - y^2$ D. $e^x \cos y$
5. $z=0$ 是函数 $f(z) = \frac{(e^z - 1)^2 z^3}{\sin z^8}$ 的 ().
A. 一阶极点 B. 本性奇点 C. 可去奇点 D. 三阶极点

三、解答题

1. (6 分) 计算 $(-1+i)^{10} - (-1-i)^{10}$.
2. (6 分) 解方程 $\cos z = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

3. (6 分) 设 C 为有向曲线 $z(t) = \sin t + it, 0 \leq t \leq \pi$, 求 $\int_C ze^z dz$.
4. (10 分) 设 C 为正向圆周 $|z - 1| = 4$, 求 $\oint_C \frac{\sin z}{z^2 + 1} dz$.
5. (10 分) 假设 $u(x, y) = x^3 + ax^2y + bxy^2 - 3y^3$ 是调和函数, 求参数 a, b 以及 $v(x, y)$ 使得 $v(0, 0) = 0$ 且 $f(z) = u + iv$ 是解析函数.
6. (10 分) 确定函数 $f(z) = \frac{z}{z^2 - 3z + 2}$ 在圆环域
 (1) $|z| > 2$; (2) $0 < |z - 2| < 1$
 内的洛朗级数展开式.
7. (10 分) 设 $f(z) = \frac{e^z}{(z - \pi i)(z - 2\pi i)^2}$. 求 $f(z)$ 在有限复平面内的奇点以及 $\oint_{|z|=8} f(z) dz$.
8. (9 分) 用拉普拉斯变换求解微分方程初值问题
- $$\begin{cases} y''(t) + 4y(t) = 3 \cos t, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 2. \end{cases}$$
9. (3 分) 复变函数 $f(z) = e^z$ 和实变量函数 $g(x) = e^x$ 的性质有什么相似和不同之处? 试举出三点.

2023 年合肥工业大学考试参考答案 (A)

2023 ~ 2024 学年第一学期

复变函数与积分变换 (1400261B)

一、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

请将你的答案对应填在横线上:

1. $-\ln 2$, 2. $1 + 2023i$, 3. π , 4. 0 , 5. $\pi[\delta(\omega + 3) + \delta(\omega - 3)]$.

二、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

请将你所选择的字母 A, B, C, D 之一对应填在下列表格里:

题号	1	2	3	4	5
答案	B	C	C	B	D

三、解答题

1. (6 分) 【解】由于

$$-1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi i}{4}}, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

因此

$$(-1 + i)^{10} = 32e^{\frac{30\pi i}{4}} = -32i, \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$(-1 - i)^{10} = 32e^{-\frac{30\pi i}{4}} = 32i, \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

故

$$(-1 + i)^{10} - (-1 - i)^{10} = -64i. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

也可以直接计算 $(-1 + i)^2 = -2i$ 得到 $(-1 + i)^{10} = -32i$.

2. (6 分) 【解】由

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}, \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

整理得到

$$e^{2iz} - \frac{3\sqrt{2}}{2}e^{iz} + 1 = 0, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$e^{iz} = \frac{1}{2} \left[\frac{3\sqrt{2}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 4} \right] = \sqrt{2} \text{ 或 } \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

因此

$$iz = \operatorname{Ln} \sqrt{2} = \frac{1}{2} \ln 2 + 2k\pi i \text{ 或 } \operatorname{Ln} \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{2} \ln 2 + 2k\pi i,$$

$$z = 2k\pi \pm \frac{\ln 2}{2}i, k \in \mathbb{Z}. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

其它解法: 由 $\cos z = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ 得

$$\sin z = \sqrt{1 - \cos^2 z} = \pm \frac{\sqrt{2}i}{4}, \quad \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

因此

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z = \sqrt{2} \text{ 或 } \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

下同.

3. (6 分) 【解】 由于 ze^z 解析, 且 $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

$$\int_C ze^z dz = (z-1)e^z + C, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

而曲线 C 的起点是 0, 终点是 πi , 因此

$$\int_C ze^z dz = (z-1)e^z \Big|_0^{\pi i} \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$= (\pi i - 1)e^{\pi i} - (-1) = 2 - \pi i. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

4. (10 分) 【解】 由于 $f(z) = \frac{\sin z}{(z+i)(z-i)}$ 在 $|z-1| \leq 4$ 内的奇点为 $\pm i$, 因此 $\dots\dots\dots (2 \text{ 分})$

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i [\text{Res}[f(z), -i] + \text{Res}[f(z), -2i]] \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$= 2\pi i \left[\frac{\sin z}{z+i} \Big|_{z=i} + \frac{\sin z}{z-i} \Big|_{z=-i} \right] \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$= 2\pi i \left[\frac{\sin i}{2i} + \frac{\sin(-i)}{-2i} \right] \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$= 2\pi \sin i = \pi i \left(e - \frac{1}{e} \right). \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

5. (10 分) 【解】 由

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 6x + 2ay + 2bx - 18y = 0$$

可知 $a = 9, b = -3$. 由 $\dots\dots\dots (3 \text{ 分})$

$$f'(z) = u_x - iu_y \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$= (3x^2 + 18xy - 3y^2) - i(9x^2 - 6xy - 9y^2) \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$= (3-9i)(x+iy)^2 = (3-9i)z^2 \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

可知

$$f(z) = (1-3i)z^3 + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

由 $v(0,0) = 0, f(0) = 0$ 可知 $C = 0$,

$$v = -3x^3 + 3x^2y + 9xy^2 - y^3. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

其它解法: 由 $u_x = v_y = 3x^2 + 18xy - 3y^2$ 得

$$v = 3x^2y + 9xy^2 - y^3 + \psi(x). \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

由 $v_x = -u_y = -(9x^2 - 6xy - 9y^2)$ 得

$$\psi'(x) = -9x^2, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\psi(x) = -3x^3 + C, \quad v = -3x^3 + 3x^2y + 9xy^2 - y^3 + C. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

由 $v(0,0) = 0$ 可知 $C = 0$,

$$v = -3x^3 + 3x^2y + 9xy^2 - y^3. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

6. (10 分) 【解】 由于 $f(z)$ 的奇点是 1, 2, 因此 $f(z)$ 在这两个圆环域内都解析.

(1) 由于

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n}, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

因此

$$f(z) = \frac{2}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 1}{z^n}. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

(2) 由于

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1+(z-2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-2)^n, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

因此

$$f(z) = \frac{2}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \frac{2}{z-2} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-2)^n. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

7. (10 分) 【解】 由于 πi 是分母的一阶零点, 因此它是 $f(z)$ 的一阶极点. $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

由于 $2\pi i$ 是分母的二阶零点, 因此它是 $f(z)$ 的二阶极点. $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

$$\text{Res}[f(z), \pi i] = \frac{e^z}{(z-2\pi i)^2} \Big|_{z=\pi i} = \frac{1}{\pi^2}, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}[f(z), 2\pi i] &= \left(\frac{e^z}{z - \pi i} \right)' \bigg|_{z=2\pi i} \dots\dots\dots (2 \text{ 分}) \\ &= \frac{e^z(z - \pi i - 1)}{(z - \pi i)^2} \bigg|_{z=2\pi i} = \frac{1 - \pi i}{\pi^2}, \dots\dots\dots (2 \text{ 分})\end{aligned}$$

$$\oint_{|z|=8} f(z) dz = 2\pi i [\operatorname{Res}[f(z), \pi i] + \operatorname{Res}[f(z), 2\pi i]] = 2 + \frac{4}{\pi}. \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

8. (9 分) 【解】 设 $\mathcal{L}[y] = Y$, 则

$$\mathcal{L}[y''] = s^2 Y - sy(0) - y'(0) = s^2 Y - s - 2, \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

因此

$$s^2 Y - s - 2 + 4Y = 3\mathcal{L}[\cos t] = \frac{3s}{s^2 + 1}, \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\begin{aligned}Y(s) &= \frac{s+2}{s^2+4} + \frac{3s}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{s^3+2s^2+4s+2}{(s^2+1)(s^2+4)} \\ &= \frac{2}{s^2+4} + \frac{s}{s^2+1}, \dots\dots\dots (2 \text{ 分})\end{aligned}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2+4}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] = \sin 2t + \cos t. \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

9. (3 分) 【解】 例如 (每项 1 分)

- $f'(z) = e^z, g'(x) = e^x$. $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$
- e^z 处处可导, e^x 处处可导. $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$
- 麦克劳林展开的系数相同. $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$
- e^z 无界, e^x 无界. $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$
- e^z 是周期的, e^x 不是. $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

2023 年 合 肥 工 业 大 学 试 卷 (B)

2023 ~ 2024 学年第一学期

复变函数与积分变换 (1400261B)

一、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. $-1-i$ 的辐角主值是_____.
2. $\frac{(1+i)^3}{(1-i)^3} =$ _____.
3. 函数 $f(z) = \frac{1}{(z+5)(z-3)}$ 在 $z_0 = 0$ 处展开的幂级数的收敛半径是_____.
4. 设 $f(z) = \frac{1}{(z+i)^{2023}}$, 则 $\oint_{|z|=2} f(z) dz =$ _____.
5. 常值函数 $F(\omega) = 2$ 的傅里叶逆变换为 $f(t) =$ _____.

二、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 区域 $0 < \operatorname{Re} z < 1$ 是 ().
A. 有界单连通区域 B. 无界单连通区域 C. 有界多连通区域 D. 无界多连通区域
2. 设 $f(z) = \oint_{|\zeta|=2} \frac{\zeta^3 + 3\zeta}{\zeta - z} d\zeta$, 则 $f'(i) =$ ().
A. 0 B. $3i$ C. $-3i$ D. $2i$
3. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(1+i)^n}$ 的收敛半径是 ().
A. 0 B. $+\infty$ C. $\sqrt{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
4. 下面哪个函数不是调和函数? ().
A. $3x - y$ B. $x^2 - y^2$ C. $\ln(x^2 + y^2)$ D. $\sin x \cos y$
5. $z = \pi$ 是函数 $f(z) = \frac{z - \pi}{(\sin z)^3}$ 的 ().
A. 一阶极点 B. 本性奇点 C. 可去奇点 D. 二阶极点

三、解答题

1. (6 分) 求 $z = \frac{5+i}{2+3i}$ 的模和辐角.
2. (6 分) 求 $\operatorname{Ln}(1 + \sqrt{3}i)$.

3. (6 分) 设 C 为从 $1+i$ 到 $1-i$ 的直线, 求 $\int_C (3z^2 + 1) dz$.
4. (10 分) 设 C 为正向圆周 $|z+1|=4$, 求 $\oint_C \frac{\sin z + 2z}{(z+\pi)^2} dz$.
5. (10 分) 假设 $v(x, y) = x^2 + 4xy + ay^2$ 是调和函数, 求参数 a 以及解析函数 $f(z) = u + iv$, 使得 v 是 $f(z)$ 的虚部.
6. (10 分) 确定函数 $f(z) = \frac{z+1}{(z-1)(z-2)}$ 在圆环域
 (1) $|z-1| > 1$; (2) $0 < |z-2| < 1$
 内的洛朗级数展开式.
7. (10 分) 设 $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)^2}$. 求 $f(z)$ 在有限复平面内的奇点以及 $\oint_{|z|=3} f(z) dz$.
8. (9 分) 用拉普拉斯变换求解微分方程初值问题
- $$\begin{cases} y''(t) - 4y(t) = 3e^t, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$$
9. (3 分) 谈一谈复变函数在一点处连续、可导与解析之间的联系.

2023 年合肥工业大学考试参考答案 (B)

2023 ~ 2024 学年第一学期

复变函数与积分变换 (1400261B)

一、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

请将你的答案对应填在横线上:

1. $-\frac{3}{4}\pi$, 2. $-i$, 3. 3 , 4. 0 , 5. $2\delta(t)$.

二、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

请将你所选择的字母 A, B, C, D 之一对应填在下列表格里:

题号	1	2	3	4	5
答案	B	A	C	D	D

三、解答题

1. (6 分) 【解】由于

$$z = \frac{5+i}{2+3i} = \frac{(5+i)(2-3i)}{13} = \frac{13-13i}{13} = 1-i, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

因此

$$|z| = \sqrt{2}, \quad \text{Arg } z = 2k\pi - \frac{1}{4}\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad \dots\dots\dots (\text{各 } 2 \text{ 分, 没有 } k \text{ 减 } 1 \text{ 分})$$

2. (6 分) 【解】由于

$$1 + \sqrt{3}i = 2e^{\frac{\pi i}{3}}, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

因此

$$\text{Ln}(1 + \sqrt{3}i) = \ln 2 + \left(2k\pi + \frac{\pi}{3}\right)i, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad \dots\dots\dots (\text{实部虚部各 } 2 \text{ 分, 没有 } k \text{ 减 } 1 \text{ 分})$$

3. (6 分) 【解】由于 $3z^2 + 1$ 解析, 且 $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

$$\int (3z^2 + 1) dz = z^3 + z + C, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

因此

$$\begin{aligned} \int_C (3z^2 + 1) dz &= (z^3 + z) \Big|_{1+i}^{1-i} \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分}) \\ &= (1-i)^3 - (1+i)^3 + (1-i) - (1+i) \\ &= -6i. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分}) \end{aligned}$$

4. (10 分) 【解】 由于 $f(z) = \frac{\sin z + 2z}{(z + \pi)^2}$ 在 $|z + 1| \leq 4$ 内的奇点为 $-\pi$, (2 分)
因此

$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= 2\pi i \operatorname{Res}[f(z), -\pi] \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分}) \\ &= 2\pi i (\sin z + 2z)' \Big|_{z=-\pi} \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分}) \\ &= 2\pi i [\cos(-\pi) + 2] \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分}) \\ &= 2\pi i. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分}) \end{aligned}$$

5. (10 分) 【解】 由

$$\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = 2 + 2a = 0 \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

可知 $a = -1$ (1 分)
由

$$\begin{aligned} f'(z) &= v_y + i v_x \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分}) \\ &= (4x - 2y) + i(2x + 4y) \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分}) \\ &= (4 + 2i)(x + iy) = (4 + 2i)z \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分}) \end{aligned}$$

可知

$$f(z) = (2 + i)z^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分, 没有 } C \text{ 减一分})$$

其它解法: 由 $u_x = v_y = 4x - 2y$ 得

$$u = 2x^2 - 2xy + \psi(y). \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

由 $u_y = -v_x = -(2x + 4y)$ 得

$$\psi'(y) = -4y, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\psi(y) = -2y^2 + C, \quad u = 2x^2 - 2xy - 2y^2 + C. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$f(z) = 2x^2 - 2xy - 2y^2 + C + i(x^2 + 4xy - y^2) = (2 + i)z^2 + C. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

6. (10 分)【解】由于 $f(z)$ 的奇点是 1, 2, 因此 $f(z)$ 在这两个圆环域内都解析.

(1) 由于

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{(z-1)-1} = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z-1)^n}, \quad \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

因此

$$f(z) = \frac{3}{z-2} - \frac{2}{z-1} = -\frac{2}{z-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(z-1)^n}. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

(2) 由于

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1+(z-2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-2)^n, \quad \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

因此

$$f(z) = \frac{3}{z-2} - \frac{2}{z-1} = \frac{3}{z-2} - \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n (z-2)^n. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

7. (10 分)【解】由于 -1 是分母的一阶零点, 因此它们是 $f(z)$ 的一阶极点. $\dots\dots (1 \text{ 分})$

由于 -2 是分母的二阶零点, 因此它是 $f(z)$ 的二阶极点. $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

$$\text{Res}[f(z), -1] = \frac{1}{(z+2)^2} \Big|_{z=-1} = 1, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\text{Res}[f(z), -2] = \left(\frac{1}{z+1} \right)' \Big|_{z=-2} \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$= -\frac{1}{(z+1)^2} \Big|_{z=-2} = -1, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\oint_{|z|=3} f(z) dz = 2\pi i [\text{Res}[f(z), \pi i] + \text{Res}[f(z), 2\pi i]] = 0. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

8. (9 分)【解】设 $\mathcal{L}[y] = Y$, 则

$$\mathcal{L}[y''] = s^2 Y - sy(0) - y'(0) = s^2 Y - 1, \quad \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

因此

$$s^2 Y - 1 - 4Y = 3\mathcal{L}[e^t] = \frac{3}{s-1}, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s^2-4} + \frac{3}{(s-1)(s^2-4)} = \frac{s+2}{(s-1)(s^2-4)} \\ &= \frac{1}{(s-1)(s-2)} = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-1}, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分}) \end{aligned}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] = e^{2t} - e^t. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

9. (3 分)【解】言之成理即可。

- 解析蕴含可导，但反过来不对。 (1 分)
- $f(z)$ 需要在 z_0 的一个邻域内都可导才解析。 (1 分)
- 可导蕴含连续，但反过来不对。 (1 分)

2024 年合肥工业大学试卷 (A)

2024~2025 学年第一学期

复变函数与积分变换 (1400261B)

一、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 设 $\omega = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$, 则 $\omega + \omega^2 =$ _____.
2. 对数函数主值 $\ln(-i) =$ _____.
3. 设 C 为正向圆周 $|z - 1| = 1$, 则积分 $\oint_C \bar{z} dz =$ _____.
4. 函数 $f(z) = \tan z$ 在 $z = \frac{\pi}{2}$ 处的留数等于_____.
5. 常值函数 $f(t) = -2$ 的傅里叶变换为 $F(\omega) =$ _____.

二、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 集合 $|z - 1| \geq |z - i|$ 是 ().
A. 有界单连通区域
B. 无界单连通闭区域
C. 有界多连通区域
D. 无界多连通闭区域
2. 下面哪个数不是纯虚数?()
A. $\ln(-1)$
B. $\cos i$
C. $\sin i$
D. $\sqrt{-\pi}$ 主值
3. 设有向曲线 $C: z(t) = \sin 2t + 2i \cos t, t \in [0, \pi]$, 则积分 $\int_C z dz$ 等于 ()
A. 0
B. $-2i$
C. $-4i$
D. $4i$
4. 函数 $f(z) = \frac{z-1}{z^2-z-2}$ 不能在 () 内作洛朗展开.
A. $0 < |z| < 2$
B. $2 < |z| < 4$
C. $0 < |z+1| < 2$
D. $1 < |z+1| < 3$
5. $z = 0$ 是函数 $f(z) = \frac{z \sin z^3}{\ln(1-z^4)}$ 的 ().
A. 一阶极点
B. 本性奇点
C. 可去奇点
D. 四阶极点

三、解答题

1. (6 分) 设 $z = \sqrt{2}(1 - i)$. 计算 z^5 .
2. (6 分) 解方程 $\sin z = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.
3. (6 分) 设 C 为从 1 到 $1+i$ 再到 i 的折线段, 求 $\int_C (\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z) dz$.

4. (10 分) 设 C 为正向圆周 $|z| = 2$, 求 $\oint_C \frac{\cos z}{z^2(z+i)} dz$.
5. (10 分) 假设 $v(x, y) = x^2 + xy + ay^2 - 2y$ 是调和函数, 求参数 a 以及 $u(x, y)$ 使得 $f(z) = u + iv$ 是解析函数且满足 $f(0) = 0$.
6. (10 分) 确定函数 $f(z) = \frac{z-1}{z^2+3z+2}$ 在圆环域
 (1) $0 < |z| < 1$; (2) $|z+1| > 1$
 内的洛朗级数展开式.
7. (10 分) 设 $f(z) = \frac{z^2 - \pi^2}{z \sin z}$. 求 $f(z)$ 在有限复平面内的奇点和类型, 求出极点的阶, 并计算 $\oint_C f(z) dz$, 其中 C 为正向圆周 $|z-6| = 4$.
8. (9 分) 用拉普拉斯变换求解微分方程初值问题
- $$\begin{cases} y''(t) - 4y(t) = e^{3t}, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = -1. \end{cases}$$
9. (3 分) 复变函数 $f(z) = \sin z$ 和实变量函数 $g(x) = \sin x$ 的性质有什么相似和不同之处? 试举出三点.

2024 年合肥工业大学考试参考答案 (A)

2024~2025 学年第一学期

复变函数与积分变换 (1400261B)

一、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

请将你的答案对应填在横线上:

1. -1 , 2. $-\frac{\pi i}{2}$, 3. $2\pi i$, 4. -1 , 5. $-4\pi\delta(\omega)$.

二、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

请将你所选择的字母 A, B, C, D 之一对应填在下列表格里:

题号	1	2	3	4	5
答案	B	B	A	A	C

三、解答题

1. (6 分) 【解】由于

$$z = 2e^{-\frac{\pi i}{4}}. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

因此

$$z^5 = 2^5 e^{-\frac{5\pi i}{4}} = -16\sqrt{2} + 16\sqrt{2}i. \quad \dots\dots\dots (4 \text{ 分})$$

也可直接计算得到.

2. (6 分) 【解】由

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

整理得到

$$e^{2iz} - \frac{4\sqrt{3}}{3}ie^{iz} - 1 = 0, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$e^{iz} = \frac{1}{2} \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}i \pm \sqrt{\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}i\right)^2 + 4} \right) = \sqrt{3}i \text{ 或 } \frac{\sqrt{3}}{3}i, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

因此

$$iz = \operatorname{Ln}(\sqrt{3}i) = \frac{1}{2} \ln 3 + \frac{\pi i}{2} + 2k\pi i \text{ 或 } \operatorname{Ln} \frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{1}{2} \ln 3 + \frac{\pi i}{2} + 2k\pi i,$$

$$z = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \pm \frac{\ln 3}{2}i, k \in \mathbb{Z}. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

另解: 由于

$$\cos z = \sqrt{1 - \sin^2 z} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}i, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

因此

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z = \sqrt{3}i \text{ 或 } \frac{\sqrt{3}}{3}i. \quad \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

其余相同.

3. (6 分) 【解】分段计算. (1 分)

第一段 $C_1: z = 1 + it, t \in [0, 1], dz = i dt, \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = 1 + t$, 因此 (1 分)

$$\int_{C_1} (\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z) dz = \int_0^1 (1 + t)i dt = \frac{3}{2}i. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

第二段 $C_2: z = 1 + i - t, t \in [0, 1], dz = -dt, \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = 2 - t$, 因此 (1 分)

$$\int_{C_2} (\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z) dz = \int_0^1 (-(2 - t)) dt = -\frac{3}{2}. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

因此

$$\int_C (\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z) dz = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

4. (10 分) 【解】 $f(z) = \frac{\cos z}{z^2(z+i)}$ 在 $|z| \leq 2$ 内的奇点为 $0, -i$ (2 分)

$$\operatorname{Res}[f, 0] = \left(\frac{\cos z}{z+i} \right)' \Big|_{z=0} = \frac{-(z+i) \sin z - \cos z}{(z+i)^2} \Big|_{z=0} = 1, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\operatorname{Res}[f, -i] = \frac{\cos z}{z^2} \Big|_{z=-i} = -\cos i. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

故

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i [\operatorname{Res}[f(z), 0] + \operatorname{Res}[f(z), -i]] \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$= 2\pi i (1 - \cos i) \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$= (2 - e - \frac{1}{e})\pi i. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

5. (10 分) 【解】由

$$\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = 2 + 2a = 0$$

可知 $a = -1$. 由 (3 分)

$$f'(z) = v_y + iv_x \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$= (x - 2y - 2) + i(2x + y) \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$= (1 + 2i)(x + yi) - 2 = (1 + 2i)z - 2 \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

可知

$$f(z) = \frac{1 + 2i}{2} z^2 - 2z + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

由 $f(0) = 0$ 可知 $C = 0$,

$$u = \frac{x^2 - y^2}{2} - 2xy - 2x. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

其它解法: 由 $u_x = v_y = x - 2y - 2$ 得

$$u = \frac{1}{2}x^2 - 2xy - 2x + \psi(y). \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

由 $u_y = -v_x = -(2x + y)$ 得

$$\psi'(y) = -y, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\psi(y) = -\frac{1}{2}y^2 + C, \quad u = \frac{1}{2}x^2 - 2xy - 2x - \frac{1}{2}y^2 + C. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

由 $f(0) = 0$ 可知 $C = 0$,

$$u = \frac{1}{2}x^2 - 2xy - 2x - \frac{1}{2}y^2. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

6. (10 分) 【解】由于 $f(z)$ 的奇点是 $-1, -2$, 因此 $f(z)$ 在这两个圆环域内都解析.

(1) 由于

$$\frac{1}{z+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^n, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

因此

$$f(z) = \frac{3}{z+2} - \frac{2}{z+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3}{2^{n+1}} - 2 \right) z^n. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

(2) 由于

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z+1} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{z+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(z+1)^n}, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

因此

$$f(z) = \frac{3}{z+2} - \frac{2}{z+1} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(z+1)^n} - \frac{2}{z+1} = \frac{1}{z+1} + 3 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(z+1)^n}. \quad \dots\dots (2 \text{ 分})$$

7. (10 分) 【解】由于 0 是分母的二阶零点, 因此它是 $f(z)$ 的二阶极点. $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

由于 $\pm\pi$ 是分子分母的一阶零点, 因此它是 $f(z)$ 的可去极点. $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

对于整数 $k \neq 0, \pm 1$, $k\pi$ 是分母的一阶零点, 因此它是 $f(z)$ 的一阶极点. $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

$$\text{Res}[f(z), \pi] = 0, \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\text{Res}[f(z), 2\pi] = \frac{z^2 - \pi^2}{\sin z + z \cos z} \Big|_{z=2\pi} = \frac{3}{2}\pi, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\text{Res}[f(z), 3\pi] = \frac{z^2 - \pi^2}{\sin z + z \cos z} \Big|_{z=3\pi} = -\frac{8}{3}\pi, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\oint_{|z-6|=4} f(z) dz = 2\pi i [\operatorname{Res}[f(z), \pi] + \operatorname{Res}[f(z), 2\pi] + \operatorname{Res}[f(z), 3\pi]] = -\frac{7}{3}\pi^2 i. \quad \cdots (2 \text{ 分})$$

8. (9 分) 【解】 设 $\mathcal{L}[y] = Y$, 则

$$\mathcal{L}[y''] = s^2 Y - sy(0) - y'(0) = s^2 Y - s + 1, \quad \cdots (3 \text{ 分})$$

因此

$$s^2 Y - s + 1 - 4Y = \mathcal{L}[e^{3t}] = \frac{1}{s-3}, \quad \cdots (2 \text{ 分})$$

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s^2-4} \left(s-1 + \frac{1}{s-3} \right) \\ &= \frac{s-2}{(s+2)(s-3)} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{s-3} + \frac{4}{s+2} \right), \quad \cdots (2 \text{ 分}) \\ y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{5} \left(\frac{1}{s-3} + \frac{4}{s+2} \right) \right] = \frac{1}{5} e^{3t} + \frac{4}{5} e^{-2t}. \quad \cdots (2 \text{ 分}) \end{aligned}$$

9. (3 分) 【解】 每项 1 分, 例如

- 导数形式相同;
- 一个有界一个无界;
- 都是奇函数;
- 麦克劳林展开的系数相同;
- 都是处处可导;
- 都是周期函数.

2024 年 合 肥 工 业 大 学 试 卷 (B)

2024~2025 学年第一学期

复变函数与积分变换 (1400261B)

一、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 设 $z = 1 + i$, 则 $1 + z + z^2 =$ _____.
2. 复数 $1 - i$ 的辐角主值 $\arg(1 - i) =$ _____.
3. 函数 $f(z) = \frac{z}{\sin z}$ 在 $|z| < 4$ 内有_____个奇点.
4. 积分 $\oint_{|z|=1} (u + iv) dz =$ _____, 其中 $v(x, y)$ 是 $u(x, y)$ 在整个复平面内的共轭调和函数.
5. 函数 $f(t) = \delta(t - 1)$ 的傅里叶变换为 $F(\omega) =$ _____.

二、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 集合 $0 < |z| < 1$ 是 ().
A. 有界单连通区域
B. 无界单连通闭区域
C. 有界多连通区域
D. 无界多连通闭区域
2. 若 z 是实数, 下面哪个选项未必成立?()
A. $z = \bar{z}$
B. $\operatorname{Im} z = 0$
C. $\arg z = 0$
D. z 在实轴上
3. 若 z_1, z_2 是非零复数, 下面哪个等式未必成立?()
A. $\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$
B. $\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$
C. $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
D. $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$
4. 下面哪个函数在 $z = 0$ 处解析?()
A. $x^2 + y^2 i$
B. $x - yi$
C. $\frac{1}{z}$
D. $y - xi$
5. 函数 $f(z) = \frac{z+1}{z^2+z-2}$ 不能在 () 内作泰勒展开.
A. $|z| < 1$
B. $|z+1| < 1$
C. $|z-1| < 1$
D. $|z+i| < 1$

三、解答题

1. (6 分) 设 $z = 1 + \sqrt{3}i$. 计算 z^5 .
2. (6 分) 解方程 $\cos z = \frac{5}{4}$.

3. (6 分) 设 C 为从 1 到 $1+i$ 再到 i 的折线段, 求 $\int_C (\operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z) dz$.
4. (10 分) 设 C 为正向圆周 $|z| = 4$, 求 $\oint_C \frac{e^z}{z(z-\pi i)^2} dz$.
5. (10 分) 假设 $v(x, y) = x^2 + ay^2 + x + y$ 是调和函数, 求参数 a 以及 $u(x, y)$ 使得 $f(z) = u + iv$ 是解析函数且满足 $f(0) = 0$.
6. (10 分) 确定函数 $f(z) = \frac{z^2}{z^2 - 3z + 2}$ 在圆环域
(1) $0 < |z| < 1$; (2) $|z| > 2$
内的洛朗级数展开式.
7. (10 分) 设 $f(z) = \frac{z + \cos z}{z(z-\pi)(z+\pi)}$. 求 $f(z)$ 在有限复平面内的奇点和类型, 求出极点的阶, 并计算 $\oint_C f(z) dz$, 其中 C 为正向圆周 $|z| = 4$.
8. (9 分) 用拉普拉斯变换求解微分方程初值问题
- $$\begin{cases} y''(t) + 4y(t) = 3 \cos t, \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$
9. (3 分) 留数有哪些应用? 试举出三点.

2024 年合肥工业大学考试参考答案 (B)

2024 ~ 2025 学年第一学期

复变函数与积分变换 (1400261B)

一、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

请将你的答案对应填在横线上:

1. $2 + 3i$, 2. $-\frac{\pi}{4}$, 3. 3 , 4. 0 , 5. $e^{-i\omega}$.

二、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

请将你所选择的字母 A, B, C, D 之一对应填在下列表格里:

题号	1	2	3	4	5
答案	C	C	D	D	C

三、解答题

1. (6 分) 【解】由于

$$z = 2e^{\frac{\pi i}{3}}. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

因此

$$z^5 = 2^5 e^{\frac{5\pi i}{3}} = 16 - 16\sqrt{3}i. \quad \dots\dots\dots (4 \text{ 分})$$

也可直接计算得到.

2. (6 分) 【解】由

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{5}{4}, \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

整理得到

$$e^{2iz} - \frac{5}{2}e^{iz} + 1 = 0, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$e^{iz} = 2 \text{ 或 } \frac{1}{2}, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

因此

$$iz = \operatorname{Ln} 2 = 2k\pi i + \ln 2 \text{ 或 } \operatorname{Ln} \frac{1}{2} = 2k\pi i - \ln 2,$$

$$z = 2k\pi \pm i \ln 2, k \in \mathbb{Z}. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

另解: 由于

$$\sin z = \sqrt{1 - \cos^2 z} = \pm \frac{3}{4}i, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

因此

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z = 2 \text{ 或 } \frac{1}{2}. \quad \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

其余相同.

3. (6 分) 【解】 由于 $f(z) = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z = z$ 处处解析, 因此 (2 分)

$$\int_C (\operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z) dz = \int_C z dz = \frac{z^2}{2} \Big|_1^i \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$= -1. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

也可以写出两段参数方程分别计算再相加.

4. (10 分) 【解】 $f(z) = \frac{e^z}{z(z - \pi i)^2}$ 在 $|z| \leq 4$ 内的奇点为 $0, \pi i$ (2 分)

$$\operatorname{Res}[f, 0] = \frac{e^z}{(z - \pi i)^2} \Big|_{z=0} = -\frac{1}{\pi^2}. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\operatorname{Res}[f, \pi i] = \left(\frac{e^z}{z} \right)' \Big|_{z=\pi i} \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$= \frac{e^z(z-1)}{z^2} \Big|_{z=\pi i} \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$= \frac{\pi i - 1}{\pi^2}, \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

故

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i [\operatorname{Res}[f(z), 0] + \operatorname{Res}[f(z), -\pi i]] \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$= -2 - \frac{4}{\pi} i. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

5. (10 分) 【解】 由

$$\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = 2 + 2a = 0$$

可知 $a = -1$. 由 (3 分)

$$f'(z) = v_y + i v_x \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$= (-2y + 1) + i(2x + 1) \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$= 2i(x + yi) + 1 + i = 2iz + 1 + i \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

可知

$$f(z) = iz^2 + (1 + i)z + C, C \in \mathbb{R}. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

由 $f(0) = 0$ 可知 $C = 0$,

$$u = -2xy + x - y. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

其它解法: 由 $u_x = v_y = -2y + 1$ 得

$$u = -2xy + x + \psi(y). \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

由 $u_y = -v_x = -(2x + 1)$ 得

$$\psi'(y) = -1, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\psi(y) = -y + C, \quad u = -2xy + x - y + C. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

由 $f(0) = 0$ 可知 $C = 0$,

$$u = -2xy + x - y. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

6. (10 分) 【解】 由于 $f(z)$ 的奇点是 1, 2, 因此 $f(z)$ 在这两个圆环域内都解析.

(1) 由于

$$\frac{1}{z-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

因此

$$f(z) = 1 + \frac{4}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) z^n. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

n 从 1 开始也对.

(2) 由于

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n}, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

因此

$$f(z) = 1 + \frac{4}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1} - 1}{z^n}. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

7. (10 分) 【解】 $0, \pi, -\pi$ 是 $f(z)$ 的一阶极点. $\dots\dots\dots (2 \text{ 分})$

$$\operatorname{Res}[f(z), 0] = \frac{z + \cos z}{(z - \pi)(z + \pi)} \Big|_{z=0} = -\frac{1}{\pi^2}, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\operatorname{Res}[f(z), \pi] = \frac{z + \cos z}{z(z + \pi)} \Big|_{z=\pi} = \frac{\pi - 1}{2\pi^2}, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\operatorname{Res}[f(z), -\pi] = \frac{z + \cos z}{z(z - \pi)} \Big|_{z=-\pi} = \frac{-\pi - 1}{2\pi^2}, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\oint_{|z|=4} f(z) dz = 2\pi i [\operatorname{Res}[f(z), 0] + \operatorname{Res}[f(z), \pi] + \operatorname{Res}[f(z), -\pi]] = -\frac{4i}{\pi}. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

8. (9 分)【解】设 $\mathcal{L}[y] = Y$, 则

$$\mathcal{L}[y''] = s^2Y - sy(0) - y'(0) = s^2Y - 2s, \quad \dots\dots\dots(3 \text{ 分})$$

因此

$$s^2Y - 2s + 4Y = 3\mathcal{L}[\cos t] = \frac{3s}{s^2 + 1}, \quad \dots\dots\dots(2 \text{ 分})$$

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{2s^3 + 5s}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} \\ &= \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{s}{s^2 + 4}, \quad \dots\dots\dots(2 \text{ 分}) \end{aligned}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{s^2 + 1} + \frac{s}{s^2 + 4} \right] = \cos t + \cos 2t. \quad \dots\dots\dots(2 \text{ 分})$$

9. (3 分)【解】每项 1 分, 例如

- 用于计算复变函数积分;
- 用于计算广义函数积分;
- 用于计算三角函数的有理函数在 0 到 2π 的积分;
- 用于计算级数;
- 用于计算拉普拉斯逆变换.

2025 年 合 肥 工 业 大 学 试 卷 (A)

2025 ~ 2026 学年第一学期

复变函数与积分变换 (1400261B)

一、填空题 (每小题 4 分, 共 20 分)

1. 计算 $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{2025} =$ _____.
2. 复数幂 $(-i)^{2\sqrt{2}}$ 的模等于_____.
3. 设 C 为正向圆周 $|z|=2$, 则积分 $\oint_C \left(\bar{z} - \frac{1}{z}\right) dz =$ _____.
4. 函数 $f(z) = \frac{\cos z}{z-3}$ 在 $z=i$ 处泰勒展开等式成立的最大圆域半径为_____.
5. 函数 $f(t) = \sin 4t$ 的拉普拉斯变换为 $F(s) =$ _____.

二、选择题 (每小题 4 分, 共 20 分)

1. 设 z, z_1, z_2 是非零复数. 下列等式未必成立的是 ().
A. $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
B. $\arg \frac{1}{z} = -\arg z$
C. $\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$
D. $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$
2. 集合 $\left|\frac{z-3}{z+3}\right| < 2$ 是 ().
A. 有界单连通闭区域
B. 无界单连通区域
C. 有界多连通闭区域
D. 无界多连通区域
3. 若 $f(z)$ 是区域 D 内的解析函数, 以下命题一定成立的是 ().
A. $f(z)$ 在区域 D 内的积分只和起点终点有关, 与路径无关
B. $f(z)$ 在区域 D 内闭路上的积分总是零
C. $f(z)$ 在区域 D 内存在原函数
D. $f'(z)$ 是区域 D 内的解析函数
4. 下面哪个函数不能在相应区域展开成双边幂级数? ()
A. $\frac{1}{z^2+1}, 1 < |z-i| < 2$
B. $\frac{\ln(z+1)}{z}, 0 < |z| < 1$
C. $\sqrt{z}$ 的主值, $|z-1| > 1$
D. $\sin z, 0 < |z-\pi| < \pi$
5. 以下哪个函数不存在傅里叶变换? ()
A. $f(t) = e^t$
B. $f(t) = 1$
C. $f(t) = \cos t$
D. $f(t) = \sin t$

三、解答题（共 60 分）

1. (5 分) 设 $z = 1 - i$. 计算 $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5$.

2. (5 分) 解方程 $\sin z = \frac{3i}{4}$.

3. (5 分) 设 C 为从 1 沿着单位圆 $|z| = 1$ 逆时针旋转到 i 的圆弧, 求 $\int_C \frac{1}{z} dz$.

4. (5 分) 确定函数 $f(z) = \frac{3z}{z^2 - z - 2}$ 在圆环域 $1 < |z| < 2$ 内的洛朗级数展开式.

5. (5 分) 设 $f(x)$ 是一个有理函数, 分母没有非负实根, 且分母至少比分子高 2 次, 则

$$\int_0^{+\infty} f(x) \ln x dx = -\frac{1}{2} \sum_a \operatorname{Res}[\ln^2(-z)f(z), a],$$

其中 a 取遍 $f(z)$ 的奇点. 利用上述结论计算积分 $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x+2)^2} dx$.

6. (5 分) 已知实数 $a > 0$, 且

- $f(t) = \frac{2a}{t^2 + 4a^2\pi^2}$ 的傅里叶变换为 $F(\omega) = e^{-2a\pi|\omega|}$;
- 若 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$, 则 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$.

利用上述结论计算积分 $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4a^2 dt}{(t^2 + 4a^2\pi^2)^2}$.

7. (10 分) 假设 $u(x, y) = 3x^2 + 2xy + ay^2$ 是调和函数, 求参数 a 以及 $v(x, y)$ 使得 $f(z) = u + iv$ 是解析函数且满足 $f(0) = 0$.

8. (10 分) 设 $f(z) = \frac{\sin z}{z^4 - 1}$. 求 $f(z)$ 在有限复平面内的奇点和类型, 求出极点的阶, 并计算 $\oint_C f(z) dz$, 其中 C 为连接 $\frac{1}{2} \pm 2i, -\frac{1}{2} \pm 2i$ 的正向矩形闭路.

9. (10 分) 用拉普拉斯变换求解微分方程初值问题

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) = -2e^{-2t}, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = -1. \end{cases}$$

2025 年合肥工业大学考试参考答案 (A)

2025~2026 学年第一学期

复变函数与积分变换 (1400261B)

一、填空题 (每小题 4 分, 共 20 分)

请将你的答案对应填在横线上:

1. -1 , 2. 1 , 3. $6\pi i$, 4. $\sqrt{10}$, 5. $\frac{4}{s^2 + 16}$.

二、选择题 (每小题 4 分, 共 20 分)

请将你所选择的字母 A, B, C, D 之一对应填在下列表格里:

题号	1	2	3	4	5
答案	B	D	D	C	A

三、解答题 (共 60 分)

1. (5 分) 【解】由于

$$z = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi i}{4}}. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

因此

$$\begin{aligned} 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 &= \frac{1 - z^6}{1 - z} \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分}) \\ &= \frac{1}{i} \cdot (1 - 8e^{-\frac{6\pi i}{4}}) = -8 - i. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分}) \end{aligned}$$

也可直接计算得到.

2. (5 分) 【解】由

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{3i}{4}, \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

整理得到

$$\begin{aligned} e^{2iz} + \frac{3}{2}e^{iz} - 1 &= 0, \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分}) \\ e^{iz} &= -2 \text{ 或 } \frac{1}{2}, \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分}) \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} iz &= \text{Ln}(-2) = \ln 2 + (2k+1)\pi i \text{ 或 } \text{Ln} \frac{1}{2} = -\ln 2 + 2k\pi i, \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分}) \\ z &= (2k+1)\pi - i \ln 2 \text{ 或 } 2k\pi + i \ln 2, k \in \mathbb{Z}. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分}) \end{aligned}$$

另解: 由于

$$\cos z = \sqrt{1 - \sin^2 z} = \pm \frac{5}{4}, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

因此

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z = -2 \text{ 或 } \frac{1}{2}, \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

其余相同.

3. (5 分)【解】曲线 C 的参数方程为 $z = e^{i\theta}, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, (2 分)

于是 $dz = ie^{i\theta} d\theta$. 因此 (1 分)

$$\int_C \frac{1}{z} dz = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{e^{i\theta}} \cdot ie^{i\theta} d\theta = i \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi i}{2}. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

4. (5 分)【解】由于 $f(z)$ 的奇点是 $-1, 2$, 因此 $f(z)$ 在 $1 < |z| < 2$ 内解析. 我们有

$$f(z) = \frac{2}{z-2} + \frac{1}{z+1}.$$

由于

$$\frac{2}{z-2} = -\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^n}, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

因此

$$f(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} = \dots + \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} - 1 - \frac{z}{2} - \frac{z^2}{4} - \dots. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

5. (5 分)【解】注意到 $\frac{1}{(z+2)^2}$ 的奇点为 -2 , 且 (1 分)

$$\operatorname{Res} \left[\frac{\ln^2(-z)}{(z+2)^2}, -2 \right] = [\ln^2(-z)]' \Big|_{z=-2} = \frac{2\ln(-z)}{z} \Big|_{z=-2} = -\ln 2. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

因此

$$I = -\frac{1}{2} \operatorname{Res} \left[\frac{\ln^2(-z)}{(z+2)^2}, -2 \right] = \frac{\ln 2}{2}. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

6. (5 分)【解】

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-2a\pi|\omega|}|^2 d\omega \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-4a\pi|\omega|} d\omega \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-4a\pi\omega} d\omega \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{4a\pi} = \frac{1}{4a\pi^2}. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

7. (10 分) 【解】我们有 $u_x = 6x + 2y, u_y = 2x + 2ay$. (1 分)
由

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 6 + 2a = 0$$

可知 $a = -3$. 由 (2 分)

$$f'(z) = u_x - iu_y \quad (2 \text{ 分})$$

$$= (6x + 2y) - i(2x - 6y) \quad (2 \text{ 分})$$

$$= (6 - 2i)(x + yi) = (6 - 2i)z \quad (1 \text{ 分})$$

可知

$$f(z) = (3 - i)z^2 + C, C \in \mathbb{R}. \quad (1 \text{ 分})$$

由 $f(0) = 0$ 可知 $C = 0, v = -x^2 + y^2 + 6xy$. (1 分)

另解: 前面的相同. 由 $v_x = -u_y = -2x + 6y$ 得

$$v = -x^2 + 6xy + \psi(y). \quad (2 \text{ 分})$$

由 $v_y = u_x = 6x + 2y$ 得

$$\psi'(y) = 2y, \quad (2 \text{ 分})$$

$$\psi(y) = y^2 + C, \quad v = -x^2 + 6xy + y^2 + C. \quad (2 \text{ 分})$$

由 $f(0) = 0$ 可知 $C = 0, v = -x^2 + y^2 + 6xy$. (1 分)

8. (10 分) 【解】由 $z^4 - 1 = 0$ 可知 $f(z)$ 的奇点为 $\pm 1, \pm i$, (2 分)

且它们都是 $f(z)$ 的一阶极点. (2 分)

$$\text{Res}[f(z), i] = \frac{\sin z}{(z^4 - 1)'} \Big|_{z=i} = \frac{\sin z}{4z^3} \Big|_{z=i} = \frac{i \sin i}{4} = \frac{e^{-1} - e}{8}, \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{Res}[f(z), -i] = \frac{\sin z}{(z^4 - 1)'} \Big|_{z=-i} = \frac{\sin z}{4z^3} \Big|_{z=-i} = -\frac{i \sin(-i)}{4} = \frac{e^{-1} - e}{8}, \quad (2 \text{ 分})$$

由于 C 内部的奇点为 $\pm i$, 因此

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i [\text{Res}[f(z), i] + \text{Res}[f(z), -i]] = \frac{(e^{-1} - e)\pi i}{2}. \quad (2 \text{ 分})$$

9. (10 分) 【解】设 $\mathcal{L}[y] = Y$, 则

$$\mathcal{L}[y'] = sY - y(0) = sY - 1, \quad (2 \text{ 分})$$

$$\mathcal{L}[y''] = s^2Y - sy(0) - y'(0) = s^2Y - s + 1, \quad (2 \text{ 分})$$

因此

$$(s^2 + 2s)Y - s - 1 = -\frac{2}{s+2}, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s^2 + 2s} \left(s + 1 - \frac{2}{s+2} \right) = \frac{s+3}{(s+2)^2} \\ &= \frac{1}{s+2} + \frac{1}{(s+2)^2}, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分}) \end{aligned}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s+2} + \frac{1}{(s+2)^2} \right] = (1+t)e^{-2t}. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

2025 年合肥工业大学试卷 (B)

2025~2026 学年第一学期

复变函数与积分变换 (1400261B)

一、填空题 (每小题 4 分, 共 20 分)

1. 计算 $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1+i}\right)^6 =$ _____.
2. $\operatorname{Ln}(3+4i)$ 的实部等于_____.
3. 如果 $u(x,y) = x^2 + ay^2$ 是调和函数, 则实常数 $a =$ _____.
4. 幂函数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n$ 的收敛半径为_____.
5. 函数 $f(t) = \delta(t+1)$ 的傅里叶变换为 $F(\omega) =$ _____.

二、选择题 (每小题 4 分, 共 20 分)

1. 下列关于复数模的结论未必成立的是 ().
A. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
B. $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$
C. $|\sin z| \leq 1$
D. $|e^z| > 0$
2. 集合 $\operatorname{Re} z^2 < 2$ 是 ().
A. 有界单连通闭区域
B. 无界单连通区域
C. 有界多连通闭区域
D. 无界多连通区域
3. 若 $u(x,y)$ 是区域 D 内的调和函数, 以下命题未必成立的是 ().
A. $u_{xx} + u_{yy} = 0$
B. $u(x,y)$ 在区域 D 内存在任意阶偏导数
C. $u(x,y)$ 在区域 D 内可微
D. $u(x,y)$ 在区域 D 内存在共轭调和函数
4. 如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-3)^n$ 在 $z=4i$ 处收敛, 那么该幂级数一定 ().
A. 在 $z=0$ 处绝对收敛
B. 在 $z=0$ 处发散
C. 在 $z=2026$ 处发散
D. 在 $z=2026$ 处条件收敛
5. 复变函数 $f(z)$ 在下述哪种点处留数一定非零? ()
A. 可去奇点
B. 一阶极点
C. 二阶极点
D. 本性奇点

三、解答题 (共 60 分)

1. (5 分) 设 $z = \frac{3+i}{1+2i}$. 计算 z 以及它的模和辐角主值.

2. (5 分) 解方程 $\sin z = \frac{4i}{3}$.

3. (5 分) 设 C 为从 0 沿着抛物线 $y = x^2$ 到 $1 + i$ 的有向曲线, 求 $\int_C (1 - 2i \operatorname{Re} z) dz$.

4. (5 分) 确定函数 $f(z) = \frac{3z}{z^2 - z - 2}$ 在圆环域 $|z| > 2$ 内的洛朗级数展开式.

5. (5 分) 设 $f(x)$ 是一个有理函数, 分母没有非负实根, 且分母至少比分子高 2 次, 则

$$\int_0^{+\infty} f(x) \ln x dx = -\frac{1}{2} \sum_a \operatorname{Res}[f(z) \ln^2(-z), a],$$

其中 a 取遍 $f(z)$ 的奇点. 利用上述结论计算积分 $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x+1)(x+2)} dx$.

6. (5 分) 已知

- $f(t) = \begin{cases} 1/2, & |t| \leq 1; \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$ 的傅里叶变换为 $F(\omega) = \frac{\sin \omega}{\omega}$;
- 若 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$, 则 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$.

利用上述结论计算积分 $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \omega}{\omega^2} d\omega$.

7. (10 分) 假设 $u(x, y) = ax^2 - 2xy + y^2$ 是调和函数, 求参数 a 以及 $v(x, y)$ 使得 $f(z) = u + iv$ 是解析函数且满足 $f(0) = 0$.

8. (10 分) 设 $f(z) = \frac{1}{z^2(z^2 - 4)}$. 求 $f(z)$ 在有限复平面内的奇点和类型, 求出极点的阶, 并计算 $\oint_C f(z) dz$, 其中 C 为正向圆周 $|z - 1| = 2$.

9. (10 分) 用拉普拉斯变换求解微分方程初值问题

$$\begin{cases} y''(t) - 4y(t) = -6e^t, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 4. \end{cases}$$

2025 年合肥工业大学考试参考答案 (B)

2025~2026 学年第一学期

复变函数与积分变换 (1400261B)

一、填空题 (每小题 4 分, 共 20 分)

请将你的答案对应填在横线上:

1. $8i$, 2. $\ln 5$, 3. -1 , 4. 1 , 5. $e^{i\omega}$.

二、选择题 (每小题 4 分, 共 20 分)

请将你所选择的字母 A, B, C, D 之一对应填在下列表格里:

题号	1	2	3	4	5
答案	C	B	D	A	B

三、解答题 (共 60 分)

1. (5 分) 【解】由于

$$z = \frac{3+i}{1+2i} = \frac{(3+i)(1-2i)}{5} = \frac{5-5i}{5} = 1-i, \quad \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

因此 $|z| = \sqrt{2}$, $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

$\arg z = -\frac{\pi}{4}$. $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

2. (5 分) 【解】由

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{4i}{3}, \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

整理得到

$$e^{2iz} + \frac{8}{3}e^{iz} - 1 = 0, \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$e^{iz} = -3 \text{ 或 } \frac{1}{3}, \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

因此

$$iz = \operatorname{Ln}(-3) = \ln 3 + (2k+1)\pi i \text{ 或 } \operatorname{Ln} \frac{1}{3} = -\ln 3 + 2k\pi i, \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$z = (2k+1)\pi - i\ln 3 \text{ 或 } 2k\pi + i\ln 3, k \in \mathbb{Z}. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

另解: 由于

$$\cos z = \sqrt{1 - \sin^2 z} = \pm \frac{5}{3}, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

因此

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z = -3 \text{ 或 } \frac{1}{3}, \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

其余相同.

3. (5 分) 【解】曲线 C 的参数方程为 $z = t + it^2, t \in [0, 1]$, (2 分)
于是 $dz = (1 + 2it) dt$. 因此 (1 分)

$$\int_C (1 - 2i \operatorname{Re} z) dz = \int_0^1 (1 - 2it)(1 + 2it) dt = \int_0^1 (1 + 4t^2) dt = \frac{7}{3}. \quad \text{..... (2 分)}$$

4. (5 分) 【解】由于 $f(z)$ 的奇点是 $-1, 2$, 因此 $f(z)$ 在 $|z| > 2$ 内解析. 我们有

$$f(z) = \frac{2}{z-2} + \frac{1}{z+1}.$$

由于

$$\frac{2}{z-2} = \frac{2}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{z}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{z^n}, \quad \text{..... (2 分)}$$

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^n} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^n}, \quad \text{..... (2 分)}$$

因此

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - (-1)^n}{z^n} = \frac{3}{z} + \frac{3}{z^2} + \frac{9}{z^3} + \cdots. \quad \text{..... (1 分)}$$

5. (5 分) 【解】注意到 $\frac{1}{(z+1)(z+2)}$ 的奇点为 $-1, -2$, 且 (1 分)

$$\operatorname{Res} \left[\frac{\ln^2(-z)}{(z+1)(z+2)}, -1 \right] = \frac{\ln^2(-z)}{z+2} \Big|_{z=-1} = 0. \quad \text{..... (1 分)}$$

$$\operatorname{Res} \left[\frac{\ln^2(-z)}{(z+1)(z+2)}, -2 \right] = \frac{\ln^2(-z)}{z+1} \Big|_{z=-2} = -\ln^2 2. \quad \text{..... (1 分)}$$

因此

$$I = \frac{\ln^2 2}{2}. \quad \text{..... (2 分)}$$

6. (5 分) 【解】

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad \text{..... (1 分)}$$

$$= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt \quad \text{..... (1 分)}$$

$$= 2\pi \int_{-1}^1 \frac{1}{4} dt \quad \text{..... (1 分)}$$

$$= \pi. \quad \text{..... (2 分)}$$

7. (10 分) 【解】我们有 $u_x = 2ax - 2y, u_y = -2x + 2y$ (1 分)
由

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 2a + 2 = 0$$

可知 $a = -1$. 由 (2 分)

$$f'(z) = u_x - i u_y \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$= (-2x - 2y) - i(-2x + 2y) \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$= (-2 + 2i)(x + yi) = (-2 + 2i)z \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

可知

$$f(z) = (-1 + i)z^2 + C, C \in \mathbb{R}. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

由 $f(0) = 0$ 可知 $C = 0, v = x^2 - y^2 - 2xy$ (1 分)

另解: 前面的相同. 由 $v_x = -u_y = 2x - 2y$ 得

$$v = x^2 - 2xy + \psi(y). \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

由 $v_y = u_x = -2x - 2y$ 得

$$\psi'(y) = -2y, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\psi(y) = -y^2 + C, \quad v = x^2 - 2xy - y^2 + C. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

由 $f(0) = 0$ 可知 $C = 0, v = x^2 - y^2 - 2xy$ (1 分)

8. (10 分) 【解】由 $z^2(z^2 - 4) = 0$ 可知 $f(z)$ 的奇点为 $0, \pm 2$, (2 分)

且 0 是二阶极点, ± 2 是一阶极点. (2 分)

$$\text{Res}[f(z), 0] = \left(\frac{1}{z^2 - 4} \right)' \Big|_{z=0} = - \frac{2z}{(z^2 - 4)^2} \Big|_{z=0} = 0, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\text{Res}[f(z), 2] = \frac{1}{z^2(z+2)} \Big|_{z=2} = \frac{1}{16}, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

由于 C 内部的奇点为 $0, 2$, 因此

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i [\text{Res}[f(z), 0] + \text{Res}[f(z), 2]] = \frac{\pi i}{8}. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

9. (10 分) 【解】设 $\mathcal{L}[y] = Y$, 则

$$\mathcal{L}[y''] = s^2 Y - sy(0) - y'(0) = s^2 Y - s - 4, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

因此

$$(s^2 - 4)Y - s - 4 = -\frac{6}{s-1}, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 - 4} \left(s + 4 - \frac{6}{s-1} \right) = \frac{s^2 + 3s - 10}{(s-1)(s+2)(s-2)} = \frac{s+5}{(s-1)(s+2)} \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$= \frac{2}{s-1} - \frac{1}{s+2}, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2}{s-1} - \frac{1}{s+2} \right] = 2e^t - e^{-2t}. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$