

第二章 解析函数

- ① 解析函数的概念
- ② 函数解析的充要条件
- ③ 初等函数

第一节 解析函数的概念

- 可导函数
- 可微函数
- 解析函数

由于 $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{R}$ 一样是域, 因此我们可以像一元实变函数一样去定义复变函数的导数和微分.

由于 $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{R}$ 一样是域, 因此我们可以像一元实变函数一样去定义复变函数的导数和微分.

定义. 设 $w = f(z)$ 的定义域是区域 D , $z_0 \in D$. 若极限

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

存在, 则称 $f(z)$ 在 z_0 可导.

由于 $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{R}$ 一样是域, 因此我们可以像一元实变函数一样去定义复变函数的导数和微分.

定义. 设 $w = f(z)$ 的定义域是区域 D , $z_0 \in D$. 若极限

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

存在, 则称 $f(z)$ 在 z_0 可导. 这个极限值称为 $f(z)$ 在 z_0 的导数, 记作 $f'(z_0)$.

由于 $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{R}$ 一样是域, 因此我们可以像一元实变函数一样去定义复变函数的导数和微分.

定义. 设 $w = f(z)$ 的定义域是区域 D , $z_0 \in D$. 若极限

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

存在, 则称 $f(z)$ 在 z_0 可导. 这个极限值称为 $f(z)$ 在 z_0 的导数, 记作 $f'(z_0)$. 若 $f(z)$ 在区域 D 内处处可导, 称 $f(z)$ 在 D 内可导.

例题：线性函数的不可导性

例. 函数 $f(z) = x + 2yi$ 在哪些点处可导？

例题：线性函数的不可导性

例. 函数 $f(z) = x + 2yi$ 在哪些点处可导？

解. 由定义可知

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

例题：线性函数的不可导性

例. 函数 $f(z) = x + 2yi$ 在哪些点处可导？

解. 由定义可知

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x) + 2(y + \Delta y)i - (x + 2yi)}{\Delta z} \end{aligned}$$

例题：线性函数的不可导性

例. 函数 $f(z) = x + 2yi$ 在哪些点处可导？

解. 由定义可知

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x) + 2(y + \Delta y)i - (x + 2yi)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta x + 2\Delta yi}{\Delta x + \Delta yi}. \end{aligned}$$

例题：线性函数的不可导性

例. 函数 $f(z) = x + 2yi$ 在哪些点处可导？

解. 由定义可知

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x) + 2(y + \Delta y)i - (x + 2yi)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta x + 2\Delta yi}{\Delta x + \Delta yi}. \end{aligned}$$

当 $\Delta x = 0, \Delta y \rightarrow 0$ 时, 上式 $\rightarrow 2$;

例题：线性函数的不可导性

例. 函数 $f(z) = x + 2yi$ 在哪些点处可导？

解. 由定义可知

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x) + 2(y + \Delta y)i - (x + 2yi)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta x + 2\Delta yi}{\Delta x + \Delta yi}. \end{aligned}$$

当 $\Delta x = 0, \Delta y \rightarrow 0$ 时, 上式 $\rightarrow 2$; 当 $\Delta y = 0, \Delta x \rightarrow 0$ 时, 上式 $\rightarrow 1$.

例题：线性函数的不可导性

例. 函数 $f(z) = x + 2yi$ 在哪些点处可导?

解. 由定义可知

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x) + 2(y + \Delta y)\mathbf{i} - (x + 2y\mathbf{i})}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta x + 2\Delta y\mathbf{i}}{\Delta x + \Delta y\mathbf{i}}. \end{aligned}$$

当 $\Delta x = 0, \Delta y \rightarrow 0$ 时, 上式 $\rightarrow 2$; 当 $\Delta y = 0, \Delta x \rightarrow 0$ 时, 上式 $\rightarrow 1$. 因此该极限不存在, $f(z)$ 处处不可导.

例题: 复变函数的导数

练习. 函数 $f(z) = \bar{z} = x - yi$ 在哪些点处可导?

例题：复变函数的导数

练习. 函数 $f(z) = \bar{z} = x - yi$ 在哪些点处可导?

答案. 处处不可导.

例题：复变函数的导数

练习. 函数 $f(z) = \bar{z} = x - yi$ 在哪些点处可导?

答案. 处处不可导.

例. 求 $f(z) = z^2$ 的导数.

例题：复变函数的导数

练习. 函数 $f(z) = \bar{z} = x - yi$ 在哪些点处可导?

答案. 处处不可导.

例. 求 $f(z) = z^2$ 的导数.

解.

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

例题：复变函数的导数

练习. 函数 $f(z) = \bar{z} = x - yi$ 在哪些点处可导?

答案. 处处不可导.

例. 求 $f(z) = z^2$ 的导数.

解.

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z}$$

例题：复变函数的导数

练习. 函数 $f(z) = \bar{z} = x - yi$ 在哪些点处可导?

答案. 处处不可导.

例. 求 $f(z) = z^2$ 的导数.

解.

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (2z + \Delta z) = 2z. \end{aligned}$$

事实上, 和单变量实函数情形类似, 复变函数也有如下求导法则.

事实上, 和单变量实函数情形类似, 复变函数也有如下求导法则.

定理.

事实上, 和单变量实函数情形类似, 复变函数也有如下求导法则.

定理.

(1) $(c)' = 0$, 其中 c 为复常数;

事实上, 和单变量实函数情形类似, 复变函数也有如下求导法则.

定理.

- (1) $(c)' = 0$, 其中 c 为复常数;
- (2) $(z^n)' = nz^{n-1}$, 其中 n 为整数;

事实上, 和单变量实函数情形类似, 复变函数也有如下求导法则.

定理.

- (1) $(c)' = 0$, 其中 c 为复常数;
- (2) $(z^n)' = nz^{n-1}$, 其中 n 为整数;
- (3) $(f \pm g)' = f' \pm g'$, $(cf)' = cf'$;

线性性质

事实上, 和单变量实函数情形类似, 复变函数也有如下求导法则.

定理.

(1) $(c)' = 0$, 其中 c 为复常数;

(2) $(z^n)' = nz^{n-1}$, 其中 n 为整数;

$$(3) \quad (f \pm g)' = f' \pm g', \quad (cf)' = cf';$$
$$(4) \quad (fg)' = f'g + fg', \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2};$$
$$(5) \quad [f[g(z)]]' = f'[g(z)] \cdot g'(z);$$

线性性质

莱布尼兹法则

复合函数求导

事实上, 和单变量实函数情形类似, 复变函数也有如下求导法则.

定理.

(1) $(c)' = 0$, 其中 c 为复常数;

(2) $(z^n)' = nz^{n-1}$, 其中 n 为整数;

$$(3) \quad (f \pm g)' = f' \pm g', \quad (cf)' = cf';$$
$$(4) \quad (fg)' = f'g + fg', \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2};$$
$$(5) \quad [f[g(z)]]' = f'[g(z)] \cdot g'(z);$$
$$(6) \quad g'(z) = \frac{1}{f'(w)}, g = f^{-1}, w = g(z).$$

线性性质

莱布尼兹法则

复合函数求导

反函数求导

由上述求导法则, 不难知道:

定理.

- (1) 在 z_0 处可导的两个函数 $f(z)$, $g(z)$ 之和、差、积、商 ($g(z_0) \neq 0$) 仍然在 z_0 处可导.
(2) 若函数 $g(z)$ 在 z_0 处可导, 函数 $f(w)$ 在 $g(z_0)$ 处可导, 则 $f[g(z)]$ 在 z_0 处可导.

由此可知, 多项式函数处处可导, 有理函数在其定义域内处处可导, 且二者导数形式和单变量实函数情形类似.

例题：利用求导运算法则计算导数

例. 求 $f(z) = \frac{z^2 + 3}{z + 1}$ 的导数.

例题：利用求导运算法则计算导数

例. 求 $f(z) = \frac{z^2 + 3}{z + 1}$ 的导数.

解. 由于

$$f(z) = z - 1 + \frac{4}{z+1},$$

例题：利用求导运算法则计算导数

例. 求 $f(z) = \frac{z^2 + 3}{z + 1}$ 的导数.

解. 由于

$$f(z) = z - 1 + \frac{4}{z+1},$$

因此

$$f'(z) = 1 - \frac{4}{(z+1)^2}.$$

证明. 设 $\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$,

定理. 若 $f(z)$ 在 z_0 可导, 则 $f(z)$ 在 z_0 连续.

该定理的证明和单变量实函数情形完全相同.

证明. 设 $\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$, 则

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta w = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \cdot \Delta z$$

定理. 若 $f(z)$ 在 z_0 可导, 则 $f(z)$ 在 z_0 连续.

该定理的证明和单变量实函数情形完全相同.

证明. 设 $\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$, 则

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta w = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \cdot \Delta z = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \cdot \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta z$$

定理. 若 $f(z)$ 在 z_0 可导, 则 $f(z)$ 在 z_0 连续.

该定理的证明和单变量实函数情形完全相同.

证明. 设 $\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$, 则

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta w = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \cdot \Delta z = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \cdot \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta z = f'(z_0) \cdot 0 = 0,$$

定理. 若 $f(z)$ 在 z_0 可导, 则 $f(z)$ 在 z_0 连续.

该定理的证明和单变量实函数情形完全相同.

证明. 设 $\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$, 则

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta w = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \cdot \Delta z = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \cdot \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta z = f'(z_0) \cdot 0 = 0,$$

从而 $f(z)$ 在 z_0 处连续.



复变函数的微分也和单变量实函数情形类似.

定义. 若存在常数 A 使得函数 $w = f(z)$ 满足

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A \Delta z + o(\Delta z),$$

其中 $o(\Delta z)$ 表示 Δz 的高阶无穷小量,

复变函数的微分也和单变量实函数情形类似.

定义. 若存在常数 A 使得函数 $w = f(z)$ 满足

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A \Delta z + o(\Delta z),$$

其中 $o(\Delta z)$ 表示 Δz 的高阶无穷小量, 则称 $f(z)$ 在 z_0 处可微,

复变函数的微分也和单变量实函数情形类似.

定义. 若存在常数 A 使得函数 $w = f(z)$ 满足

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A \Delta z + o(\Delta z),$$

其中 $o(\Delta z)$ 表示 Δz 的高阶无穷小量, 则称 $f(z)$ 在 z_0 处可微, 称 $A \Delta z$ 为 $f(z)$ 在 z_0 的微分, 记作 $dw = A \Delta z$.

复变函数的微分也和单变量实函数情形类似.

定义. 若存在常数 A 使得函数 $w = f(z)$ 满足

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A \Delta z + o(\Delta z),$$

其中 $o(\Delta z)$ 表示 Δz 的高阶无穷小量, 则称 $f(z)$ 在 z_0 处可微, 称 $A\Delta z$ 为 $f(z)$ 在 z_0 的微分, 记作 $dw = A\Delta z$.

和一元实变函数情形一样, 复变函数的可微和可导是等价的, 且 $dw = f'(z_0) \Delta z$, $dz = \Delta z$.

复变函数的微分也和单变量实函数情形类似.

定义. 若存在常数 A 使得函数 $w = f(z)$ 满足

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A \Delta z + o(\Delta z),$$

其中 $o(\Delta z)$ 表示 Δz 的高阶无穷小量, 则称 $f(z)$ 在 z_0 处可微, 称 $A\Delta z$ 为 $f(z)$ 在 z_0 的微分, 记作 $dw = A\Delta z$.

和一元实变函数情形一样, 复变函数的可微和可导是等价的, 且 $dw = f'(z_0) \Delta z$, $dz = \Delta z$. 故

$$dw = f'(z_0) dz, \quad f'(z_0) = \frac{dw}{dz}.$$

定义.

(1) 若函数 $f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内处处可导, 则称 $f(z)$ 在 z_0 解析.

定义.

- (1) 若函数 $f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内处处可导, 则称 $f(z)$ 在 z_0 解析.
- (2) 若 $f(z)$ 在区域 D 内处处解析, 则称 $f(z)$ 在 D 内解析, 或称 $f(z)$ 是 D 内的一个解析函数.

定义.

- (1) 若函数 $f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内处处可导, 则称 $f(z)$ 在 z_0 解析.
- (2) 若 $f(z)$ 在区域 D 内处处解析, 则称 $f(z)$ 在 D 内解析, 或称 $f(z)$ 是 D 内的一个解析函数.
- (3) 若 $f(z)$ 在 z_0 不解析, 则称 z_0 为 $f(z)$ 的一个奇点.

定义.

- (1) 若函数 $f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内处处可导, 则称 $f(z)$ 在 z_0 解析.
- (2) 若 $f(z)$ 在区域 D 内处处解析, 则称 $f(z)$ 在 D 内解析, 或称 $f(z)$ 是 D 内的一个解析函数.
- (3) 若 $f(z)$ 在 z_0 不解析, 则称 z_0 为 $f(z)$ 的一个奇点.

在一点解析蕴含在这点可导, 反之未必.

定义.

- (1) 若函数 $f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内处处可导, 则称 $f(z)$ 在 z_0 解析.
- (2) 若 $f(z)$ 在区域 D 内处处解析, 则称 $f(z)$ 在 D 内解析, 或称 $f(z)$ 是 D 内的一个解析函数.
- (3) 若 $f(z)$ 在 z_0 不解析, 则称 z_0 为 $f(z)$ 的一个奇点.

在一点解析蕴含在这点可导, 反之未必. 无定义、不连续、不可导、可导但不解析, 都会导致奇点的产生.

定义.

- (1) 若函数 $f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内处处可导, 则称 $f(z)$ 在 z_0 解析.
- (2) 若 $f(z)$ 在区域 D 内处处解析, 则称 $f(z)$ 在 D 内解析, 或称 $f(z)$ 是 D 内的一个解析函数.
- (3) 若 $f(z)$ 在 z_0 不解析, 则称 z_0 为 $f(z)$ 的一个奇点.

在一点解析蕴含在这点可导, 反之未必. 无定义、不连续、不可导、可导但不解析, 都会导致奇点的产生. 不过, 若 z_0 是 $f(z)$ 定义域的外点, 即存在 z_0 的邻域与 $f(z)$ 定义域交集为空集, 这种情形不甚有趣, 因此我们不考虑这类奇点.

定义.

- (1) 若函数 $f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内处处可导, 则称 $f(z)$ 在 z_0 解析.
- (2) 若 $f(z)$ 在区域 D 内处处解析, 则称 $f(z)$ 在 D 内解析, 或称 $f(z)$ 是 D 内的一个解析函数.
- (3) 若 $f(z)$ 在 z_0 不解析, 则称 z_0 为 $f(z)$ 的一个奇点.

在一点解析蕴含在这点可导, 反之未必. 无定义、不连续、不可导、可导但不解析, 都会导致奇点的产生. 不过, 若 z_0 是 $f(z)$ 定义域的外点, 即存在 z_0 的邻域与 $f(z)$ 定义域交集为空集, 这种情形不甚有趣, 因此我们不考虑这类奇点.

在区域 D 内解析和在 D 内可导是等价的.

定义.

- (1) 若函数 $f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内处处可导, 则称 $f(z)$ 在 z_0 解析.
- (2) 若 $f(z)$ 在区域 D 内处处解析, 则称 $f(z)$ 在 D 内解析, 或称 $f(z)$ 是 D 内的一个解析函数.
- (3) 若 $f(z)$ 在 z_0 不解析, 则称 z_0 为 $f(z)$ 的一个奇点.

在一点解析蕴含在这点可导, 反之未必. 无定义、不连续、不可导、可导但不解析, 都会导致奇点的产生. 不过, 若 z_0 是 $f(z)$ 定义域的外点, 即存在 z_0 的邻域与 $f(z)$ 定义域交集为空集, 这种情形不甚有趣, 因此我们不考虑这类奇点.

在区域 D 内解析和在 D 内可导是等价的. 这是因为任意 $z_0 \in D$ 均存在一个包含在 D 内的邻域.

由于一个点的邻域也是一个开集, 因此若 $f(z)$ 在 z_0 处解析, 则 $f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内处处可导, 从而在该邻域内解析.

例题：解析与可导的关系

由于一个点的邻域也是一个开集, 因此若 $f(z)$ 在 z_0 处解析, 则 $f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内处处可导, 从而在该邻域内解析. 因此 $f(z)$ 解析点全体是一个开集, 它是可导点集合的内点构成的集合.

例题：解析与可导的关系

由于一个点的邻域也是一个开集, 因此若 $f(z)$ 在 z_0 处解析, 则 $f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内处处可导, 从而在该邻域内解析. 因此 $f(z)$ 解析点全体是一个开集, 它是可导点集合的内点构成的集合.

练习. 函数 $f(z)$ 在点 z_0 处解析是 $f(z)$ 在该点可导的().

- (A) 充分非必要条件 (B) 必要非充分条件
(C) 充要条件 (D) 既非充分也非必要条件

例题：解析与可导的关系

由于一个点的邻域也是一个开集, 因此若 $f(z)$ 在 z_0 处解析, 则 $f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内处处可导, 从而在该邻域内解析. 因此 $f(z)$ 解析点全体是一个开集, 它是可导点集合的内点构成的集合.

练习. 函数 $f(z)$ 在点 z_0 处解析是 $f(z)$ 在该点可导的(A).

- (A) 充分非必要条件 (B) 必要非充分条件
(C) 充要条件 (D) 既非充分也非必要条件

例题：解析与可导的关系

由于一个点的邻域也是一个开集, 因此若 $f(z)$ 在 z_0 处解析, 则 $f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内处处可导, 从而在该邻域内解析. 因此 $f(z)$ 解析点全体是一个开集, 它是可导点集合的内点构成的集合.

练习. 函数 $f(z)$ 在点 z_0 处解析是 $f(z)$ 在该点可导的(A).

- (A) 充分非必要条件 (B) 必要非充分条件
(C) 充要条件 (D) 既非充分也非必要条件

答案. 解析要求在 z_0 的一个邻域内都可导才行.

例题：函数的解析性

例. 研究函数 $f(z) = |z|^2$ 的解析性.

例题：函数的解析性

例. 研究函数 $f(z) = |z|^2$ 的解析性.

解. 注意到

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{(z + \Delta z)(\bar{z} + \overline{\Delta z}) - z\bar{z}}{\Delta z} = \bar{z} + \overline{\Delta z} + z \frac{\Delta x - \Delta y i}{\Delta x + \Delta y i}.$$

例题：函数的解析性

例. 研究函数 $f(z) = |z|^2$ 的解析性.

解. 注意到

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{(z + \Delta z)(\bar{z} + \overline{\Delta z}) - z\bar{z}}{\Delta z} = \bar{z} + \overline{\Delta z} + z \frac{\Delta x - \Delta y i}{\Delta x + \Delta y i}.$$

- 若 $z = 0$, 则当 $\Delta z \rightarrow 0$ 时该式极限为 0.

例题：函数的解析性

例. 研究函数 $f(z) = |z|^2$ 的解析性.

解. 注意到

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{(z + \Delta z)(\bar{z} + \overline{\Delta z}) - z\bar{z}}{\Delta z} = \bar{z} + \overline{\Delta z} + z \frac{\Delta x - \Delta y i}{\Delta x + \Delta y i}.$$

- 若 $z = 0$, 则当 $\Delta z \rightarrow 0$ 时该式极限为 0.
- 若 $z \neq 0$, 则当 $\Delta y = 0, \Delta x \rightarrow 0$ 时该式极限为 $\bar{z} + z$;

例题：函数的解析性

例. 研究函数 $f(z) = |z|^2$ 的解析性.

解. 注意到

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{(z + \Delta z)(\bar{z} + \overline{\Delta z}) - z\bar{z}}{\Delta z} = \bar{z} + \overline{\Delta z} + z \frac{\Delta x - \Delta y i}{\Delta x + \Delta y i}.$$

- 若 $z = 0$, 则当 $\Delta z \rightarrow 0$ 时该式极限为 0.
- 若 $z \neq 0$, 则当 $\Delta y = 0, \Delta x \rightarrow 0$ 时该式极限为 $\bar{z} + z$;

当 $\Delta x = 0, \Delta y \rightarrow 0$ 时该式极限为 $\bar{z} - z$.

例题：函数的解析性

例. 研究函数 $f(z) = |z|^2$ 的解析性.

解. 注意到

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{(z + \Delta z)(\bar{z} + \overline{\Delta z}) - z\bar{z}}{\Delta z} = \bar{z} + \overline{\Delta z} + z \frac{\Delta x - \Delta y i}{\Delta x + \Delta y i}.$$

- 若 $z = 0$, 则当 $\Delta z \rightarrow 0$ 时该式极限为 0.
- 若 $z \neq 0$, 则当 $\Delta y = 0, \Delta x \rightarrow 0$ 时该式极限为 $\bar{z} + z$;

当 $\Delta x = 0, \Delta y \rightarrow 0$ 时该式极限为 $\bar{z} - z$. 因此此时极限不存在.

例题：函数的解析性

例. 研究函数 $f(z) = |z|^2$ 的解析性.

解. 注意到

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{(z + \Delta z)(\bar{z} + \overline{\Delta z}) - z\bar{z}}{\Delta z} = \bar{z} + \overline{\Delta z} + z \frac{\Delta x - \Delta y i}{\Delta x + \Delta y i}.$$

- 若 $z = 0$, 则当 $\Delta z \rightarrow 0$ 时该式极限为 0.
- 若 $z \neq 0$, 则当 $\Delta y = 0, \Delta x \rightarrow 0$ 时该式极限为 $\bar{z} + z$;

当 $\Delta x = 0, \Delta y \rightarrow 0$ 时该式极限为 $\bar{z} - z$. 因此此时极限不存在. 故 $f(z)$ 仅在 $z = 0$ 处可导, 从而处处不解析.

定理.

定理.

- (1) 在 z_0 处解析的两个函数 $f(z)$, $g(z)$ 之和、差、积、商 ($g(z_0) \neq 0$) 仍然在 z_0 处解析.
- (2) 若函数 $g(z)$ 在 z_0 处解析, 函数 $f(w)$ 在 $g(z_0)$ 处解析, 则 $f[g(z)]$ 在 z_0 处解析.

定理.

定理.

- (1) 在 z_0 处解析的两个函数 $f(z)$, $g(z)$ 之和、差、积、商 ($g(z_0) \neq 0$) 仍然在 z_0 处解析.
- (2) 若函数 $g(z)$ 在 z_0 处解析, 函数 $f(w)$ 在 $g(z_0)$ 处解析, 则 $f[g(z)]$ 在 z_0 处解析.

定理.

- (1) 在 D 内解析的两个函数 $f(z)$, $g(z)$ 之和、差、积、商仍然在 D (作商时需要去掉 $g(z) = 0$ 的点) 内解析.

定理.

- (1) 在 z_0 处解析的两个函数 $f(z)$, $g(z)$ 之和、差、积、商 ($g(z_0) \neq 0$) 仍然在 z_0 处解析.
- (2) 若函数 $g(z)$ 在 z_0 处解析, 函数 $f(w)$ 在 $g(z_0)$ 处解析, 则 $f[g(z)]$ 在 z_0 处解析.

定理.

- (1) 在 D 内解析的两个函数 $f(z)$, $g(z)$ 之和、差、积、商仍然在 D (作商时需要去掉 $g(z) = 0$ 的点) 内解析.
- (2) 若函数 $g(z)$ 在 D 内解析且像均落在 D' 中, 函数 $f(w)$ 在 D' 内解析, 则 $f[g(z)]$ 在 D 内解析.

定理.

- (1) 在 z_0 处解析的两个函数 $f(z)$, $g(z)$ 之和、差、积、商 ($g(z_0) \neq 0$) 仍然在 z_0 处解析.
- (2) 若函数 $g(z)$ 在 z_0 处解析, 函数 $f(w)$ 在 $g(z_0)$ 处解析, 则 $f[g(z)]$ 在 z_0 处解析.

定理.

- (1) 在 D 内解析的两个函数 $f(z)$, $g(z)$ 之和、差、积、商仍然在 D (作商时需要去掉 $g(z) = 0$ 的点) 内解析.
- (2) 若函数 $g(z)$ 在 D 内解析且像均落在 D' 中, 函数 $f(w)$ 在 D' 内解析, 则 $f[g(z)]$ 在 D 内解析.

由此可知, 多项式函数处处解析. 有理函数在其定义域内处处解析, 分母的零点是它的奇点.

第二节 函数解析的充要条件

- 柯西-黎曼方程
- 柯西-黎曼方程的应用

通过对一些简单函数的分析, 我们发现可导的函数往往可以直接表达为 z 的函数的形式, 而不解析的往往包含 $x, y, \bar{z}$ 等内容.

通过对一些简单函数的分析, 我们发现可导的函数往往可以直接表达为 z 的函数的形式, 而不解析的往往包含 $x, y, \bar{z}$ 等内容.

这种现象并不是偶然的.

通过对一些简单函数的分析, 我们发现可导的函数往往可以直接表达为 z 的函数的形式, 而不解析的往往包含 $x, y, \bar{z}$ 等内容.

这种现象并不是偶然的. 我们来研究二元实变量函数的可微性与复变函数可导的关系.

通过对一些简单函数的分析, 我们发现可导的函数往往可以直接表达为 z 的函数的形式, 而不解析的往往包含 $x, y, \bar{z}$ 等内容.

这种现象并不是偶然的. 我们来研究二元实变量函数的可微性与复变函数可导的关系.

为了简便我们用 u_x, u_y, v_x, v_y 等记号表示偏导数.

设 $f = u + iv$ 在 z 处可导, $f'(z) = a + bi$,

设 $f = u + iv$ 在 z 处可导, $f'(z) = a + bi$, 则

$$\Delta u + i \Delta v = \Delta f = (a + bi)(\Delta x + i \Delta y) + o(\Delta z).$$

设 $f = u + iv$ 在 z 处可导, $f'(z) = a + bi$, 则

$$\Delta u + i \Delta v = \Delta f = (a + bi)(\Delta x + i \Delta y) + o(\Delta z).$$

展开可知

$$\Delta u = a \Delta x - b \Delta y + o(\Delta z),$$

$$\Delta v = b \Delta x + a \Delta y + o(\Delta z).$$

设 $f = u + iv$ 在 z 处可导, $f'(z) = a + bi$, 则

$$\Delta u + i \Delta v = \Delta f = (a + bi)(\Delta x + i \Delta y) + o(\Delta z).$$

展开可知

$$\Delta u = a \Delta x - b \Delta y + o(\Delta z),$$

$$\Delta v = b \Delta x + a \Delta y + o(\Delta z).$$

由于 $o(\Delta z) = o(|\Delta z|) = o(\sqrt{x^2 + y^2})$,

设 $f = u + iv$ 在 z 处可导, $f'(z) = a + bi$, 则

$$\Delta u + i \Delta v = \Delta f = (a + bi)(\Delta x + i \Delta y) + o(\Delta z).$$

展开可知

$$\Delta u = a \Delta x - b \Delta y + o(\Delta z),$$

$$\Delta v = b \Delta x + a \Delta y + o(\Delta z).$$

由于 $o(\Delta z) = o(|\Delta z|) = o(\sqrt{x^2 + y^2})$, 因此 u, v 可微且 $u_x = v_y = a, v_x = -u_y = b$.

反过来, 假设 u, v 可微且 $u_x = v_y, v_x = -u_y$.

反过来, 假设 u, v 可微且 $u_x = v_y, v_x = -u_y$. 由全微分公式

$$\Delta u = u_x \Delta x + u_y \Delta y + o(\Delta z) = u_x \Delta x - v_x \Delta y + o(\Delta z),$$

反过来, 假设 u, v 可微且 $u_x = v_y, v_x = -u_y$. 由全微分公式

$$\Delta u = u_x \Delta x + u_y \Delta y + o(\Delta z) = u_x \Delta x - v_x \Delta y + o(\Delta z),$$

$$\Delta v = v_x \Delta x + v_y \Delta y + o(\Delta z) = v_x \Delta x + u_x \Delta y + o(\Delta z),$$

反过来, 假设 u, v 可微且 $u_x = v_y, v_x = -u_y$. 由全微分公式

$$\Delta u = u_x \Delta x + u_y \Delta y + o(\Delta z) = u_x \Delta x - v_x \Delta y + o(\Delta z),$$

$$\Delta v = v_x \Delta x + v_y \Delta y + o(\Delta z) = v_x \Delta x + u_x \Delta y + o(\Delta z),$$

$$\Delta f = \Delta(u + \mathrm{i}v) = (u_x + \mathrm{i}v_x) \Delta x + (-v_x + \mathrm{i}u_x) \Delta y + o(\Delta z)$$

反过来, 假设 u, v 可微且 $u_x = v_y, v_x = -u_y$. 由全微分公式

$$\begin{aligned}\Delta u &= u_x \Delta x + u_y \Delta y + o(\Delta z) = u_x \Delta x - v_x \Delta y + o(\Delta z), \\ \Delta v &= v_x \Delta x + v_y \Delta y + o(\Delta z) = v_x \Delta x + u_x \Delta y + o(\Delta z), \\ \Delta f &= \Delta(u + \mathrm{i}v) = (u_x + \mathrm{i}v_x) \Delta x + (-v_x + \mathrm{i}u_x) \Delta y + o(\Delta z) \\ &= (u_x + \mathrm{i}v_x) \Delta(x + \mathrm{i}y) + o(\Delta z)\end{aligned}$$

反过来, 假设 u, v 可微且 $u_x = v_y, v_x = -u_y$. 由全微分公式

$$\begin{aligned}\Delta u &= u_x \Delta x + u_y \Delta y + o(\Delta z) = u_x \Delta x - v_x \Delta y + o(\Delta z), \\ \Delta v &= v_x \Delta x + v_y \Delta y + o(\Delta z) = v_x \Delta x + u_x \Delta y + o(\Delta z), \\ \Delta f &= \Delta(u + \mathrm{i}v) = (u_x + \mathrm{i}v_x) \Delta x + (-v_x + \mathrm{i}u_x) \Delta y + o(\Delta z) \\ &= (u_x + \mathrm{i}v_x) \Delta(x + \mathrm{i}y) + o(\Delta z) \\ &= (u_x + \mathrm{i}v_x) \Delta z + o(\Delta z).\end{aligned}$$

反过来, 假设 u, v 可微且 $u_x = v_y, v_x = -u_y$. 由全微分公式

$$\begin{aligned}\Delta u &= u_x \Delta x + u_y \Delta y + o(\Delta z) = u_x \Delta x - v_x \Delta y + o(\Delta z), \\ \Delta v &= v_x \Delta x + v_y \Delta y + o(\Delta z) = v_x \Delta x + u_x \Delta y + o(\Delta z), \\ \Delta f &= \Delta(u + \mathrm{i}v) = (u_x + \mathrm{i}v_x) \Delta x + (-v_x + \mathrm{i}u_x) \Delta y + o(\Delta z) \\ &= (u_x + \mathrm{i}v_x) \Delta(x + \mathrm{i}y) + o(\Delta z) \\ &= (u_x + \mathrm{i}v_x) \Delta z + o(\Delta z).\end{aligned}$$

故 $f(z)$ 在 z 处可导, 且 $f'(z) = u_x + \mathrm{i}v_x = v_y - \mathrm{i}u_y$.

由此得到

柯西-黎曼定理. $f(z)$ 在 z 可导当且仅当在 z 点 u, v 可微且满足柯西-黎曼方程 (简称为 C-R 方程):

$$u_x = v_y, \quad v_x = -u_y.$$

此时

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y.$$

由此得到

柯西-黎曼定理. $f(z)$ 在 z 可导当且仅当在 z 点 u, v 可微且满足柯西-黎曼方程 (简称为 C-R 方程):

$$u_x = v_y, \quad v_x = -u_y.$$

此时

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y.$$

需要注意的是: 柯西-黎曼定理中的可微性和 C-R 方程缺一不可.

注意到 $x = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\bar{z}, y = -\frac{i}{2}z + \frac{i}{2}\bar{z}$.

注意到 $x = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\bar{z}$, $y = -\frac{i}{2}z + \frac{i}{2}\bar{z}$. 仿照着二元实函数偏导数在变量替换下的变换规则, 定义 f 对 z 和 $\bar{z}$ 的偏导数为

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y}, \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y}. \end{cases}$$

注意到 $x = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\bar{z}, y = -\frac{i}{2}z + \frac{i}{2}\bar{z}$. 仿照着二元实函数偏导数在变量替换下的变换规则, 定义 f 对 z 和 $\bar{z}$ 的偏导数为

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y}, \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y}. \end{cases}$$

若把 $z, \bar{z}$ 看成独立变量, 那么

注意到 $x = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\bar{z}, y = -\frac{i}{2}z + \frac{i}{2}\bar{z}$. 仿照着二元实函数偏导数在变量替换下的变换规则, 定义 f 对 z 和 $\bar{z}$ 的偏导数为

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y}, \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y}. \end{cases}$$

若把 $z, \bar{z}$ 看成独立变量, 那么

- 当 f 在 z 处可导时, $df = f' dz$.

注意到 $x = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\bar{z}$, $y = -\frac{i}{2}z + \frac{i}{2}\bar{z}$. 仿照着二元实函数偏导数在变量替换下的变换规则, 定义 f 对 z 和 $\bar{z}$ 的偏导数为

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y}, \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y}. \end{cases}$$

若把 $z, \bar{z}$ 看成独立变量, 那么

- 当 f 在 z 处可导时, $df = f' dz$.
- 当 f 关于 $z, \bar{z}$ 可微时 (即 u, v 可微), $df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$.

注意到 $x = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\bar{z}$, $y = -\frac{i}{2}z + \frac{i}{2}\bar{z}$. 仿照着二元实函数偏导数在变量替换下的变换规则, 定义 f 对 z 和 $\bar{z}$ 的偏导数为

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y}, \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y}. \end{cases}$$

若把 $z, \bar{z}$ 看成独立变量, 那么

- 当 f 在 z 处可导时, $df = f' dz$.
- 当 f 关于 $z, \bar{z}$ 可微时 (即 u, v 可微), $df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$.

所以 f 在 z 处可导当且仅当 u, v 可微且 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, 此时 $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}$.

注意到 $x = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\bar{z}$, $y = -\frac{i}{2}z + \frac{i}{2}\bar{z}$. 仿照着二元实函数偏导数在变量替换下的变换规则, 定义 f 对 z 和 $\bar{z}$ 的偏导数为

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y}, \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y}. \end{cases}$$

若把 $z, \bar{z}$ 看成独立变量, 那么

- 当 f 在 z 处可导时, $df = f' dz$.
- 当 f 关于 $z, \bar{z}$ 可微时 (即 u, v 可微), $df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$.

所以 f 在 z 处可导当且仅当 u, v 可微且 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, 此时 $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}$. 这也解释了为何含有 $x, y, \bar{z}$ 形式的函数往往不可导, 而可导的函数往往可以直接表达为 z 的形式.

由于二元函数的偏导数均连续蕴含可微, 因此我们有:

定理.

- (1) 若 u_x, u_y, v_x, v_y 在 z 处连续, 且满足 C-R 方程, 则 $f(z)$ 在 z 可导.
- (2) 若 u_x, u_y, v_x, v_y 在区域 D 上处处连续, 且满足 C-R 方程, 则 $f(z)$ 在 D 上可导 (从而解析).

典型例题：利用 C-R 方程判断可导和解析

例. 函数 $f(z) = \bar{z}$ 在何处可导, 在何处解析?

例. 函数 $f(z) = \bar{z}$ 在何处可导, 在何处解析?

解. 由 $u = x, v = -y$ 可知

$$u_x = 1,$$

$$v_x = 0,$$

$$u_y = 0,$$

$$v_y = -1.$$

典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

例. 函数 $f(z) = \bar{z}$ 在何处可导, 在何处解析?

解. 由 $u = x, v = -y$ 可知

$$u_x = 1,$$

$$u_y = 0,$$

$$v_x = 0,$$

$$v_y = -1.$$

因为 $u_x = 1 \neq v_y = -1$, 所以该函数处处不可导, 处处不解析.

典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

例. 函数 $f(z) = \bar{z}$ 在何处可导, 在何处解析?

解. 由 $u = x, v = -y$ 可知

$$u_x = 1,$$

$$u_y = 0,$$

$$v_x = 0,$$

$$v_y = -1.$$

因为 $u_x = 1 \neq v_y = -1$, 所以该函数处处不可导, 处处不解析.

也可由 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 1 \neq 0$ 看出.

典型例题：利用 C-R 方程判断可导和解析

例. 函数 $f(z) = z \operatorname{Re} z$ 在何处可导, 在何处解析?

典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

例. 函数 $f(z) = z \operatorname{Re} z$ 在何处可导, 在何处解析?

解. 由 $f(z) = x^2 + ixy, u = x^2, v = xy$ 可知

典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

例. 函数 $f(z) = z \operatorname{Re} z$ 在何处可导, 在何处解析?

解. 由 $f(z) = x^2 + \mathrm{i}xy, u = x^2, v = xy$ 可知

$$u_x = 2x,$$

$$u_y = 0,$$

$$v_x = y,$$

$$v_y = x.$$

典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

例. 函数 $f(z) = z \operatorname{Re} z$ 在何处可导, 在何处解析?

解. 由 $f(z) = x^2 + ixy, u = x^2, v = xy$ 可知

$$u_x = 2x,$$

$$u_y = 0,$$

$$v_x = y,$$

$$v_y = x.$$

由 $2x = x, 0 = -y$ 可知只有 $x = y = 0, z = 0$ 满足 C-R 方程.

典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

例. 函数 $f(z) = z \operatorname{Re} z$ 在何处可导, 在何处解析?

解. 由 $f(z) = x^2 + \mathrm{i}xy, u = x^2, v = xy$ 可知

$$u_x = 2x,$$

$$u_y = 0,$$

$$v_x = y,$$

$$v_y = x.$$

由 $2x = x, 0 = -y$ 可知只有 $x = y = 0, z = 0$ 满足 C-R 方程. 因此该函数只在 0 可导, 处处不解析且 $f'(0) = u_x(0, 0) + i v_x(0, 0) = 0$.

典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

例. 函数 $f(z) = z \operatorname{Re} z$ 在何处可导, 在何处解析?

解. 由 $f(z) = x^2 + ixy, u = x^2, v = xy$ 可知

$$u_x = 2x,$$

$$u_y = 0,$$

$$v_x = y,$$

$$v_y = x.$$

由 $2x = x, 0 = -y$ 可知只有 $x = y = 0, z = 0$ 满足 C-R 方程. 因此该函数只在 0 可导, 处处不解析且 $f'(0) = u_x(0, 0) + iv_x(0, 0) = 0$.

也可由

$$f = \frac{1}{2}z(z + \bar{z}), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}z$$

看出,

典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

例. 函数 $f(z) = z \operatorname{Re} z$ 在何处可导, 在何处解析?

解. 由 $f(z) = x^2 + ixy, u = x^2, v = xy$ 可知

$$u_x = 2x,$$

$$u_y = 0,$$

$$v_x = y,$$

$$v_y = x.$$

由 $2x = x, 0 = -y$ 可知只有 $x = y = 0, z = 0$ 满足 C-R 方程. 因此该函数只在 0 可导, 处处不解析且 $f'(0) = u_x(0, 0) + iv_x(0, 0) = 0$.

也可由

$$f = \frac{1}{2}z(z + \bar{z}), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}z$$

$$\text{看出, } f'(0) = \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{z=0} = \left(z + \frac{1}{2}\bar{z} \right) \Big|_{z=0} = 0.$$

典型例题：利用 C-R 方程判断可导和解析

例. 函数 $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$ 在何处可导, 在何处解析?

典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

例. 函数 $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$ 在何处可导, 在何处解析?

解. 由 $u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$ 可知

典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

例. 函数 $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$ 在何处可导, 在何处解析?

解. 由 $u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$ 可知

$$u_x = e^x \cos y,$$

$$u_y = -e^x \sin y,$$

$$v_x = e^x \sin y,$$

$$v_y = e^x \cos y.$$

例. 函数 $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$ 在何处可导, 在何处解析?

解. 由 $u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$ 可知

$$u_x = e^x \cos y,$$

$$u_y = -e^x \sin y,$$

$$v_x = e^x \sin y,$$

$$v_y = e^x \cos y.$$

因此该函数处处可导, 处处解析, 且

$$f'(z) = u_x + \mathrm{i}v_x = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y) = f(z).$$

典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

例. 函数 $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$ 在何处可导, 在何处解析?

解. 由 $u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$ 可知

$$u_x = e^x \cos y,$$

$$u_y = -e^x \sin y,$$

$$v_x = e^x \sin y,$$

$$v_y = e^x \cos y.$$

因此该函数处处可导, 处处解析, 且

$$f'(z) = u_x + \mathrm{i}v_x = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y) = f(z).$$

实际上, 这个函数就是复变量的指数函数 e^z .

练习. 函数()在 $z=0$ 处不可导.

(A) $2x + 3yi$

(B) $2x^2 + 3y^2i$

(C) $e^x \cos y + ie^x \sin y$

(D) $x^2 - xyi$

练习. 函数(A)在 $z=0$ 处不可导.

(A) $2x + 3yi$

(C) $e^x \cos y + ie^x \sin y$

(B) $2x^2 + 3y^2i$

(D) $x^2 - xyi$

练习. 函数(A)在 $z=0$ 处不可导.

(A) $2x + 3yi$

(B) $2x^2 + 3y^2i$

(C) $e^x \cos y + ie^x \sin y$

(D) $x^2 - xyi$

答案. 根据 C-R 方程可知对于 (A), $u_x(0) = 2 \neq v_y(0) = 3$.

练习. 函数(A)在 $z=0$ 处不可导.

(A) $2x + 3yi$

(B) $2x^2 + 3y^2i$

(C) $e^x \cos y + ie^x \sin y$

(D) $x^2 - xyi$

答案. 根据 C-R 方程可知对于(A), $u_x(0) = 2 \neq v_y(0) = 3$. 对于(B)(D), 各个偏导数在 0 处取值都是 0.

例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

例. 设函数 $f(z) = (x^2 + axy + by^2) + i(cx^2 + dxy + y^2)$ 在复平面内处处解析. 求实常数 a, b, c, d 以及 $f'(z)$.

例题：利用 C-R 方程判断可导和解析

例. 设函数 $f(z) = (x^2 + axy + by^2) + i(cx^2 + dxy + y^2)$ 在复平面内处处解析. 求实常数 a, b, c, d 以及 $f'(z)$.

解. 由于

$$u_x = 2x + ay,$$

$$v_x = 2cx + dy,$$

$$u_y = ax + 2by,$$

$$v_y = dx + 2y,$$

例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

例. 设函数 $f(z) = (x^2 + axy + by^2) + i(cx^2 + dxy + y^2)$ 在复平面内处处解析. 求实常数 a, b, c, d 以及 $f'(z)$.

解. 由于

$$\begin{aligned}u_x &= 2x + ay, & u_y &= ax + 2by, \\v_x &= 2cx + dy, & v_y &= dx + 2y,\end{aligned}$$

因此

$$2x + ay = dx + 2y, \quad ax + 2by = -(2cx + dy),$$

例题：利用 C-R 方程判断可导和解析

例. 设函数 $f(z) = (x^2 + axy + by^2) + i(cx^2 + dxy + y^2)$ 在复平面内处处解析. 求实常数 a, b, c, d 以及 $f'(z)$.

解. 由于

$$\begin{aligned} u_x &= 2x + ay, & u_y &= ax + 2by, \\ v_x &= 2cx + dy, & v_y &= dx + 2y, \end{aligned}$$

因此

$$2x + ay = dx + 2y, \quad ax + 2by = -(2cx + dy),$$

$$a = d = 2, \quad b = c = -1,$$

例题：利用 C-R 方程判断可导和解析

例. 设函数 $f(z) = (x^2 + axy + by^2) + i(cx^2 + dxy + y^2)$ 在复平面内处处解析. 求实常数 a, b, c, d 以及 $f'(z)$.

解. 由于

$$\begin{aligned} u_x &= 2x + ay, & u_y &= ax + 2by, \\ v_x &= 2cx + dy, & v_y &= dx + 2y, \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} 2x + ay &= dx + 2y, & ax + 2by &= -(2cx + dy), \\ a = d = 2, & & b = c = -1, \\ f'(z) &= u_x + \mathrm{i}v_x = 2x + 2y + \mathrm{i}(-2x + 2y) = (2 - 2\mathrm{i})z. \end{aligned}$$

例题：利用 C-R 方程证明解析函数结论

例. 若 $f'(z)$ 在区域 D 内处处为零, 则 $f(z)$ 在 D 内是一常数.

例题：利用 C-R 方程证明解析函数结论

例. 若 $f'(z)$ 在区域 D 内处处为零, 则 $f(z)$ 在 D 内是一常数.

证明. 由于

$$f'(z) = u_x + \mathrm{i}v_x = v_y - \mathrm{i}u_y = 0,$$

例题：利用 C-R 方程证明解析函数结论

例. 若 $f'(z)$ 在区域 D 内处处为零, 则 $f(z)$ 在 D 内是一常数.

证明. 由于

$$f'(z) = u_x + \mathrm{i}v_x = v_y - \mathrm{i}u_y = 0,$$

因此 $u_x = v_x = u_y = v_y = 0$, u, v 均为常数,

例题: 利用 C-R 方程证明解析函数结论

例. 若 $f'(z)$ 在区域 D 内处处为零, 则 $f(z)$ 在 D 内是一常数.

证明. 由于

$$f'(z) = u_x + \mathrm{i}v_x = v_y - \mathrm{i}u_y = 0,$$

因此 $u_x = v_x = u_y = v_y = 0$, u, v 均为常数, 从而 $f(z) = u + \mathrm{i}v$ 是常数. □

例题：利用 C-R 方程证明解析函数结论

例. 若 $f'(z)$ 在区域 D 内处处为零, 则 $f(z)$ 在 D 内是一常数.

证明. 由于

$$f'(z) = u_x + \mathrm{i}v_x = v_y - \mathrm{i}u_y = 0,$$

因此 $u_x = v_x = u_y = v_y = 0$, u, v 均为常数, 从而 $f(z) = u + iv$ 是常数.

类似地可以证明, 若 $f(z)$ 在 D 内解析, 则下述条件均可推出 $f(z)$ 是常数:

例题：利用 C-R 方程证明解析函数结论

例. 若 $f'(z)$ 在区域 D 内处处为零, 则 $f(z)$ 在 D 内是一常数.

证明. 由于

$$f'(z) = u_x + \mathrm{i}v_x = v_y - \mathrm{i}u_y = 0,$$

因此 $u_x = v_x = u_y = v_y = 0$, u, v 均为常数, 从而 $f(z) = u + iv$ 是常数.

类似地可以证明, 若 $f(z)$ 在 D 内解析, 则下述条件均可推出 $f(z)$ 是常数:

- $\arg f(z)$ 是一常数,
- $\operatorname{Re} f(z)$ 是一常数,
- $v = u^2$,
- $|f(z)|$ 是一常数,
- $\operatorname{Im} f(z)$ 是一常数,
- $u = v^2$.

复变函数与积分变换 ► 第二章 解析函数 ► 2 函数解析的充要条件 ► B 柯西-黎曼方程的应用

证明. 由于 $f'(z) = u_x - \mathrm{i}u_y$, 因此 u_x, u_y 不全为零.

证明. 由于 $f'(z) = u_x - \mathrm{i}u_y$, 因此 u_x, u_y 不全为零. 对 $u(x, y) = c_1$ 使用隐函数求导法则得

$$u_x \, dx + u_y \, dy = 0,$$

证明. 由于 $f'(z) = u_x - \mathrm{i}u_y$, 因此 u_x, u_y 不全为零. 对 $u(x, y) = c_1$ 使用隐函数求导法则得

$$u_x \, dx + u_y \, dy = 0,$$

从而 $\mathbf{u} = (u_y, -u_x)$ 是该曲线在 z 处的非零切向量.

例. 若 $f(z)$ 解析且 $f'(z)$ 处处非零, 则曲线族 $u(x, y) = c_1$ 和曲线族 $v(x, y) = c_2$ 互相正交.

证明. 由于 $f'(z) = u_x - iu_y$, 因此 u_x, u_y 不全为零. 对 $u(x, y) = c_1$ 使用隐函数求导法则得

$$u_x dx + u_y dy = 0,$$

从而 $\mathbf{u} = (u_y, -u_x)$ 是该曲线在 z 处的非零切向量. 同理 $\mathbf{v} = (v_y, -v_x)$ 是 $v(x, y) = c_2$ 在 z 处的非零切向量.

例. 若 $f(z)$ 解析且 $f'(z)$ 处处非零, 则曲线族 $u(x, y) = c_1$ 和曲线族 $v(x, y) = c_2$ 互相正交.

证明. 由于 $f'(z) = u_x - iu_y$, 因此 u_x, u_y 不全为零. 对 $u(x, y) = c_1$ 使用隐函数求导法则得

$$u_x dx + u_y dy = 0,$$

从而 $\mathbf{u} = (u_y, -u_x)$ 是该曲线在 z 处的非零切向量. 同理 $\mathbf{v} = (v_y, -v_x)$ 是 $v(x, y) = c_2$ 在 z 处的非零切向量. 由于

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_y v_y + u_x v_x = u_y u_x - u_x u_y = 0,$$

例. 若 $f(z)$ 解析且 $f'(z)$ 处处非零, 则曲线族 $u(x, y) = c_1$ 和曲线族 $v(x, y) = c_2$ 互相正交.

证明. 由于 $f'(z) = u_x - iu_y$, 因此 u_x, u_y 不全为零. 对 $u(x, y) = c_1$ 使用隐函数求导法则得

$$u_x dx + u_y dy = 0,$$

从而 $\mathbf{u} = (u_y, -u_x)$ 是该曲线在 z 处的非零切向量. 同理 $\mathbf{v} = (v_y, -v_x)$ 是 $v(x, y) = c_2$ 在 z 处的非零切向量. 由于

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_y v_y + u_x v_x = u_y u_x - u_x u_y = 0,$$

因此这两个切向量 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ 正交, 从而曲线正交. □

复变函数与积分变换 ► 第二章 解析函数 ► 2 函数解析的充要条件 ► B 柯西-黎曼方程的应用

复变函数与积分变换 ► 第二章 解析函数 ► 2 函数解析的充要条件 ► B 柯西-黎曼方程的应用

这是因为 $df = f'(z_0) dz$.

这是因为 $df = f'(z_0) dz$. 局部来看 f 把 z_0 附近的点以 z_0 为中心放缩至 $|f'(z_0)|$ 倍并逆时针旋转 $\arg f'(z_0)$.

这是因为 $df = f'(z_0) dz$. 局部来看 f 把 z_0 附近的点以 z_0 为中心放缩至 $|f'(z_0)|$ 倍并逆时针旋转 $\arg f'(z_0)$. 由 w 复平面上曲线族 $u = c_1, v = c_2$ 正交可知上述例题成立.

第三节 初等函数

- 指数函数
- 对数函数
- 幂函数
- 三角函数和反三角函数
- 在有理函数的应用

我们将实变函数中的初等函数推广到复变函数.

我们将实变函数中的初等函数推广到复变函数. 多项式函数和有理函数的解析性质已经介绍过, 这里不再重复. 现在我们来定义指数函数.

指数函数有多种等价的定义方式:

- (1) $\exp z = e^x(\cos y + i \sin y)$ (欧拉恒等式);
- (2) $\exp z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ (极限定义);

我们将实变函数中的初等函数推广到复变函数. 多项式函数和有理函数的解析性质已经介绍过, 这里不再重复. 现在我们来定义指数函数.

指数函数有多种等价的定义方式:

(1) $\exp z = e^x(\cos y + i \sin y)$ (欧拉恒等式);

(2) $\exp z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ (极限定义);

(3) $\exp z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}$ (级数定义);

我们将实变函数中的初等函数推广到复变函数. 多项式函数和有理函数的解析性质已经介绍过, 这里不再重复. 现在我们来定义指数函数.

指数函数有多种等价的定义方式:

- (1) $\exp z = e^x (\cos y + i \sin y)$ (欧拉恒等式);
- (2) $\exp z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ (极限定义);
- (3) $\exp z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}$ (级数定义);
- (4) $\exp z$ 是唯一的一个处处解析的函数, 使得当 $z = x \in \mathbb{R}$ 时, $\exp z = e^x$ (解析延拓).

有些人会从 $e^x, \cos x, \sin x$ 的泰勒展开

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots$$

形式地代入得到欧拉恒等式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

有些人会从 $e^x, \cos x, \sin x$ 的泰勒展开

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots$$

形式地带入得到欧拉恒等式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. 事实上我们可以把它当做复指数函数的定义, 而不是欧拉恒等式的证明.

有些人会从 $e^x, \cos x, \sin x$ 的泰勒展开

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots$$

形式地带入得到欧拉恒等式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. 事实上我们可以把它当做复指数函数的定义, 而不是欧拉恒等式的证明. 我们将在第四章说明(1)、(3)和(4)是等价的.

我们来证明(1)和(2)等价.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| 1 + \frac{z}{n} \right|^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2} \right)^{\frac{n}{2}}$$

我们来证明(1)和(2)等价.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| 1 + \frac{z}{n} \right|^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2} \right)^{\frac{n}{2}} \quad (1^\infty \text{ 型不定式})$$

我们来证明(1)和(2)等价.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left| 1 + \frac{z}{n} \right|^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2} \right)^{\frac{n}{2}} \quad (1^\infty \text{ 型不定式}) \\ &= \exp \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} \left(\frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2} \right) \right] = e^x.\end{aligned}$$

我们来证明(1)和(2)等价.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left| 1 + \frac{z}{n} \right|^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2} \right)^{\frac{n}{2}} \quad (1^\infty \text{ 型不定式}) \\ &= \exp \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} \left(\frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2} \right) \right] = e^x.\end{aligned}$$

不妨设 $n > |z|$, 这样 $1 + \frac{z}{n}$ 落在右半平面,

我们来证明(1)和(2)等价.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left| 1 + \frac{z}{n} \right|^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2} \right)^{\frac{n}{2}} \quad (1^\infty \text{ 型不定式}) \\ &= \exp \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} \left(\frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2} \right) \right] = e^x.\end{aligned}$$

不妨设 $n > |z|$, 这样 $1 + \frac{z}{n}$ 落在右半平面,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \arg \left(1 + \frac{z}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \arctan \frac{y}{n+x}$$

我们来证明(1)和(2)等价.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left| 1 + \frac{z}{n} \right|^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2} \right)^{\frac{n}{2}} \quad (1^\infty \text{ 型不定式}) \\ &= \exp \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} \left(\frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2} \right) \right] = e^x.\end{aligned}$$

不妨设 $n > |z|$, 这样 $1 + \frac{z}{n}$ 落在右半平面,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \arg \left(1 + \frac{z}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \arctan \frac{y}{n+x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ny}{n+x} = y.$$

我们来证明(1)和(2)等价.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left| 1 + \frac{z}{n} \right|^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2} \right)^{\frac{n}{2}} \quad (1^\infty \text{ 型不定式}) \\ &= \exp \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} \left(\frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2} \right) \right] = e^x.\end{aligned}$$

不妨设 $n > |z|$, 这样 $1 + \frac{z}{n}$ 落在右半平面,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \arg \left(1 + \frac{z}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \arctan \frac{y}{n+x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ny}{n+x} = y.$$

故 $\exp z = e^x(\cos y + i \sin y)$.

定义. 指数函数

$$\exp z := e^x (\cos y + i \sin y).$$

为了方便, 我们也记 $e^z = \exp z$. 指数函数有如下性质:

- $\exp z$ 处处解析, 且 $(\exp z)' = \exp z$.
- $\exp z \neq 0$.

定义. 指数函数

$$\exp z := e^x (\cos y + i \sin y).$$

为了方便, 我们也记 $e^z = \exp z$. 指数函数有如下性质:

- $\exp z$ 处处解析, 且 $(\exp z)' = \exp z$.
- $\exp z \neq 0$.
- $\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \cdot \exp z_2$.
- $\exp(z + 2k\pi i) = \exp z$, 即 $\exp z$ 周期为 $2\pi i$.
- $\exp z_1 = \exp z_2$ 当且仅当 $z_1 = z_2 + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$.

定义. 指数函数

$$\exp z := e^x (\cos y + i \sin y).$$

为了方便, 我们也记 $e^z = \exp z$. 指数函数有如下性质:

- $\exp z$ 处处解析, 且 $(\exp z)' = \exp z$.
- $\exp z \neq 0$.
- $\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \cdot \exp z_2$.
- $\exp(z + 2k\pi i) = \exp z$, 即 $\exp z$ 周期为 $2\pi i$.
- $\exp z_1 = \exp z_2$ 当且仅当 $z_1 = z_2 + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$.
- 指数函数将直线族 $\operatorname{Re} z = c$ 映为圆周族 $|w| = e^c$, 将直线族 $\operatorname{Im} z = c$ 映为射线族 $\operatorname{Arg} w = c$.

例题：指数函数的周期

例. 计算函数 $f(z) = \exp\left(\frac{z}{6}\right)$ 的周期.

例题：指数函数的周期

例. 计算函数 $f(z) = \exp\left(\frac{z}{6}\right)$ 的周期.

解. 设 $f(z_1) = f(z_2)$, 则 $e^{z_1/6} = e^{z_2/6}$.

例题：指数函数的周期

例. 计算函数 $f(z) = \exp\left(\frac{z}{6}\right)$ 的周期.

解. 设 $f(z_1) = f(z_2)$, 则 $e^{z_1/6} = e^{z_2/6}$. 因此存在 $k \in \mathbb{Z}$ 使得

$$\frac{z_1}{6} = \frac{z_2}{6} + 2k\pi i,$$

例题：指数函数的周期

例. 计算函数 $f(z) = \exp\left(\frac{z}{6}\right)$ 的周期.

解. 设 $f(z_1) = f(z_2)$, 则 $e^{z_1/6} = e^{z_2/6}$. 因此存在 $k \in \mathbb{Z}$ 使得

$$\frac{z_1}{6} = \frac{z_2}{6} + 2k\pi i,$$

从而 $z_1 - z_2 = 12k\pi i$.

例题：指数函数的周期

例. 计算函数 $f(z) = \exp\left(\frac{z}{6}\right)$ 的周期.

解. 设 $f(z_1) = f(z_2)$, 则 $e^{z_1/6} = e^{z_2/6}$. 因此存在 $k \in \mathbb{Z}$ 使得

$$\frac{z_1}{6} = \frac{z_2}{6} + 2k\pi i,$$

从而 $z_1 - z_2 = 12k\pi i$. 所以 $f(z)$ 的周期是 $12\pi i$.

例题：指数函数的周期

例. 计算函数 $f(z) = \exp\left(\frac{z}{6}\right)$ 的周期.

解. 设 $f(z_1) = f(z_2)$, 则 $e^{z_1/6} = e^{z_2/6}$. 因此存在 $k \in \mathbb{Z}$ 使得

$$\frac{z_1}{6} = \frac{z_2}{6} + 2k\pi i,$$

从而 $z_1 - z_2 = 12k\pi i$. 所以 $f(z)$ 的周期是 $12\pi i$.

一般地, $\exp(az + b)$ 的周期是 $\frac{2\pi i}{a}$ (或写成 $-\frac{2\pi i}{a}$), $a \neq 0$.

对数函数 $\text{Ln } z$ 定义为指数函数 $\exp z$ 的反函数. 为什么我们用大写的 Ln 呢? 在复变函数中, 很多函数是多值函数. 为了便于研究, 我们会固定它的一个单值分支. 我们将多值的这个开头字母大写, 而对应的单值的则是开头字母小写. 例如 $\text{Arg } z$ 和 $\arg z$.

设 $z \neq 0, e^w = z = re^{i\theta} = e^{\ln r + i\theta}$,

对数函数 $\text{Ln } z$ 定义为指数函数 $\exp z$ 的反函数. 为什么我们用大写的 Ln 呢? 在复变函数中, 很多函数是多值函数. 为了便于研究, 我们会固定它的一个单值分支. 我们将多值的这个开头字母大写, 而对应的单值的则是开头字母小写. 例如 $\text{Arg } z$ 和 $\arg z$.

设 $z \neq 0, e^w = z = re^{i\theta} = e^{\ln r + i\theta}$, 则

$$w = \ln r + i\theta + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

定义.

(1) 定义对数函数

$$\text{Ln } z = \ln|z| + i \text{Arg } z.$$

它是一个多值函数.

定义.

(1) 定义对数函数

$$\text{Ln } z = \ln|z| + i \text{Arg } z.$$

它是一个多值函数.

(2) 定义对数函数主值

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z.$$

对于每一个整数 k , $\ln z + 2k\pi i$ 都给出了 $\operatorname{Ln} z$ 的一个单值分支. 特别地, 当 $z = x > 0$ 是正实数时, $\ln z$ 就是实变的对数函数.

典型例题：对数函数的计算

例. 求 $\operatorname{Ln} 2, \operatorname{Ln}(-1)$ 以及它们的主值.

典型例题：对数函数的计算

例. 求 $\operatorname{Ln} 2, \operatorname{Ln}(-1)$ 以及它们的主值.

解.

典型例题：对数函数的计算

例. 求 $\operatorname{Ln} 2, \operatorname{Ln}(-1)$ 以及它们的主值.

解.

(1)

$$\text{Ln } 2 = \ln 2 + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z},$$

例. 求 $\operatorname{Ln} 2, \operatorname{Ln}(-1)$ 以及它们的主值.

解.

(1)

$$\text{Ln } 2 = \ln 2 + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z},$$

主值为 $\ln 2$.

典型例题：对数函数的计算

例. 求 $\operatorname{Ln} 2, \operatorname{Ln}(-1)$ 以及它们的主值.

解.

(1)

$$\text{Ln } 2 = \ln 2 + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z},$$

主值为 $\ln 2$.

(2)

$$\text{Ln}(-1) = \ln 1 + i \text{Arg}(-1) = (2k + 1)\pi i, k \in \mathbb{Z},$$

例. 求 $\operatorname{Ln} 2, \operatorname{Ln}(-1)$ 以及它们的主值.

解.

(1)

$$\operatorname{Ln} 2 = \ln 2 + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z},$$

主值为 $\ln 2$.

(2)

$$\text{Ln}(-1) = \ln 1 + i \text{Arg}(-1) = (2k + 1)\pi i, k \in \mathbb{Z},$$

主值为 πi .

典型例题：对数函数的计算

例. 求 $\text{Ln}(-2 + 3i), \text{Ln}(3 - \sqrt{3}i)$.

典型例题：对数函数的计算

例. 求 $\text{Ln}(-2 + 3i), \text{Ln}(3 - \sqrt{3}i)$.

解.

典型例题：对数函数的计算

例. 求 $\text{Ln}(-2 + 3i), \text{Ln}(3 - \sqrt{3}i)$.

解.

(1)

$$\text{Ln}(-2 + 3i) = \ln|-2 + 3i| + i \text{Arg}(-2 + 3i)$$

典型例题：对数函数的计算

例. 求 $\text{Ln}(-2 + 3i), \text{Ln}(3 - \sqrt{3}i)$.

解.

(1)

$$\begin{aligned}\operatorname{Ln}(-2+3i) &= \ln|-2+3i| + i \operatorname{Arg}(-2+3i) \\ &= \frac{1}{2} \ln 13 + \left(-\arctan \frac{3}{2} + \pi + 2k\pi\right)i, \quad k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

典型例题：对数函数的计算

例. 求 $\text{Ln}(-2 + 3i), \text{Ln}(3 - \sqrt{3}i)$.

解.

(1)

$$\begin{aligned}\operatorname{Ln}(-2+3i) &= \ln|-2+3i| + i \operatorname{Arg}(-2+3i) \\ &= \frac{1}{2} \ln 13 + \left(-\arctan \frac{3}{2} + \pi + 2k\pi\right)i, \quad k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

(2)

$$\text{Ln}(3 - \sqrt{3}\text{i}) = \ln|3 - \sqrt{3}\text{i}| + \text{i Arg}(3 - \sqrt{3}\text{i})$$

典型例题：对数函数的计算

例. 求 $\text{Ln}(-2 + 3i), \text{Ln}(3 - \sqrt{3}i)$.

解.

(1)

$$\begin{aligned}\operatorname{Ln}(-2+3i) &= \ln|-2+3i| + i \operatorname{Arg}(-2+3i) \\ &= \frac{1}{2} \ln 13 + \left(-\arctan \frac{3}{2} + \pi + 2k\pi\right)i, \quad k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\operatorname{Ln}(3 - \sqrt{3}\mathrm{i}) &= \ln|3 - \sqrt{3}\mathrm{i}| + \mathrm{i} \operatorname{Arg}(3 - \sqrt{3}\mathrm{i}) \\ &= \ln 2\sqrt{3} + \left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right)\mathrm{i} \\ &= \ln 2\sqrt{3} + \left(2k - \frac{1}{6}\right)\pi\mathrm{i}, \quad k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

例. 解方程 $e^z - 1 - \sqrt{3}i = 0$.

典型例题：对数函数的计算

例. 解方程 $e^z - 1 - \sqrt{3}i = 0$.

解. 由于 $1 + \sqrt{3}i = 2e^{\frac{\pi i}{3}}$,

典型例题：对数函数的计算

例. 解方程 $e^z - 1 - \sqrt{3}i = 0$.

解. 由于 $1 + \sqrt{3}i = 2e^{\frac{\pi i}{3}}$, 因此

$$z = \text{Ln}(1 + \sqrt{3}\text{i}) = \ln 2 + \left(2k + \frac{1}{3}\right)\pi\text{i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

典型例题：对数函数的计算

例. 解方程 $e^z - 1 - \sqrt{3}i = 0$.

解. 由于 $1 + \sqrt{3}i = 2e^{\frac{\pi i}{3}}$, 因此

$$z = \text{Ln}(1 + \sqrt{3}\text{i}) = \ln 2 + \left(2k + \frac{1}{3}\right)\pi\text{i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

练习. 求 $\ln(-1 - \sqrt{3}i) =$.

典型例题：对数函数的计算

例. 解方程 $e^z - 1 - \sqrt{3}i = 0$.

解. 由于 $1 + \sqrt{3}i = 2e^{\frac{\pi i}{3}}$, 因此

$$z = \text{Ln}(1 + \sqrt{3}\text{i}) = \ln 2 + \left(2k + \frac{1}{3}\right)\pi\text{i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

练习. 求 $\ln(-1 - \sqrt{3}i) = \ln 2 - \frac{2\pi i}{3}$.

对数函数与其主值的关系是

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + \operatorname{Ln} 1 = \ln z + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

根据辐角以及辐角主值的相应等式, 我们有

$$\text{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \text{Ln } z_1 + \text{Ln } z_2, \quad \text{Ln } \frac{z_1}{z_2} = \text{Ln } z_1 - \text{Ln } z_2,$$

$$\text{Ln } \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \text{Ln } z.$$

对数函数与其主值的关系是

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + \operatorname{Ln} 1 = \ln z + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

根据辐角以及辐角主值的相应等式, 我们有

$$\text{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \text{Ln } z_1 + \text{Ln } z_2, \quad \text{Ln } \frac{z_1}{z_2} = \text{Ln } z_1 - \text{Ln } z_2,$$

$$\text{Ln } \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \text{Ln } z.$$

而当 $|n| \geq 2$ 时, $\text{Ln } z^n = n \text{Ln } z$ 不成立.

对数函数与其主值的关系是

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + \operatorname{Ln} 1 = \ln z + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

根据辐角以及辐角主值的相应等式, 我们有

$$\text{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \text{Ln } z_1 + \text{Ln } z_2, \quad \text{Ln } \frac{z_1}{z_2} = \text{Ln } z_1 - \text{Ln } z_2,$$

$$\text{Ln } \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \text{Ln } z.$$

而当 $|n| \geq 2$ 时, $\text{Ln } z^n = n \text{Ln } z$ 不成立. 以上等式换成 $\ln z$ 均未必成立.

设 x 是正实数, 则

$$\ln(-x) = \ln x + \pi i, \quad \lim_{y \rightarrow 0^-} \ln(-x + yi) = \ln x - \pi i,$$

因此 $\ln z$ 在负实轴和零处不连续.

而在其它地方 $-\pi < \arg z < \pi$, $\ln z$ 是 e^z 在区域 $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$ 上的单值反函数,

对数函数的导数

设 x 是正实数, 则

$$\ln(-x) = \ln x + \pi i, \quad \lim_{y \rightarrow 0^-} \ln(-x + yi) = \ln x - \pi i,$$

因此 $\ln z$ 在负实轴和零处不连续.

而在其它地方 $-\pi < \arg z < \pi$, $\ln z$ 是 e^z 在区域 $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$ 上的单值反函数, 从而 $(\ln z)' = \frac{1}{z}$, $\ln z$ 在除负实轴和零处的区域解析.

对数函数的导数

设 x 是正实数, 则

$$\ln(-x) = \ln x + \pi i, \quad \lim_{y \rightarrow 0^-} \ln(-x + yi) = \ln x - \pi i,$$

因此 $\ln z$ 在负实轴和零处不连续.

而在其它地方 $-\pi < \arg z < \pi$, $\ln z$ 是 e^z 在区域 $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$ 上的单值反函数, 从而 $(\ln z)' = \frac{1}{z}$, $\ln z$ 在除负实轴和零处的区域解析.

也可以通过 C-R 方程来得到 $\ln z$ 的解析性和导数: 当 $x > 0$ 时,

$$\ln z = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + i \arctan \frac{y}{x},$$

对数函数的导数

设 x 是正实数, 则

$$\ln(-x) = \ln x + \pi i, \quad \lim_{y \rightarrow 0^-} \ln(-x + yi) = \ln x - \pi i,$$

因此 $\ln z$ 在负实轴和零处不连续.

而在其它地方 $-\pi < \arg z < \pi$, $\ln z$ 是 e^z 在区域 $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$ 上的单值反函数, 从而 $(\ln z)' = \frac{1}{z}$, $\ln z$ 在除负实轴和零处的区域解析.

也可以通过 C-R 方程来得到 $\ln z$ 的解析性和导数: 当 $x > 0$ 时,

$$\ln z = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + i \arctan \frac{y}{x},$$

$$u_x = v_y = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v_x = -u_y = -\frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$(\ln z)' = \frac{x - yi}{x^2 + y^2} = \frac{1}{z}.$$

其它情形可取虚部为 $\operatorname{arccot} \frac{x}{y}$ 或 $\operatorname{arccot} \frac{x}{y} - \pi$ 类似证明.

幂函数的性质: a 为整数时

定义.

定义.

(1) 设 $a \neq 0, z \neq 0$, 定义幂函数

$$w = z^a = e^{a \operatorname{Ln} z} = \exp(a \ln|z| + ia \operatorname{Arg} z), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(2) 幂函数的主值为

$$w = e^{a \ln z} = \exp(a \ln|z| + ia \arg z).$$

幂函数的性质: a 为整数时

定义.

(1) 设 $a \neq 0, z \neq 0$, 定义幂函数

$$w = z^a = e^{a \operatorname{Ln} z} = \exp(a \ln|z| + ia \operatorname{Arg} z), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(2) 幂函数的主值为

$$w = e^{a \ln z} = \exp(a \ln|z| + ia \arg z).$$

根据 a 的不同, 这个函数有着不同的性质.

定义.

(1) 设 $a \neq 0, z \neq 0$, 定义幂函数

$$w = z^a = e^{a \operatorname{Ln} z} = \exp(a \ln|z| + ia \operatorname{Arg} z), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(2) 幂函数的主值为

$$w = e^{a \ln z} = \exp(a \ln|z| + ia \arg z).$$

根据 a 的不同, 这个函数有着不同的性质.

当 a 为整数时, 辐角的选取不影响幂函数的取值, 所以 $w = z^a$ 是单值的.

定义.

(1) 设 $a \neq 0, z \neq 0$, 定义幂函数

$$w = z^a = e^{a \operatorname{Ln} z} = \exp(a \ln|z| + ia \operatorname{Arg} z), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(2) 幂函数的主值为

$$w = e^{a \ln z} = \exp(a \ln|z| + ia \arg z).$$

根据 a 的不同, 这个函数有着不同的性质.

当 a 为整数时, 辐角的选取不影响幂函数的取值, 所以 $w = z^a$ 是单值的. 此时 z^a 就是我们之前定义的乘幂.

定义.

(1) 设 $a \neq 0, z \neq 0$, 定义幂函数

$$w = z^a = e^{a \operatorname{Ln} z} = \exp(a \ln|z| + ia \operatorname{Arg} z), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(2) 幂函数的主值为

$$w = e^{a \ln z} = \exp(a \ln|z| + ia \arg z).$$

根据 a 的不同, 这个函数有着不同的性质.

当 a 为整数时, 辐角的选取不影响幂函数的取值, 所以 $w = z^a$ 是单值的. 此时 z^a 就是我们之前定义的乘幂.

当 a 是非负整数时, z^a 在复平面上解析;

定义.

(1) 设 $a \neq 0, z \neq 0$, 定义幂函数

$$w = z^a = e^{a \operatorname{Ln} z} = \exp(a \ln|z| + ia \operatorname{Arg} z), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(2) 幂函数的主值为

$$w = e^{a \ln z} = \exp(a \ln|z| + ia \arg z).$$

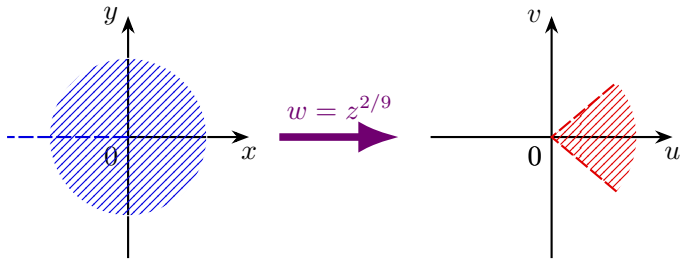
根据 a 的不同, 这个函数有着不同的性质.

当 a 为整数时, 辐角的选取不影响幂函数的取值, 所以 $w = z^a$ 是单值的. 此时 z^a 就是我们之前定义的乘幂.

当 a 是非负整数时, z^a 在复平面上解析; 当 a 是负整数时, z^a 在 $\mathbb{C} - \{0\}$ 上解析.

幂函数的性质: a 为分数时

当 $a = \frac{p}{q}$ 为分数, p, q 为互质的整数且 $q > 1$ 时,

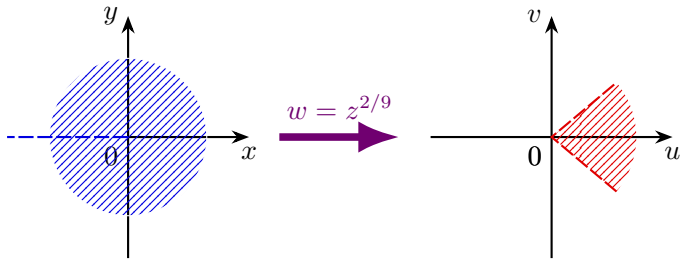


幂函数的性质: a 为分数时

当 $a = \frac{p}{q}$ 为分数, p, q 为互质的整数且 $q > 1$ 时,

$$z^{\frac{p}{q}} = |z|^{\frac{p}{q}} \exp \left[\frac{i p (\arg z + 2k\pi)}{q} \right], \quad k = 0, 1, \dots, q-1$$

具有 q 个值.

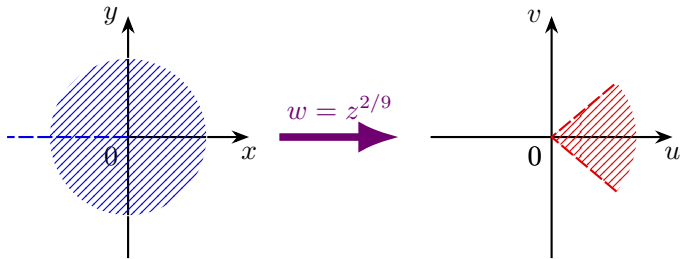


幂函数的性质: a 为分数时

当 $a = \frac{p}{q}$ 为分数, p, q 为互质的整数且 $q > 1$ 时,

$$z^{\frac{p}{q}} = |z|^{\frac{p}{q}} \exp \left[\frac{i p (\arg z + 2k\pi)}{q} \right], \quad k = 0, 1, \dots, q-1$$

具有 q 个值. 事实上它就是 $\sqrt[q]{z^p} = (\sqrt[q]{z})^p$.



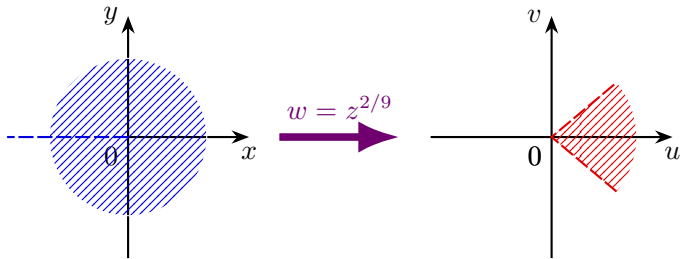
幂函数的性质: a 为分数时

当 $a = \frac{p}{q}$ 为分数, p, q 为互质的整数且 $q > 1$ 时,

$$z^{\frac{p}{q}} = |z|^{\frac{p}{q}} \exp \left[\frac{i p (\arg z + 2k\pi)}{q} \right], \quad k = 0, 1, \dots, q-1$$

具有 q 个值. 事实上它就是 $\sqrt[q]{z^p} = (\sqrt[q]{z})^p$.

去掉负实轴和 0 之后, 它的主值 $w = \exp(a \ln z)$ 是处处解析的.



对于其它的 a , z^a 具有无穷多个值. 因为此时当 $k \neq 0$ 时, $e^{2k\pi ai} \neq 1$. 从而不同的 k 得到的是不同的值. 去掉负实轴和 0 之后, 它的主值 $w = \exp(a \ln z)$ 也是处处解析的.

幂函数的性质: a 为其他情形

对于其它的 a , z^a 具有无穷多个值. 因为此时当 $k \neq 0$ 时, $e^{2k\pi ai} \neq 1$. 从而不同的 k 得到的是不同的值. 去掉负实轴和 0 之后, 它的主值 $w = \exp(a \ln z)$ 也是处处解析的.

a	z^a 的值	z^a 的解析区域
整数 n	单值	$n \geq 0$ 时处处解析 $n < 0$ 时除零点外解析
分数 p/q	q 值	除负实轴和零点外解析
无理数或虚数	无穷多值	除负实轴和零点外解析

典型例题：幂函数的计算

例. 求 $1^{\sqrt{2}}$ 和 i^i .

典型例题：幂函数的计算

例. 求 $1^{\sqrt{2}}$ 和 i^i .

解.

$$1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \text{Ln } 1}$$

典型例题：幂函数的计算

例. 求 $1^{\sqrt{2}}$ 和 i^i .

解.

$$1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \text{Ln } 1} = e^{\sqrt{2} \cdot 2k\pi i}$$

典型例题：幂函数的计算

例. 求 $1^{\sqrt{2}}$ 和 i^i .

解.

$$1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \operatorname{Ln} 1} = e^{\sqrt{2} \cdot 2k\pi i} = \cos(2\sqrt{2}k\pi) + i \sin(2\sqrt{2}k\pi), k \in \mathbb{Z}.$$

典型例题：幂函数的计算

例. 求 $1^{\sqrt{2}}$ 和 i^i .

解.

$$1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \operatorname{Ln} 1} = e^{\sqrt{2} \cdot 2k\pi i} = \cos(2\sqrt{2}k\pi) + i \sin(2\sqrt{2}k\pi), k \in \mathbb{Z}.$$

$$i^i = e^{i \operatorname{Ln} i}$$

典型例题：幂函数的计算

例. 求 $1^{\sqrt{2}}$ 和 i^i .

解.

$$1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \operatorname{Ln} 1} = e^{\sqrt{2} \cdot 2k\pi i} = \cos(2\sqrt{2}k\pi) + i \sin(2\sqrt{2}k\pi), k \in \mathbb{Z}.$$

$$i^i = e^{i \operatorname{Ln} i} = \exp \left[i \cdot \left(2k + \frac{1}{2} \right) \pi i \right]$$

典型例题：幂函数的计算

例. 求 $1^{\sqrt{2}}$ 和 i^i .

解.

$$1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \text{Ln } 1} = e^{\sqrt{2} \cdot 2k\pi i} = \cos(2\sqrt{2}k\pi) + i \sin(2\sqrt{2}k\pi), k \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathbf{i}^i = e^{i \operatorname{Ln} i} = \exp \left[i \cdot \left(2k + \frac{1}{2} \right) \pi i \right] = \exp \left(-2k\pi - \frac{1}{2} \pi \right), k \in \mathbb{Z}.$$

典型例题：幂函数的计算

例. 求 $1^{\sqrt{2}}$ 和 i^i .

解.

$$1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \operatorname{Ln} 1} = e^{\sqrt{2} \cdot 2k\pi i} = \cos(2\sqrt{2}k\pi) + i \sin(2\sqrt{2}k\pi), k \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathbf{i}^{\mathbf{i}} = \mathbf{e}^{\mathbf{i} \operatorname{Ln} \mathbf{i}} = \exp \left[\mathbf{i} \cdot \left(2k + \frac{1}{2} \right) \pi \mathbf{i} \right] = \exp \left(-2k\pi - \frac{1}{2}\pi \right), k \in \mathbb{Z}.$$

练习. 3^i 的辐角主值是 .

典型例题：幂函数的计算

例. 求 $1^{\sqrt{2}}$ 和 i^i .

解.

$$1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \text{Ln } 1} = e^{\sqrt{2} \cdot 2k\pi i} = \cos(2\sqrt{2}k\pi) + i \sin(2\sqrt{2}k\pi), k \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathbf{i}^{\mathbf{i}} = \mathbf{e}^{\mathbf{i} \operatorname{Ln} \mathbf{i}} = \exp \left[\mathbf{i} \cdot \left(2k + \frac{1}{2} \right) \pi \mathbf{i} \right] = \exp \left(-2k\pi - \frac{1}{2}\pi \right), k \in \mathbb{Z}.$$

练习. 3^i 的辐角主值是 $\ln 3$.

幂函数与其主值有如下关系:

$$z^a = e^{a \ln z} \cdot 1^a = e^{a \ln z} \cdot e^{2ak\pi i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

对于幂函数的主值,

$$(z^a)' = (e^{a \ln z})' = \frac{ae^{a \ln z}}{z} = az^{a-1}.$$

幂函数与其主值有如下关系:

$$z^a = e^{a \ln z} \cdot 1^a = e^{a \ln z} \cdot e^{2ak\pi i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

对于幂函数的主值,

$$(z^a)' = (e^{a \ln z})' = \frac{ae^{a \ln z}}{z} = az^{a-1}.$$

一般而言, $z^a \cdot z^b = z^{a+b}$ 和 $(z^a)^b = z^{ab}$ 都是不成立的.

幂函数与其主值有如下关系:

$$z^a = e^{a \ln z} \cdot 1^a = e^{a \ln z} \cdot e^{2ak\pi i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

对于幂函数的主值,

$$(z^a)' = (e^{a \ln z})' = \frac{ae^{a \ln z}}{z} = az^{a-1}.$$

一般而言, $z^a \cdot z^b = z^{a+b}$ 和 $(z^a)^b = z^{ab}$ 都是不成立的.

最后, 注意 e^a 作为指数函数 $f(z) = e^z$ 在 a 处的值和作为 $g(z) = z^a$ 在 e 处的值是**不同**的.

幂函数与其主值有如下关系:

$$z^a = e^{a \ln z} \cdot 1^a = e^{a \ln z} \cdot e^{2ak\pi i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

对于幂函数的主值,

$$(z^a)' = (e^{a \ln z})' = \frac{ae^{a \ln z}}{z} = az^{a-1}.$$

一般而言, $z^a \cdot z^b = z^{a+b}$ 和 $(z^a)^b = z^{ab}$ 都是不成立的.

最后, 注意 e^a 作为指数函数 $f(z) = e^z$ 在 a 处的值和作为 $g(z) = z^a$ 在 e 处的值是**不同**的. 因为后者在 $a \notin \mathbb{Z}$ 时总是多值的.

幂函数与其主值有如下关系:

$$z^a = e^{a \ln z} \cdot 1^a = e^{a \ln z} \cdot e^{2ak\pi i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

对于幂函数的主值,

$$(z^a)' = (e^{a \ln z})' = \frac{ae^{a \ln z}}{z} = az^{a-1}.$$

一般而言, $z^a \cdot z^b = z^{a+b}$ 和 $(z^a)^b = z^{ab}$ 都是不成立的.

最后, 注意 e^a 作为指数函数 $f(z) = e^z$ 在 a 处的值和作为 $g(z) = z^a$ 在 e 处的值是**不同**的. 因为后者在 $a \notin \mathbb{Z}$ 时总是多值的. 前者实际上是后者的主值.

幂函数与其主值有如下关系:

$$z^a = e^{a \ln z} \cdot 1^a = e^{a \ln z} \cdot e^{2ak\pi i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

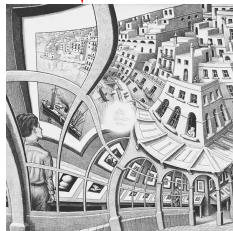
对于幂函数的主值,

$$(z^a)' = (e^{a \ln z})' = \frac{ae^{a \ln z}}{z} = az^{a-1}.$$

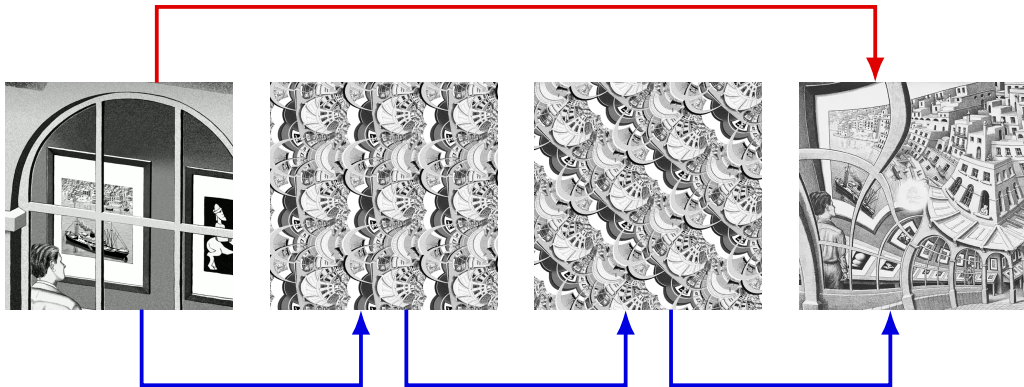
一般而言, $z^a \cdot z^b = z^{a+b}$ 和 $(z^a)^b = z^{ab}$ 都是不成立的.

最后, 注意 e^a 作为指数函数 $f(z) = e^z$ 在 a 处的值和作为 $g(z) = z^a$ 在 e 处的值是**不同**的. 因为后者在 $a \notin \mathbb{Z}$ 时总是多值的. 前者实际上是后者的主值. 为避免混淆, 以后我们总**默认** e^a 表示指数函数 $\exp a$.

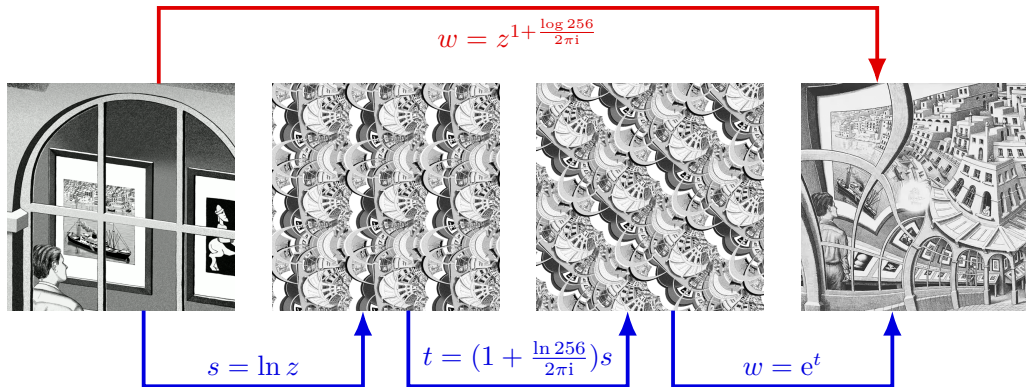
幂函数的应用：埃舍尔的《画廊》



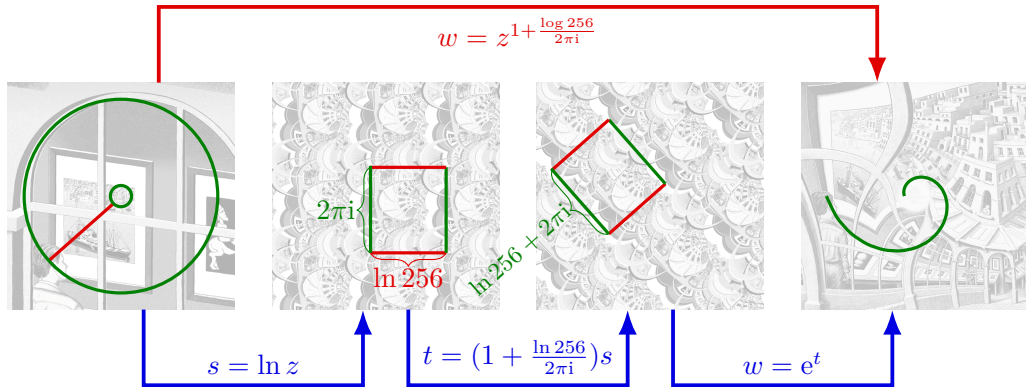
幂函数的应用：埃舍尔的《画廊》



幂函数的应用：埃舍尔的《画廊》



幂函数的应用：埃舍尔的《画廊》



我们知道

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

对于任意实数 x 成立,

我们知道

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

对于任意实数 x 成立, 我们将其推广到复数情形.

不难得到

$$\cos(iy) = \frac{e^y + e^{-y}}{2}, \quad \sin(iy) = i \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

当 $y \rightarrow \infty$ 时, $\cos(iy)$ 和 $\sin(iy)$ 都 $\rightarrow \infty$.

不难得到

$$\cos(iy) = \frac{e^y + e^{-y}}{2}, \quad \sin(iy) = i \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

当 $y \rightarrow \infty$ 时, $\cos(iy)$ 和 $\sin(iy)$ 都 $\rightarrow \infty$. 因此 $\sin z$ 和 $\cos z$ 并不有界.

不难得到

$$\cos(iy) = \frac{e^y + e^{-y}}{2}, \quad \sin(iy) = i \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

当 $y \rightarrow \infty$ 时, $\cos(iy)$ 和 $\sin(iy)$ 都 $\rightarrow \infty$. 因此 $\sin z$ 和 $\cos z$ 并不有界. 这和实变情形完全不同.

不难得到

$$\cos(iy) = \frac{e^y + e^{-y}}{2}, \quad \sin(iy) = i \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

当 $y \rightarrow \infty$ 时, $\cos(iy)$ 和 $\sin(iy)$ 都 $\rightarrow \infty$. 因此 $\sin z$ 和 $\cos z$ 并不有界. 这和实变情形完全不同.

容易看出 $\cos z$ 和 $\sin z$ 的零点都是实数.

这些三角函数的奇偶性, 周期性和导数与实变情形类似,

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z,$$

且在定义域范围内是处处解析的.

这些三角函数的奇偶性, 周期性和导数与实变情形类似,

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z,$$

且在定义域范围内是处处解析的.

三角函数的各种恒等式在复数情形也仍然成立,

这些三角函数的奇偶性, 周期性和导数与实变情形类似,

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z,$$

且在定义域范围内是处处解析的.

三角函数的各种恒等式在复数情形也仍然成立, 例如

这些三角函数的奇偶性, 周期性和导数与实变情形类似,

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z,$$

且在定义域范围内是处处解析的.

三角函数的各种恒等式在复数情形也仍然成立, 例如

- $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2,$

这些三角函数的奇偶性, 周期性和导数与实变情形类似,

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z,$$

且在定义域范围内是处处解析的.

三角函数的各种恒等式在复数情形也仍然成立, 例如

- $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2,$
- $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2,$

这些三角函数的奇偶性, 周期性和导数与实变情形类似,

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z,$$

且在定义域范围内是处处解析的.

三角函数的各种恒等式在复数情形也仍然成立, 例如

- $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2,$
- $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2,$
- $\sin^2 z + \cos^2 z = 1.$

类似的, 我们可以定义双曲函数:

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cos iz,$$

类似的, 我们可以定义双曲函数:

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cos iz,$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = -i \sin iz,$$

类似的,我们可以定义双曲函数:

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cos iz,$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = -i \sin iz,$$

$$\operatorname{th} z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = -i \tan iz, \quad z \neq \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi i.$$

类似的, 我们可以定义双曲函数:

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cos iz,$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = -i \sin iz,$$

$$\operatorname{th} z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = -i \tan iz, \quad z \neq \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi i.$$

它们的奇偶性和导数与实变情形类似, 在定义域范围内是处处解析的.

类似的, 我们可以定义双曲函数:

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cos iz,$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = -i \sin iz,$$

$$\operatorname{th} z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = -i \tan iz, \quad z \neq \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi i.$$

它们的奇偶性和导数与实变情形类似, 在定义域范围内是处处解析的.

$\operatorname{ch} z, \operatorname{sh} z$ 的周期是 $2\pi i$, $\operatorname{th} z$ 的周期是 πi .

设 $z = \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$,

设 $z = \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$, 则

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0,$$

设 $z = \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$, 则

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0, \quad e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1} \text{ (双值).}$$

设 $z = \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$, 则

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0, \quad e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1} \text{ (双值).}$$

因此反余弦函数为

$$w = \operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

设 $z = \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$, 则

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0, \quad e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1} \text{ (双值)}.$$

因此反余弦函数为

$$w = \operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

显然它是多值的.

设 $z = \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$, 则

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0, \quad e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1} \text{ (双值).}$$

因此反余弦函数为

$$w = \operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

显然它是多值的. 同理, 我们有:

设 $z = \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$, 则

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0, \quad e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1} \text{ (双值).}$$

因此反余弦函数为

$$w = \operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

显然它是多值的. 同理, 我们有:

- **反正弦函数** $\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2})$;

设 $z = \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$, 则

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0, \quad e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1} \text{ (双值).}$$

因此反余弦函数为

$$w = \operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

显然它是多值的. 同理, 我们有:

- **反正弦函数** $\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2})$;
- **反正切函数** $\operatorname{Arctan} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz}, z \neq \pm i$;

设 $z = \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$, 则

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0, \quad e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1} \text{ (双值).}$$

因此反余弦函数为

$$w = \operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

显然它是多值的. 同理, 我们有:

- **反正弦函数** $\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2})$;
- **反正切函数** $\operatorname{Arctan} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz}, z \neq \pm i$;
- **反双曲余弦函数** $\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$;

设 $z = \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$, 则

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0, \quad e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1} \text{ (双值)}.$$

因此反余弦函数为

$$w = \operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

显然它是多值的. 同理, 我们有:

- **反正弦函数** $\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2})$;
- **反正切函数** $\operatorname{Arctan} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz}, z \neq \pm i$;
- **反双曲余弦函数** $\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$;
- **反双曲正弦函数** $\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1})$;
- **反双曲正切函数** $\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + z}{1 - z}, z \neq \pm 1$.

典型例题：解三角函数方程

例. 解方程 $\sin z = 2$.

典型例题：解三角函数方程

例. 解方程 $\sin z = 2$.

解. 由于 $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2$,

典型例题：解三角函数方程

例. 解方程 $\sin z = 2$.

解. 由于 $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2$, 我们有

$$e^{2iz} - 4ie^{iz} - 1 = 0.$$

典型例题: 解三角函数方程

例. 解方程 $\sin z = 2$.

解. 由于 $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2$, 我们有

$$e^{2iz} - 4ie^{iz} - 1 = 0.$$

于是 $e^{iz} = (2 \pm \sqrt{3})i$,

典型例题：解三角函数方程

例. 解方程 $\sin z = 2$.

解. 由于 $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2$, 我们有

$$e^{2iz} - 4ie^{iz} - 1 = 0.$$

于是 $e^{iz} = (2 \pm \sqrt{3})i$,

$$z = -i \operatorname{Ln}[(2 \pm \sqrt{3})i] = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi \pm i \ln(2 + \sqrt{3}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

另解. 由 $\sin z = 2$ 可知

$$\cos z = \sqrt{1 - \sin^2 z} = \pm \sqrt{3}i.$$

另解. 由 $\sin z = 2$ 可知

$$\cos z = \sqrt{1 - \sin^2 z} = \pm \sqrt{3}i.$$

于是 $e^{iz} = \cos z + i \sin z = (2 \pm \sqrt{3})i,$

另解. 由 $\sin z = 2$ 可知

$$\cos z = \sqrt{1 - \sin^2 z} = \pm \sqrt{3}i.$$

于是 $e^{iz} = \cos z + i \sin z = (2 \pm \sqrt{3})i$,

$$z = -i \operatorname{Ln}[(2 \pm \sqrt{3})i] = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi \pm i \ln(2 + \sqrt{3}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

另解. 由 $\sin z = 2$ 可知

$$\cos z = \sqrt{1 - \sin^2 z} = \pm \sqrt{3}i.$$

于是 $e^{iz} = \cos z + i \sin z = (2 \pm \sqrt{3})i$,

$$z = -i \operatorname{Ln}[(2 \pm \sqrt{3})i] = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi \pm i \ln(2 + \sqrt{3}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

对于任意 z , 总存在 θ 使得

$$\operatorname{Arcsin} z = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi \pm \theta,$$

$$\operatorname{Arccos} z = 2k\pi \pm \theta,$$

$$\operatorname{Arctan} z = k\pi + \theta, \quad (z \neq \pm i).$$

称分子次数小于分母次数的有理函数为**真分式**. 任何一个有理函数 $f(z)$ 都可以通过带余除法分解为一个多项式 $g(z)$ 和一个真分式之和.

称分子次数小于分母次数的有理函数为**真分式**. 任何一个有理函数 $f(z)$ 都可以通过带余除法分解为一个多项式 $g(z)$ 和一个真分式之和.

若这个有理函数分母的零点均能求出, 则这个真分式又可以分拆为部分分式之和, 其中**部分分式**是指形如 $\frac{a}{(x-b)^k}$ 的真分式.

称分子次数小于分母次数的有理函数为**真分式**. 任何一个有理函数 $f(z)$ 都可以通过带余除法分解为一个多项式 $g(z)$ 和一个真分式之和.

若这个有理函数分母的零点均能求出, 则这个真分式又可以分拆为部分分式之和, 其中**部分分式**是指形如 $\frac{a}{(x-b)^k}$ 的真分式. 我们来介绍求这种分拆的一种方法.

例题：有理函数分拆

例. 将 $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)^2}$ 展开成部分分式之和.

例题：有理函数分拆

例. 将 $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)^2}$ 展开成部分分式之和.

解. 设 $f(z) = \frac{a}{z-1} + \frac{b}{z-2} + \frac{c}{(z-2)^2}$,

例题：有理函数分拆

例. 将 $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)^2}$ 展开成部分分式之和.

解. 设 $f(z) = \frac{a}{z-1} + \frac{b}{z-2} + \frac{c}{(z-2)^2}$, 则

$$a = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{(z - 2)^2} = 1,$$

例题：有理函数分拆

例. 将 $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)^2}$ 展开成部分分式之和.

解. 设 $f(z) = \frac{a}{z-1} + \frac{b}{z-2} + \frac{c}{(z-2)^2}$, 则

$$a = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{(z - 2)^2} = 1,$$

$$b = \lim_{z \rightarrow 2} [(z-2)^2 f(z)]' = \lim_{z \rightarrow 2} \left(\frac{1}{z-1} \right)' = -1,$$

例题：有理函数分拆

例. 将 $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)^2}$ 展开成部分分式之和.

解. 设 $f(z) = \frac{a}{z-1} + \frac{b}{z-2} + \frac{c}{(z-2)^2}$, 则

$$a = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{(z - 2)^2} = 1,$$

$$b = \lim_{z \rightarrow 2} [(z-2)^2 f(z)]' = \lim_{z \rightarrow 2} \left(\frac{1}{z-1} \right)' = -1,$$

$$c = \lim_{z \rightarrow 2} (z - 2)^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{1}{z - 1} = 1.$$

例题：有理函数分拆

例. 将 $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)^2}$ 展开成部分分式之和.

解. 设 $f(z) = \frac{a}{z-1} + \frac{b}{z-2} + \frac{c}{(z-2)^2}$, 则

$$a = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{(z - 2)^2} = 1,$$

$$b = \lim_{z \rightarrow 2} [(z-2)^2 f(z)]' = \lim_{z \rightarrow 2} \left(\frac{1}{z-1} \right)' = -1,$$

$$c = \lim_{z \rightarrow 2} (z - 2)^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{1}{z - 1} = 1.$$

因此

$$f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2} + \frac{1}{(z-2)^2}.$$

例. 计算 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 的 n 阶导数.

得到这种分拆之后, 我们可以求出该有理函数的任意阶导数.

例. 计算 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 的 n 阶导数.

解. 设

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{i}{2} \left(\frac{1}{z+i} - \frac{1}{z-i} \right),$$

得到这种分拆之后, 我们可以求出该有理函数的任意阶导数.

例. 计算 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 的 n 阶导数.

解. 设

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{i}{2} \left(\frac{1}{z+i} - \frac{1}{z-i} \right),$$

则它在除 $z = \pm i$ 外处处解析,

得到这种分拆之后, 我们可以求出该有理函数的任意阶导数.

例. 计算 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 的 n 阶导数.

解. 设

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{i}{2} \left(\frac{1}{z+i} - \frac{1}{z-i} \right),$$

则它在除 $z = \pm i$ 外处处解析, 且

$$f^{(n)}(z) = \frac{i}{2} \left(\frac{1}{z+i} - \frac{1}{z-i} \right)^{(n)}$$

得到这种分拆之后, 我们可以求出该有理函数的任意阶导数.

例. 计算 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 的 n 阶导数.

解. 设

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{i}{2} \left(\frac{1}{z+i} - \frac{1}{z-i} \right),$$

则它在除 $z = \pm i$ 外处处解析, 且

$$f^{(n)}(z) = \frac{i}{2} \left(\frac{1}{z+i} - \frac{1}{z-i} \right)^{(n)} = \frac{i}{2} \cdot (-1)^n n! \left[\frac{1}{(z+i)^{n+1}} - \frac{1}{(z-i)^{n+1}} \right].$$

当 $z = x$ 为实数时,

$$|x + \mathbf{i}| = \sqrt{x^2 + 1}, \quad \arg(x + \mathbf{i}) = \operatorname{arccot} x,$$

于是

$$\frac{1}{(x \pm \mathrm{i})^{n+1}} = (x^2 + 1)^{-\frac{n+1}{2}} \mathrm{e}^{\mp \mathrm{i}(n+1) \operatorname{arccot} x}.$$

因此

$$\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(n)} = (-1)^n n! (x^2+1)^{-\frac{n+1}{2}} \sin[(n+1) \operatorname{arccot} x].$$

我们还可以利用复对数函数来计算实有理函数的不定积分.

例. 计算 $\int \frac{1}{x^3 - 1} dx$.

我们还可以利用复对数函数来计算实有理函数的不定积分.

例. 计算 $\int \frac{1}{x^3 - 1} dx$.

解. 设 $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$,

我们还可以利用复对数函数来计算实有理函数的不定积分.

例. 计算 $\int \frac{1}{x^3 - 1} dx$.

解. 设 $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$, 那么我们有分拆

$$f(x) = \frac{1}{x^3 - 1} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x - 1} + \frac{\zeta}{x - \zeta} + \frac{\zeta^2}{x - \zeta^2} \right),$$

我们还可以利用复对数函数来计算实有理函数的不定积分.

例. 计算 $\int \frac{1}{x^3 - 1} dx$.

解. 设 $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$, 那么我们有分拆

$$f(x) = \frac{1}{x^3 - 1} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x - 1} + \frac{\zeta}{x - \zeta} + \frac{\zeta^2}{x - \zeta^2} \right),$$

设

$$g(z) = \frac{1}{3} [\ln(z-1) + \zeta \ln(z-\zeta) + \zeta^2 \ln(z-\zeta^2)].$$

我们还可以利用复对数函数来计算实有理函数的不定积分.

例. 计算 $\int \frac{1}{x^3 - 1} dx$.

解. 设 $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$, 那么我们有分拆

$$f(x) = \frac{1}{x^3 - 1} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x - 1} + \frac{\zeta}{x - \zeta} + \frac{\zeta^2}{x - \zeta^2} \right),$$

设

$$g(z) = \frac{1}{3} [\ln(z-1) + \zeta \ln(z-\zeta) + \zeta^2 \ln(z-\zeta^2)].$$

$g(z)$ 在复平面去掉三条射线 $x + \zeta^k, x \leq 0$ 内的导数为 $f(z)$.

续解. 当 $z = x > 1$ 时,

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{3} \ln(x-1) + \frac{2}{3} \operatorname{Re}[\zeta \ln(x-\zeta)] \\ &= \frac{1}{3} \ln(x-1) + \frac{2}{3} \operatorname{Re}\left[\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2} \ln\left(x - \frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{3} \ln(x-1) + \frac{2}{3} \operatorname{Re}\left[\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2} \left(\ln \sqrt{x^2+x+1} - \mathrm{i} \operatorname{arccot} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right] \\ &= \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln(x^2+x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arccot} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

续解. 当 $z = x > 1$ 时,

$$\begin{aligned}
 g(x) &= \frac{1}{3} \ln(x-1) + \frac{2}{3} \operatorname{Re}[\zeta \ln(x-\zeta)] \\
 &= \frac{1}{3} \ln(x-1) + \frac{2}{3} \operatorname{Re}\left[\frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \ln\left(x - \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\right] \\
 &= \frac{1}{3} \ln(x-1) + \frac{2}{3} \operatorname{Re}\left[\frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \left(\ln \sqrt{x^2+x+1} - i \operatorname{arccot} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right] \\
 &= \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln(x^2+x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arccot} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}.
 \end{aligned}$$

对于实数 $x < 1$, 可以验证上式的导数也等于 $f(x)$, 从而 $f(x)$ 的不定积分为 $g(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$.