



合肥工业大学
HEFEI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

大学生数学竞赛（非数）

张神星 (合肥工业大学)

翡翠科教楼 B1810 东

zhangshenxing@hfut.edu.cn

<https://faculty.hfut.edu.cn/zhangshenxing>

第二章 导数与微分及其应用

- ① 导数与微分的定义
- ② 导数的计算
- ③ 导数的应用
- ④ 中值定理
- ⑤ 不等式的证明

第一节 导数与微分的定义

- 导数的定义
- 微分的定义

例. 设 $f(0) = 0$, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导的充要条件是().

(A) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(1 - \cos h)$ 存在

(B) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} f(1 - e^h)$ 存在

(C) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(h - \sin h)$ 存在

(D) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(2h) - f(h))$ 存在

解. $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$. 设 $\lim_{h \rightarrow 0} g(h) = 0$. 如果 $f'(0)$ 存在, 那么 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(h))}{g(h)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0)$. 反过来则要求 $g(h)$ 能在任意 $U(0, \delta)$ 的值域覆盖某个 $U(0, \delta_1)$, 这样就能保证

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(h))}{g(h)} \text{ 存在 } \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \text{ 存在.}$$

例. 设 $f(0) = 0$, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导的充要条件是(B).

(A) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(1 - \cos h)$ 存在

(B) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} f(1 - e^h)$ 存在

(C) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(h - \sin h)$ 存在

(D) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(2h) - f(h))$ 存在

续解. 如果 $g(h)$ 在 $U(0, \delta)$ 的值域只能覆盖 $(0, \delta_1)$, 则只能保证 $f'_+(0)$ 存在.

(A): $g(h) = 1 - \cos h \geq 0$, 所以它只能保证 $f'_+(0)$ 存在.

(B): $g(h) = 1 - e^h$ 存在反函数 $h = \ln(1 - x)$, 所以 (B) 正确.

(C): $g(h) = h - \sin h \sim \frac{h^3}{6}$, 所以分母应该换成 h^3 , 这样再加上 g 在 0 附近单调递增就对了 ((C) 是必要条件, 如果分母是 h^4 是充分条件).

(D): 可以选择 $f(x) = 1, x \neq 0$ 来说明它错误.

例. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = A$, 求证: $f'(0)$ 存在且等于 A .

证明. 毫无疑问这里要用到连续性. 由题设可知 $f(2x) - f(x) = Ax + o(x)$, 于是

$$f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = A \cdot \frac{x}{2} + o(x),$$

$$f\left(\frac{x}{2}\right) - f\left(\frac{x}{4}\right) = A \cdot \frac{x}{4} + o(x),$$

$$\vdots$$

$$f\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right) - f\left(\frac{x}{2^n}\right) = A \cdot \frac{x}{2^n} + o(x).$$

将以上各式相加得到

$$f(x) - f\left(\frac{x}{2^n}\right) = Ax\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) + o(x) = Ax\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + o(x).$$

注意这里是因为只有有限项, 所以所有的 $o(x)$ 加起来还是 $o(x)$. 但是这里不能直接令 $n \rightarrow \infty$ 得到 $f(x) - f(0) = Ax + o(x)$, 因为 $x \rightarrow 0$ 和 $n \rightarrow \infty$ 不能随便交换.

例. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = A$, 求证: $f'(0)$ 存在且等于 A .

续证. 我们回头来重新写一下. 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得当 $|x| < \delta$ 时, $f(2x) - f(x) = Ax + \alpha(x)x$, 其中 $|\alpha(x)| < \varepsilon$. 这样我们加起来得到

$$f(x) - f\left(\frac{x}{2^n}\right) = Ax\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) + \sum_{k=1}^n \alpha\left(\frac{x}{2^k}\right) \frac{x}{2^k},$$

这里

$$\left| \sum_{k=1}^n \alpha\left(\frac{x}{2^k}\right) \frac{x}{2^k} \right| \leq \varepsilon \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) |x| < \varepsilon |x|.$$

令 $n \rightarrow \infty$, 并由 $f(x)$ 在 0 处的连续性得到 $|f(x) - f(0) - Ax| \leq \varepsilon |x|$. 最后由 ε 的任意性可得 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0) - Ax}{x} = 0$, 即 $f'(0)$ 存在且等于 A . □

例. 设 $f(x)$ 是定义在 $-1 < x < 1$ 的实值函数, 且 $f'(0)$ 存在. 设 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是两个实数列, 且 $-1 < a_n < 0 < b_n < 1, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = f'(0)$.

证明. 这题和上一题有类似的想法. 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得当 $0 < |x| < \delta$ 时, $\left| \frac{f(x) - f(0)}{x} - f'(0) \right| < \varepsilon$. 由于 a_n, b_n 极限均为 0, 因此存在 N 使得当 $n > N$ 时, $|a_n| < \delta, |b_n| < \delta$. 于是

$$|f(a_n) - f(0) - a_n f'(0)| < |a_n| \varepsilon = -a_n \varepsilon,$$

$$|f(b_n) - f(0) - b_n f'(0)| < |b_n| \varepsilon = b_n \varepsilon.$$

由三角不等式

$$\begin{aligned} & |f(b_n) - f(a_n) - (b_n - a_n)f'(0)| \\ & \leq |f(b_n) - f(0) - b_nf'(0)| + |f(a_n) - f(0) - a_nf'(0)| \\ & < (b_n - a_n)\varepsilon, \end{aligned}$$

最后由 ε 的任意性可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = f'(0)$.



例. 设 $a_1, \dots, a_n$ 为实数, 且 $\left| \sum_{k=1}^n a_k \sin kx \right| \leq |\sin x|$, $\left| \sum_{j=1}^n a_{n-j+1} \sin jx \right| \leq |\sin x|$. 证明: $\left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq \frac{2}{n+1}$.

证明. 这题看上去没什么想法, 但是如果利用 $\sin x \sim x$ 替换掉, 我们就可以发现绝对值内部的两个求和, 加在一起正好抵消成了 $(n+1)a_k x$. 所以我们要用它在 0 处的近似, 也就是导数.

$$f(x) = \sum_{k=1}^n a_k \sin kx, \quad g(x) = \sum_{j=1}^n a_{n-j+1} \sin jx = \sum_{k=1}^n a_k \sin(n+1-k)x.$$

那么 $f(0) = g(0) = 0$,

$$f'(x) = \sum_{k=1}^n k a_k \cos kx, \quad g'(x) = \sum_{k=1}^n (n+1-k) a_k \cos kx, \quad f'(0) + g'(0) = (n+1) \sum_{k=1}^n a_k.$$

$$\text{故 } \sum_{k=1}^n a_k = \frac{f'(0) + g'(0)}{n+1}.$$

例. 设 $a_1, \dots, a_n$ 为实数, 且 $\left| \sum_{k=1}^n a_k \sin kx \right| \leq |\sin x|$, $\left| \sum_{j=1}^n a_{n-j+1} \sin jx \right| \leq |\sin x|$. 证明: $\left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq \frac{2}{n+1}$.

续证. 现在来估计 $f'(0), g'(0)$. 由 $|f(x)| \leq |\sin x|$ 可知对于 $x \neq 0$, $\left| \frac{f(x) - f(0)}{\sin x - \sin 0} \right| \leq 1$. 取极限得到 $|f'(0)| \leq 1$. 同理 $|g'(0)| \leq 1$. 于是

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k \right| = \frac{|f'(0) + g'(0)|}{n+1} \leq \frac{|f'(0)| + |g'(0)|}{n+1} \leq \frac{2}{n+1}.$$



例. 下列命题正确的是().

(A) 若 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 内连续, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界.

(B) 若 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内连续, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界.

(C) 若 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界.

(D) 若 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界, 则 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界.

解. 开区间内连续和有界一般没什么关系. 设 $f(x) = \frac{1}{x}$, 则可知 (A)(B) 错误. 设 $f(x) = \sqrt{x}$, 则可知 (D) 错误. 对于 (C), 由

$$f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(x - \frac{1}{2}\right)f'(\xi)$$

可知 $f(x)$ 有界.

例. 设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有界可导, 则(B).

(A) 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 时, 必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

(B) 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 存在时, 必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

(C) 当 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ 时, 必有 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$.

(D) 当 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$ 存在时, 必有 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$.

解. 只需考虑某些振荡得比较厉害的情形即可. 对于 (A), $f(x)$ 可以振荡着趋于 0, 而且每次振荡出一个非常陡的尖尖, (A) 错误.

对于 (B), 如果 $f'(x)$ 的极限为 $A \neq 0$, 那么充分大之后, $f(x)$ 基本上和 Ax 具有相似的增长幅度, 所以不可能有界.

续解. 严格证明: 存在 X 使得 $x > X$ 时, $|f'(x) - A| < \frac{|A|}{2}$, 于是 $f'(x)$ 在 A 和 $\frac{A}{2}$ 之间. 由拉格朗日定理可知存在 $\xi \in (X, x)$ 使得 $f(x) - f(X) = (x - X)f'(\xi)$. 设 $|f(x)| \leq M$, 则

$$2M \geq |f(x) - f(X)| \geq \frac{|A|(x - X)}{2},$$

当 $x > X + \frac{4M}{|A|}$ 时得到矛盾.

(C)(D) 考虑 $f(x) = \sin x$ 即可知错误.

第二节 导数的计算

- 利用求导公式和求导法则求导
- 分段函数的求导法
- 隐函数、参数方程及反函数的导数
- 积分上限函数的导数
- 高阶导数

例. 设 $f(x) = \frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$, 求 $f'(1)$.

解. 设 $g(x) = \frac{(x-2)\cdots(x-n)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$, 则 $f(x) = (x-1)g(x)$, $f'(x) = g(x) + (x-1)g'(x)$, 因此

$$f'(1) = g(1) = \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}.$$

如果利用对数求导法, 我们可以得到

$$(\ln f)' = \frac{f'}{f} = \frac{1}{x-1} + \cdots + \frac{1}{x-n} - \frac{1}{x+1} - \cdots - \frac{1}{x+n}.$$

$$\text{例如 } f'(0) = f(0) \cdot \left(-2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) = 2(-1)^{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

例. 设 $f_1(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $f_n(x) = f_1(f_{n-1}(x))$. 求 $f'_n(1)$.

解.

$$f_2(x) = f_1(f_1(x)) = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+x^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}.$$

我们猜测 $f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$. 归纳: 设 $f_k(x) = \frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}$, 则

$$f_{k+1}(x) = f_1(f_k(x)) = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+kx^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}.$$

因此由数学归纳法可知成立.

$$f'_n(x) = (1 + nx^2)^{-\frac{1}{2}} + x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(1 + nx^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (2nx) = \frac{1}{(1 + nx^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

例. 求对数螺线 $\rho = e^\theta$ 在点 $(\rho, \theta) = (e^{\frac{\pi}{2}}, \frac{\pi}{2})$ 处的切线方程.

解. 根据直角坐标与极坐标的关系

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \implies \rho = e^{\frac{\pi}{2}}, \theta = \frac{\pi}{2}, x = 0, y = e^{\frac{\pi}{2}}.$$

于是

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\theta=\pi/2} = \frac{d\rho \sin \theta + \rho \cos \theta d\theta}{d\rho \cos \theta - \rho \sin \theta d\theta} = \frac{e^\theta \sin \theta + e^\theta \cos \theta}{e^\theta \cos \theta - e^\theta \sin \theta} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\cos \theta - \sin \theta},$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\theta=\pi/2} = -1, \text{ 方程为 } x + y = e^{\frac{\pi}{2}}.$$

例. 设函数 $y = y(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有二阶导数, 且 $y' \neq 0$, $x = x(y)$ 是 $y = y(x)$ 的反函数. 求 $\frac{d^2x}{dy^2} + (y + \sin x) \left(\frac{dx}{dy}\right)^3 = 0$ 满足 $y(0) = 0, y'(0) = \frac{3}{2}$ 的解.

解. 根据反函数的导数性质:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'}, \quad \frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d(1/y')}{dy} = \frac{1}{y'} \cdot \left(-\frac{y''}{y'^2} \right) = -\frac{y''}{y'^3}.$$

代入原方程中得到

$$-\frac{y''}{y'^3} + (y + \sin x) \left(\frac{1}{y'}\right)^3 = 0, \quad y'' - y - \sin x = 0.$$

注意到齐次部分 $y'' - y = 0$ 的通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$. 设 $y = A \cos x + B \sin x$ 是一特解, 代入可得 $A = 0, B = -\frac{1}{2}$. 因此通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2} \sin x$, 代入初值条件可得

$$y = e^x - e^{-x} - \frac{1}{2} \sin x.$$

例. 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $F(x) = \int_0^{x^2} t f(x^2 - t) dt$. 求 $F'(x)$.

解. 令 $u = x^2 - t$, 则

$$F(x) = \int_{x^2}^0 (x^2 - u)f(u)(-\mathrm{d}u) = \int_0^{x^2} (x^2 - u)f(u) \mathrm{d}u.$$

所以

$$F'(x) = 2x(x^2 - x^2)f(x^2) + \int_0^{x^2} 2xf(u) \, du = 2x \int_0^{x^2} f(u) \, du.$$

这里我们利用了如下公式

$$\frac{d}{dx} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, u) \, du = f(x, \beta(x))\beta'(x) - f(x, \alpha(x))\alpha'(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, u) \, du.$$

常见函数的高阶导数公式如下:

$$(1) \quad (e^{ax})^{(n)} = a^n e^{ax};$$

$$(2) \quad (\cos ax)^{(n)} = a^n \cos\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right), \quad (\sin ax)^{(n)} = a^n \sin\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right);$$

$$(3) \quad (\ln(1+ax))^{(n)} = (-1)^{n-1} a^n \frac{(n-1)!}{(1+ax)^n}, \quad \left(\frac{1}{1+ax}\right)^{(n)} = (-1)^n a^n \frac{n!}{(1+ax)^{n+1}};$$

(4) 莱布尼兹公式: $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$. 特别地, 如果 u 是一个 k 多项式, 则实际只有 $k+1$ 项.

例. 设 $y = \arctan x$, 求 $y^{(n)}(0), n \geq 3$.

解. 注意到 $y' = \frac{1}{1+x^2}$, $(1+x^2)y' = 1$. 两边同时求 $n-1$ 阶导得到

$$(1+x^2)y^{(n)} + C_{n-1}^1 2xy^{(n-1)} + C_{n-1}^2 2y^{(n-2)} = 0$$

$$y^{(n)} + n(n-1)y^{(n-2)} = 0,$$

显然 $y'(0) = 1, y''(0) = 0$, 递推可得 $y^{(2m)}(0) = 0, y^{(2m+1)}(0) = (-1)^m (2m)!$.

另解. 由

$$y' = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots, |x| < 1$$

可得

$$y = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots, |x| < 1.$$

由泰勒展开与高阶导数关系可知 $y^{(2m)}(0) = 0, y^{(2m+1)}(0) = (-1)^m (2m)!$.

例. 设 $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x$, 求 $y^{(n)}(0), n \geq 3$.

解. 注意到

$$y' = \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} \arcsin x + \frac{1}{1-x^2}.$$

所以

$$(1 - x^2)y' = xy + 1$$

两边同时求 n 阶导得到

$$(1-x^2)y^{(n+1)} + C_n^1(-2x)y^{(n)} + C_n^2(-2)y^{(n-1)} = xy^{(n)} + C_n^1y^{(n-1)},$$

令 $x = 0$, 得到 $y^{(n+1)}(0) = n^2 y^{(n-1)}(0), n \geq 1$. 注意到 $y'(0) = 1$, 故

$$y^{(2m)}(0) = 0, \quad y^{(2m+1)}(0) = (2m)!!^2 = 4^m m!^2.$$

事实上, 这是一个奇函数, 所以在 0 处偶数阶导数都为零.

例. 设 $y = \cos(\beta \arcsin x)$, 求 $y^{(n)}(0)$.

解. 这题的想法也是类似的. 注意到

$$y' = -\sin(\beta \arcsin x) \cdot \beta \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, y'(0) = 0,$$

$$y'' = -\cos(\beta \arcsin x) \cdot \beta^2 \cdot \frac{1}{1-x^2} - \sin(\beta \arcsin x) \cdot \beta \cdot \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}, y''(0) = -\beta^2.$$

所以

$$(1 - x^2)y'' = -\beta^2 y + xy'.$$

两边同时求 n 阶导得到

$$(1-x^2)y^{(n+2)} + C_n^1(-2x)y^{(n+1)} + C_n^2(-2)y^{(n)} = -\beta^2 y^{(n)} + xy^{(n+1)} + C_n^1 y^{(n)},$$

令 $x = 0$, 得到 $y^{(n+2)}(0) = (n^2 - \beta^2)y^{(n)}(0)$. 故

$$y^{(2m-1)}(0) = 0, \quad y^{(2m)}(0) = \prod_{k=1}^{m-1} (4k^2 - \beta^2).$$

第三节 导数的应用

- 函数的极值与最值
- 拐点与凹凸性
- 渐近线
- 杂例

例. 设 $f(x)$ 在 $x=1$ 的某邻域内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(f(x+1) + \cos x)}{\sqrt{1-x^2} - 1} = -1$. 问 $f(1)$ 是否为 $f(x)$ 的极值并说明理由.

解. 由题设可知

$$\begin{aligned} -1 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(f(x+1) + \cos x)}{\sqrt{1-x^2} - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+1) + \cos x - 1}{-\frac{1}{2}x^2} = 1 - 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+1)}{x^2}. \end{aligned}$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+1)}{x^2} = 1$. 由连续可知 $f(1) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x+1) = 0$. 由极限的保号性可知存在 $\delta > 0$ 使得 $x \in \overset{\circ}{U}(0, \delta)$ 时 $\frac{f(x+1)}{x^2} > 0$, 从而 $x \in \overset{\circ}{U}(1, \delta)$ 时 $f(x) > 0$, $f(1)$ 是一个极小值.

关键在于分母是偶数次的.

例. 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 二阶连续可导, 且满足 $xf''(x) + 3x(f'(x))^2 = 1 - e^{-x}$. 若 $x = c$ 是 $f(x)$ 的驻点, 问 $f(c)$ 是否为 $f(x)$ 的极值并说明理由.

解. (1) 若 $c \neq 0$, 则 $f'(c) = 0$,

$$f''(c) = \frac{1 - e^{-c}}{c} > 0.$$

从而是极小值点.

(2) 若 $c = 0$, 则当 $x \neq 0$ 时,

$$f''(x) = -3(f'(x))^2 + \frac{1 - e^{-x}}{x}.$$

由于 $f(x)$ 二阶连续可导, 因此

$$f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f''(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-3(f'(x))^2 + \frac{1 - e^{-x}}{x} \right) = 1 > 0.$$

从而是极小值点.

例. 设 $y = y(x)$ 满足方程 $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+y} = e$. 求当 $x > 0$ 时, 函数 $y = y(x)$ 的值域.

解. 不难知道 $y = \frac{1}{\ln(1 + \frac{1}{x})} - x$. 为了求导方便, 我们设 $t = \frac{1}{x} \in (0, +\infty)$,

$$f(t) = \frac{1}{\ln(1+t)} - \frac{1}{t}.$$

$$f'(t) = -\frac{1}{(1+t)\ln^2(1+t)} + \frac{1}{t^2} = \frac{1}{t^2\ln^2(1+t)}\left(\ln^2(1+t) - \frac{t^2}{t+1}\right).$$

设 $s = t + 1 \in [1, +\infty)$, 则

$$\ln^2(1+t) - \frac{t^2}{t+1} = \ln^2 s - \frac{(s-1)^2}{s}.$$

例. 两条宽分别为 a 与 b 的走廊相交成直角. 求一个梯子能够水平地通过这两条走廊的最大长度.

解. 不妨设两个走廊分别由 $y=0, y=a$ 和 $x=-b, x=0$ 夹出. 设过原点直线为 $y=kx, k>0$, 那么它与 $y=a$ 的交点为 $P(a/k, a)$, 与 $x=-b$ 的交点为 $Q(-b, -kb)$. 二者距离的最小值即为梯子最大长度. 设 $f(k)$ 为 PQ 长度的平方, 则

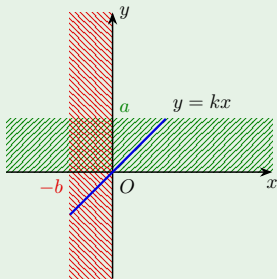
$$f(k) = \left(\frac{a}{k} + b\right)^2 + (a + kb)^2,$$

$$f'(k) = -\frac{2a}{k^2} \left(\frac{a}{k} + b \right) + 2b(a + kb) = \frac{2b(bk + a)}{k^3} \left(k^3 - \frac{a}{b} \right).$$

显然 f 在 $(0, \sqrt[3]{a/b}]$ 上单调递减, 在 $[\sqrt[3]{a/b}, +\infty)$ 上单调递增, 因此 $f(k)$ 的最小值为

$$f(\sqrt[3]{a/b}) = (\sqrt[3]{b}(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}))^2 + (\sqrt[3]{a}(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}))^2 = (\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2})^3,$$

最大长度为 $(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2})^{3/2}$.



解. $f(x)$ 在 x_0 处的 n 阶泰勒展开为

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) \\ &= f(x_0) + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n). \end{aligned}$$

(1) 当 n 为偶数时, $f(x) - f(x_0)$ 在 x_0 附近和 $f^{(n)}(x_0)$ 同号, 因此

- 当 $f^{(n)}(x_0) < 0$ 时, $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值;
- 当 $f^{(n)}(x_0) > 0$ 时, $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值.

(2) 当 n 为奇数时, 由于 $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, $f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$ 在 x_0 两侧变号, 从而 $f(x_0)$ 不是极值. 注意到 $f''(x)$ 在 x_0 处的 $n - 2$ 阶泰勒展开为

$$f''(x) = \frac{1}{(n-2)!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^{n-2} + o((x - x_0)^{n-2}).$$

同理, $f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^{n-2}$ 在 x_0 两侧变号, 从而 $f''(x)$ 在 x_0 两侧变号, $(x_0, f(x_0))$ 是拐点.

例. 设 $n > 1$ 是奇数, 证明 n 次实系数多项式最少有一个拐点.

解. 设 $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, n \geq 3, a_n \neq 0$. 那么

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 \cdots + na_n x^{n-1}, \quad f''(x) = 2a_2 + 6a_3 \cdots + n(n-1)a_n x^{n-2}.$$

由于 f'' 次数为奇数, 因此存在 $A, B > 0$ 使得 $f''(A)f''(-B) < 0$, 从而由零点定理知 $f''(x) = 0$ 在 $\mathbb{R}$ 上至少有一个零点, 记为 $x = c$.

由于实系数多项式的复根成对出现, 因此 $f''(x)$ 实根的重数之和为奇数. 不妨设 $x = c$ 就是奇数 k 重的实根, 那么 $f''(c) = \cdots = f^{(k+1)}(c) = 0, f^{(k+2)}(x) \neq 0$. 所以 $(c, f(c))$ 是拐点.

也可以不用复根来说明. 如果 $f''(x)$ 的所有零点都不是 $y = f(x)$ 的拐点, 那么 $f''(x)$ 在这些点两侧均同号, 从而 $f''(x)$ 恒 ≥ 0 或恒 ≤ 0 , 这与 $f''(A)f''(-B) < 0$ 矛盾.

续解.

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x} e^{\frac{\pi}{2} + \arctan x} = 1,$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (y - ax) = \lim_{x \rightarrow -\infty} ((x-1)e^{\frac{\pi}{2} + \arctan x} - x) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(1 - \frac{1}{x})e^{\arctan x + \frac{\pi}{2}} - 1}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(1 - \frac{1}{x})(1 - \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})) - 1}{\frac{1}{x}} = -2. \end{aligned}$$

因此 $y = x - 2$ 是一条斜渐近线. 由于 y 处处连续, 因此没有垂直渐近线.

例. 求方程 $x^2 \sin \frac{1}{x} = 2x - 501$ 的近似解, 精确到 0.001.

解. 我们利用 $\sin t$ 的泰勒展开:

$$\sin t = t - \frac{1}{2} \sin(\theta t) t^2, \quad 0 < \theta < 1.$$

令 $t = \frac{1}{x}$ 得到

$$\sin \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} \sin \frac{\theta}{x} = \frac{2}{x} - \frac{501}{x^2},$$

因此 $x = 501 - \frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{x}$. 这说明 $x > 500, 0 < \frac{\theta}{x} < \frac{1}{500}$,

$$|x - 501| = \frac{1}{2} \left| \sin \frac{\theta}{x} \right| \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{\theta}{x} < 0.001.$$

故 $x = 501$.

续解. 由

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{2} = \frac{1}{2} f''(0)$$

可知 $f(x) \sim \frac{1}{2}f''(0)x^2$. 因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 f(u)}{f(x) \sin^3 u} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \cdot \frac{1}{2} f''(0) u^2}{\frac{1}{2} f''(0) x \cdot u^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{u}$$

而

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{u}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{f(x)}{f'(x)}}{x} = 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x f'(x)} = 1 - \frac{1}{2} f''(0) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f'(x)} \\ &= 1 - \frac{1}{2} f''(0) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0}} = 1 - \frac{1}{2} f''(0) \cdot \frac{1}{f''(0)} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

因此原极限为 2.

第四节 中值定理

- 满足特定方程的单点
- 多点等式
- 恒等式
- 综合题

例. 设函数 $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上二阶可导, 且 $|f(x)| \leq 1$, $f(0)^2 + (f'(0))^2 = 4$. 证明存在 $\xi \in (-2, 2)$ 使得 $f(\xi) + f''(\xi) = 0$.

解. 设 $F(x) = f(x)^2 + (f'(x))^2$, 则

$$F'(x) = 2f(x)f'(x) + 2f'(x)f''(x) = 2f'(x)(f(x) + f''(x)).$$

我们现在需要找一个 ξ 使得 $F'(\xi) = 0$, 也就是一个驻点. 但是现在没有等式让我们应用罗尔定理. 所以我们需要另一种方法, 只要说明这个函数不单调, 那么就可以根据 F' 的连续性得到存在零点.

分别对 $f(x)$ 在 $[-2, 0]$ 和 $[0, 2]$ 上应用拉朗日定理得到存在 $\xi_1 \in (-2, 0)$, $\xi_2 \in (0, 2)$ 使得

$$f'(\xi_1) = \frac{f(0) - f(-2)}{2}, \quad f'(\xi_2) = \frac{f(2) - f(0)}{2}.$$

由 $|f(x)| \leq 1$ 可得 $|f'(\xi_1)|, |f'(\xi_2)| \leq 1$. 加上 $|f(x)| \leq 1$ 可得 $0 \leq F(\xi_1), F(\xi_2) \leq 2$. 而 $F(0) = 4$, 这表明 $F(x)$ 在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上的最大值 $F(\xi)$ 位于 (ξ_1, ξ_2) 内部, 它必然是一个驻点, $F'(\xi) = 0$. 最后 $F(\xi) \geq 4$ 表明 $f'(\xi) \neq 0$, 所以 $f(\xi) + f''(\xi) = 0$.

例 (达布定理, 即导数介值定理). 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, u 介于 $f'(a)$ 与 $f'(b)$ 之间. 证明存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi) = u$.

证明. (1) 设 $u = 0$. 此时 $f'(a), f'(b)$ 一正一负. 不妨设 $f'(a) > 0, f'(b) < 0$, 则

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) > 0.$$

由极限的保号性, 存在 $\delta > 0$ 使得 $x \in (a, a + \delta)$ 时, $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$, 从而 $f(x) > f(a)$. 同理可得: 存在 $\delta' > 0$ 使得 $x \in (b - \delta', b)$ 时, $f(x) > f(b)$. 这说明 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值 $f(\xi)$ 在 (a, b) 内部取得. 自然地, $f'(\xi) = 0$.

(2) 对于一般的 u , 设 $g(x) = f(x) - ux$. 那么 0 在 $g'(a)$ 和 $g'(b)$ 之间, 从而存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $g'(\xi) = 0$, 即 $f'(\xi) = u$. □

对于需要证明存在多个点使得某个等式成立的问题, 需要多次使用拉格朗日公式, 或者同时使用拉格朗日定理和柯西定理.

例. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, $0 \leq a < b \leq \frac{\pi}{2}$. 证明存在 $\xi_1, \xi_2 \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi_2) \tan \frac{a+b}{2} = f'(\xi_1) \frac{\sin \xi_2}{\cos \xi_1}$.

注意到等式中出现了 $\frac{f'(\xi_1)}{\cos \xi_1}$ 和 $\frac{f'(\xi_2)}{\sin \xi_2}$, 因此我们需要用柯西定理.

证明. 对于函数 $f(x)$ 和 $\sin x$ 在 $[a, b]$ 上应用柯西定理, 存在 $\xi_1 \in (a, b)$ 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{\sin b - \sin a} = \frac{f'(\xi_1)}{\cos \xi_1}.$$

对于函数 $f(x)$ 和 $\cos x$ 在 $[a, b]$ 上应用柯西定理, 存在 $\xi_2 \in (a, b)$ 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{\cos b - \cos a} = \frac{f'(\xi_2)}{-\sin \xi_2}.$$

因此

$$f'(\xi_1) \frac{\sin \xi_2}{\cos \xi_1} = -f'(\xi_2) \frac{\cos b - \cos a}{\sin b - \sin a} = -f'(\xi_2) \frac{-2 \sin \frac{b+a}{2} \sin \frac{b-a}{2}}{2 \sin \frac{b-a}{2} \cos \frac{b+a}{2}} = f'(\xi_2) \tan \frac{b+a}{2}. \quad \square$$

例. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可微, $f(0) = 0, f(1) = 1, k_1, \dots, k_n$ 为 n 个正数. 证明存在互不相同的 $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, 1]$ 使得 $\sum_{i=1}^n \frac{k_i}{f'(x_i)} = \sum_{i=1}^n k_i$.

如果 $n = 1$, 问题就是 $f'(x_1) = 1$, 由拉格朗日定理易知.

如果 $n = 2$, 问题变成 $\frac{k_1}{f'(x_1)} + \frac{k_2}{f'(x_2)} = k_1 + k_2$. 不妨假设 $k_1 + k_2 = 1$. 如果我们将区间分成 $(0, a), (a, 1)$ 两部分用拉格朗日定理, 存在 $x_1 \in (0, a), x_2 \in (a, 1)$ 使得

$$f'(x_1) = \frac{f(a) - f(0)}{a - 0} = \frac{f(a)}{a}, \quad f'(x_2) = \frac{f(1) - f(a)}{1 - a} = \frac{1 - f(a)}{1 - a}.$$

$$\frac{k_1}{f'(x_1)} + \frac{k_2}{f'(x_2)} = \frac{k_1 a}{f(a)} + \frac{(1-a)(1-k_1)}{1-f(a)},$$

自然地, 取 $f(a) = k_1$ 即可. 这提示我们将 $(0, 1)$ 划分成 $k_1, \dots, k_n$ 这 n 段, 并分别取原像.

例. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上二阶可导, $f''(x) > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \alpha > 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \beta < 0$, 且存在 x_0 使得 $f(x_0) < 0$. 证明 $f(x)$ 有且仅有两个零点.

证明. 存在 $X_1 > x_0$ 使得当 $x > X_1$ 时, $f'(x) > \frac{\alpha}{2}$. 由拉格朗日定理, 存在 $\xi \in (X_1, x)$ 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(X_1)}{x - X_1}.$$

因此 $f(x) > f(X_1) + \frac{\alpha}{2}(x - X_1)$, 当 x 充分大时 $f(x) > 0$, 记为 $f(x_1) > 0$. 同理, 存在 $x_2 < x_0$ 满足 $f(x_2) > 0$. 由介值定理可知 $f(x)$ 在 (x_2, x_0) 和 (x_0, x_1) 内各至少有一个零点.

如果 $f(x)$ 至少有三个零点 $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3$, 则由罗尔定理, 存在 $\eta_1 \in (\xi_1, \xi_2), \eta_2 \in (\xi_2, \xi_3)$ 满足 $f'(\eta_1) = f'(\eta_2) = 0$. 再由 $f'(x)$ 的罗尔定理, 存在 $\eta \in (\eta_1, \eta_2)$ 满足 $f''(\eta) = 0$, 矛盾! 故 $f(x)$ 恰有两个零点. □

例. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, $f(a) = 0$, 存在 $k > 0$ 使得 $|f'(x)| \leq k|f(x)|$. 证明 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上恒为零.

由 $y' = ky$ 的解为 e^{kx} , 我们可以尝试考虑 $F(x) = e^{-kx} f(x)$.

证明. 设 $F(x) = e^{-kx} f(x)$, 则

$$|f'(x)| = |ke^{kx}F(x) + e^{kx}F'(x)| \leq k|f(x)| = ke^{kx}|F(x)|,$$

因此 $|kF + F'| \leq kF$. 设 $F(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上的最大值为 M , 则一定存在最小的 c 使得 $F(c) = M$.

若 $F(c) = M > 0$, 则 $c > a$, 存在 $\delta > 0$ 使得 $x \in (c - \delta, c + \delta)$ 时, $F(x) > 0$. 设 $d \in (c - \delta, c)$, 则由拉格朗日定理, 存在 $\xi \in (d, c)$ 使得

$$F'(\xi) = \frac{F(c) - F(d)}{c - d} > 0.$$

由于 $F(\xi) > 0$, 因此 $kF(\xi) + F'(\xi) > kF(\xi)$, 与 $|kF + F'| \leq kF$ 矛盾! 因此 $F(x) \leq 0$. 同理可得 $F(x) \geq 0$, 从而 $F(x) \equiv 0, f(x) \equiv 0$. □

例. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上无穷阶可导, $f(\frac{1}{k}) = 0, i = 1, 2, 3, \dots$, 且存在 $\ell > 0$ 使得 $|f^{(n)}(x)| < \ell, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$. 证明 $f(x)$ 恒为零.

证明. 设 $x_k = \frac{1}{k}$, 则 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$, 因此由 $f(x)$ 连续可知 $f(0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = 0$.

对 $f(x)$ 在 $[x_{k+1}, x_k]$ 上应用罗尔定理, 存在 $y_k \in (x_{k+1}, x_k)$ 使得 $f'(y_k) = 0$. 由于 $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = 0$, 且 $f'(x)$ 连续, 因此 $f'(0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f'(y_k) = 0$.

对 $f'(x)$ 在 $[y_{k+1}, y_k]$ 上应用罗尔定理, 存在 $z_k \in (y_{k+1}, y_k)$ 使得 $f''(z_k) = 0$. 同理可得 $f''(0) = 0$.

依次下去可以得到 f 在 0 处的任意阶导数都为零. 由麦克劳林展开

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n, \quad 0 < \theta < 1$$

得到 $|f(x)| \leq \frac{\ell}{n!}|x|^n$. 令 $n \rightarrow \infty$, 得到 $f(x) = 0$.

例. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续, $(0, 2)$ 内二阶可导, 且 $|f(x)| \leq 1, |f''(x)| \leq 1$. 证明 $|f'(x)| \leq 2, \forall x \in (0, 2)$.

由于题目中考虑的是 $f'(x)$ 的估计, 因此我们在 x 处展开.

证明. $f(x)$ 在 x 处泰勒展开 $f(0), f(2)$ 得到

$$\begin{aligned} f(0) &= f(x) + f'(x)(0 - x) + f''(\xi_1) \frac{(-x)^2}{2}, \quad \xi_1 \in (0, x), \\ f(2) &= f(x) + f'(x)(2 - x) + f''(\xi_2) \frac{(2 - x)^2}{2}, \quad \xi_2 \in (x, 2). \end{aligned}$$

例. 设函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上连续, $(0, 2)$ 内三阶连续可导, 且 $f(-1) = 0, f(1) = 1, f'(0) = 0$. 证明存在 $\xi \in (-1, 1)$ 使得 $f'''(\xi) = 3$.

证明. $f(x)$ 在 0 处泰勒展开 $f(-1), f(1)$ 得到

$$\begin{aligned}f(-1) &= f(0) - f'(0) + \frac{1}{2}f''(0) - \frac{1}{6}f'''(\xi_1), \quad \xi_1 \in (-1, 0), \\f(1) &= f(0) + f'(0) + \frac{1}{2}f''(0) + \frac{1}{6}f'''(\xi_2), \quad \xi_2 \in (0, 1).\end{aligned}$$

两式相减得到

$$f(1) - f(-1) = 2f'(0) + \frac{1}{6}(f'''(\xi_2) + f'''(\xi_1)), \quad f'''(\xi_2) + f'''(\xi_1) = 6.$$

由于 3 位于 $f'''(\xi_1), f'''(\xi_2)$ 之间, 且 $f'''(x)$ 连续, 由介值定理可知存在 $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ 使得 $f'''(\xi) = 3$. □

第五节 不等式的证明

- 利用单调性证明不等式
- 利用函数的最值证明不等式
- 利用凹凸性证明不等式
- 利用中值定理证明不等式

例. 证明 $\frac{1}{\sin^2 x} \leq \frac{1}{x^2} + 1 - \frac{4}{\pi^2}, 0 < x \leq \frac{\pi}{2}$.

证明. 令 $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} \leq \frac{1}{x^2} + 1 - \frac{4}{\pi^2}$, 则 $f(\frac{\pi}{2}) = 0$,

$$f'(x) = \frac{-2 \cos x}{\sin^3 x} + \frac{2}{x^3} = \frac{2(\sin^3 x - x^3 \cos x)}{x^3 \sin^3 x}.$$

设 $g(x) = x - \sin x \cos^{-1/3} x$, 则 $g(0) = 0$,

$$g'(x) = 1 - \cos^{2/3} x - \frac{1}{3} \sin^2 x \cos^{-4/3} x, \quad g'(0) = 0$$

$$g''(x) = \frac{2}{3} \sin x \cos^{-1/3} x - \frac{1}{2} \sin x \cos^{-1/3} x - \frac{4}{9} \sin^3 x \cos^{-7/3} x = -\frac{4}{9} \sin^3 x \cos^{-7/3} x \leq 0,$$

因此 $g'(x) \leq g'(0) = 0, g(x) \leq g(0) = 0$. 从而 $f'(x) \geq 0, f(x) \leq (\frac{\pi}{2}) = 0$. □

例. 证明当 $x > 0, x \neq 1$ 是, $\frac{\ln x}{x-1} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$.

证明. 当 $0 < x < 1$ 时, 原命题等价于 $\ln x \geq \frac{x-1}{\sqrt{x}}$; 当 $x > 1$ 时, 原命题等价于 $\ln x \leq \frac{x-1}{\sqrt{x}}$. 设 $u = \sqrt{x}$, $f(u) = \frac{u^2-1}{u} - 2\ln u$, 则

$$f'(u) = 1 + \frac{1}{u^2} - \frac{2}{u} = \left(1 - \frac{1}{u}\right)^2 \geq 0.$$

因此当 $0 < u < 1$ 时, $f(u) \leq f(1) = 0$; 当 $u > 1$ 时, $f(u) \geq f(1) = 0$. □

例. 设 $f(x) = \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} |\sin t| dt$. 证明 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数, 且 $2 - \sqrt{2} \leq f(x) \leq \sqrt{2}$.

证明.

$$f(x + \pi) = \int_{x+\pi}^{x+\frac{3\pi}{2}} |\sin t| \, dt \stackrel{\text{令 } t = u + \pi}{=} \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} |\sin u| \, du = f(x).$$

因此 $f(x)$ 是周期为 π 的函数, 我们只需要考虑它在闭区间 $[0, \pi]$ 上的最值.

$$f'(x) = \left| \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \right| - |\sin x| = |\cos x| - |\sin x|.$$

令 $f'(x) = 0$ 得到驻点 $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$. 由

$$f(0) = f(\pi) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \, dt = 1, \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin t \, dt = \sqrt{2}, \quad f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} |\sin t| \, dt = 2 - \sqrt{2}.$$

可知 $f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{2}$, 最小值为 $2 - \sqrt{2}$.



证明. (2) 设 $A(a, f(a)), B(b, f(b)), C(x, f(x))$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为

$$F(x) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & x \\ f(a) & f(b) & f(x) \end{vmatrix}$$

的绝对值. 设 $g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$, 则 $g(a) = g(b) = 0$ 且

$$F(x) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & x \\ g(a) & g(b) & g(x) \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & x \\ 0 & 0 & g(x) \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(b-a)g(x) = g(x).$$

由于 $f''(x) = g''(x)$, 由 (1) 可知存在 $x_0 \in (a, b)$ 使得 $|g(x)| \geq \frac{1}{2}$, 从而命题得证.

也可以直接求导

$$F''(x) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & b & 0 \\ f(a) & f(b) & f''(x) \end{vmatrix} = f''(x),$$

从而 $|F''(x)| = |f''(x)| \geq 1$, 再由 (1) 得到结果.

例. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上二阶可导, 且 $M_i := \max_{x \in \mathbb{R}} |f^{(i)}(x)| < +\infty, i = 0, 1, 2$. 证明:
 $M_1^2 \leq 2M_0M_2$.

证明. 设 $f'(x) = M_1$. 由 $f(x)$ 在 x_0 处的泰勒展开, 存在 ξ_1, ξ_2 使得

$$f(x+h) = f(x) + M_1h + \frac{1}{2}f''(\xi_1)h^2, \quad f(x-h) = f(x) - M_1h + \frac{1}{2}f''(\xi_2)h^2.$$

两式相减得到

$$f(x+h) - f(x-h) = 2M_1h + \frac{f''(\xi_1) - f''(\xi_2)}{2}h^2,$$

$$M_1 = \left| \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \frac{f''(\xi_2) - f''(\xi_1)}{4}h \right| \leq \frac{M_0}{h} + \frac{M_2h}{2},$$

即 $M_2h^2 - 2M_1h + 2M_0 \geq 0$ 恒成立, $\Delta = 4M_1^2 - 8M_0M_2 \leq 0, M_1^2 \leq 2M_0M_2$. □

例. 设 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有 $n+1$ 阶导数, 且 $f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a), k = 0, 1, 2, \dots, n$, $f^{(n+1)}(x) < g^{(n+1)}(x), \forall x \in (a, b)$. 证明: $f(x) < g(x), \forall x \in (a, b)$.

证明. 设 $F(x) = f(x) - g(x)$. 对于 $x \in (a, b)$, 由 $F(x)$ 在 a 处的泰勒展开, 存在 $\xi \in (a, x)$ 使得

$$\begin{aligned} F(x) &= F(a) + F'(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(a)(x-a)^n + \frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1} \\ &= \frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1} < 0. \end{aligned}$$

当然, 也可以由 $F^{(n+1)}(x) < 0$ 得到 $F^{(n)}$ 严格单减, $F^{(n)}(x) < F^{(a)}(x) < 0$, 然后依次下去得到 $F(x) < 0$.