线性代数

张神星 (合肥工业大学)

翡翠科教楼 *B1810* 东

zhangshenxing@hfut.edu.cn

https://faculty.hfut.edu.cn/zhangshenxing

001 班 (交通工、新能源) 课程信息

- 课时: 共 10 周 40 课时, 从 2026-03-03 到 2026-05-07
- 期末考试在课程结束后两周左右

001 班 QQ 群: **1054817276**
入群答案 **1400071B**

教材: 高等教育出版社
唐烁, 朱士信《线性代数》

003 班 (会计、信管) 课程信息

- 课时: 共 10 周 40 课时, 从 2026-03-03 到 2026-05-07
- 期末考试在课程结束后两周左右

003 班 QQ 群: **1078900814**
入群答案 **1400071B**

教材: 高等教育出版社
唐烁, 朱士信《线性代数》

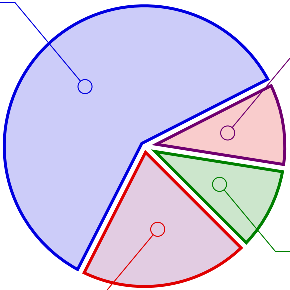
成绩构成

期末考试 60 分

期末卷面需要达到 50 分才计算总评分数，50 分以下直接不及格. **电子阅卷，批阅后无法调整分数，请务必重视!**

课堂测试 20 分

课堂测试共两次取平均，测试范围分别为 1-2 章和 3-5 章. 测试时间会提前通知. **测试时在教室内作答，否则按未考处理.**



课后作业 10 分

作业为配套练习册，扫描后通过超星提交，约两周交一次. **作业必须按时提交，不允许补交.**

智慧课程 10 分

在学习通内完成.

章节 → 观看视频 (2.5 分);

章节 → 章节测试 (提交后无法修改或打回，5 分);

讨论 (回答彭凯军的五个问题，2.5 分);

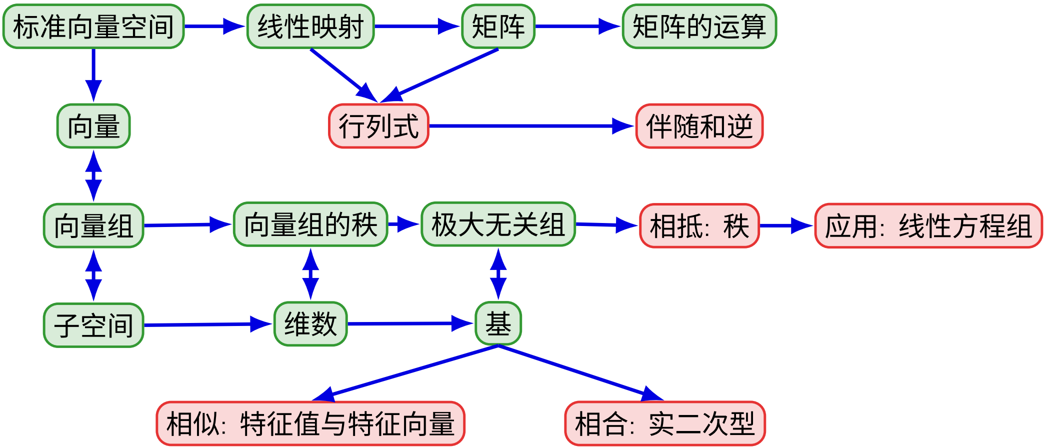
限时: 3 月 1 日 – **6 月 30 日**

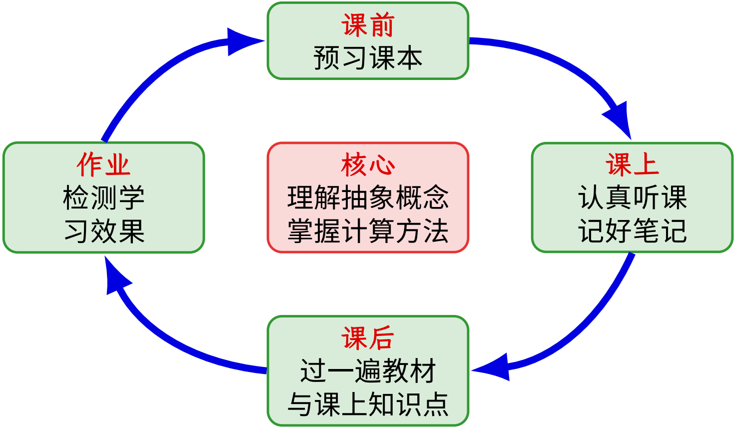
线性代数的意义

线性代数是一门利用代数方法研究线性方程、线性空间、线性变换等线性结构的课程.

线性代数通过从具体的、几何化的观念出发, 抽象出一套代数化的方法, 从而避免了高维情形缺乏几何直观的问题. 如同微积分中“以直代曲”思想引出导数、切线、积分等一系列概念, 线性代数利用“以直代曲”思想将许多非线性问题的处理转化为线性问题, 非线性模型近似为线性模型等.

这些内容在统计学、密码学、运筹学、物理学、工程学、管理学、信息学、计算机科学等很多领域有着广泛的应用. 我们不在此处逐一列举, 在之后的授课中我们会见到它的各种应用.


标准向量空间
线性映射
矩阵
矩阵的运算
向量
行列式
伴随和逆
向量组
向量组的秩
极大无关组
相抵：秩
应用：线性方程组
子空间
维数
基
相似：特征值与特征向量
相合：实二次型


课前
预习课本
课上
认真听课
记好笔记
课后
过一遍教材
与课上知识点
作业
检测学
习效果
核心
理解抽象概念
掌握计算方法

第一章　行列式

第一节　向量和矩阵

- 向量的定义
- 矩阵的定义

我们在高中学习过向量的概念. 在平面上建立一个直角坐标系. 对于平面上的点 A, 连接 OA 的有向线段就是一个**向量**. 它可以用 $\boldsymbol{u}=(x,y)$ 来表示.

由于向量和平面上的点是一一对应的, 因此我们可以用 $\mathbb{R}^2$ 来表示平面上所有向量形成的集合. 在这个集合中有一个特殊的元素, 叫作**零向量**:

$$\mathbf{0}=(0,0),$$

而且我们可以定义加法和数乘:

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2),\quad \lambda(x,y)=(\lambda x,\lambda y),\lambda\in\mathbb{R}.$$

类似地, 立体空间中的所有向量形成集合 $\mathbb{R}^3$. 在这个集合中也有零向量、加法和数乘.

平面向量和立体向量的性质

我们总使用粗小写字母 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \dots$ 表示向量.

$\mathbb{R}^2$ 或 $\mathbb{R}^3$ 上的零向量、加法和数乘满足:

(V1) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$;

(V2) $\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}$;

(V3) $\mathbf{0}+\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$;

(V4) 对任意 $\boldsymbol{\alpha}$, 存在 $\boldsymbol{\beta}$ 使得 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$. 称 $\boldsymbol{\beta}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的**负向量**;

(V5) $(\lambda\mu)\boldsymbol{\alpha}=\lambda(\mu\boldsymbol{\alpha})$;

(V6) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\alpha}$;

(V7) $\lambda(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\lambda\boldsymbol{\beta}$;

(V8) $1\cdot\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$.

将上述概念稍作推广，我们可以得到具有 n 个**分量**的向量

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

称为 n 维**行向量**. 基于后续表述的需求，我们将向量的分量写成一列而不是一行，从而得到 n 维**列向量**:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

之后凡是提到向量，默认是指列向量. 为了书写方便，也可以把列向量写成

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}.$$

其中 T 表示**转置**(Transpose)，它是将行列关系对换的一种操作.

标准向量空间

将全体 n 维列向量记为 $\mathbb{R}^n$. 在这个集合中可类似定义零向量、加法和数乘:

(1) $\mathbf{0}=(0,\dots,0)^{\mathrm{T}}$;

(2) $(a_1,\dots,a_n)^{\mathrm{T}}+(b_1,\dots,b_n)^{\mathrm{T}}=(a_1+b_1,\dots,a_n+b_n)^{\mathrm{T}}$;

(3) $\lambda(a_1,\dots,a_n)^{\mathrm{T}}=(\lambda a_1,\dots,\lambda a_n)^{\mathrm{T}},\lambda\in\mathbb{R}$.

而且它们也满足(V1)–(V8).

设

$$\boldsymbol{e}_1=(1,0,\dots,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{e}_2=(0,1,\dots,0)^{\mathrm{T}},\quad \cdots,\quad \boldsymbol{e}_n=(0,0,\dots,1)^{\mathrm{T}}.$$

那么每一个 n 维向量都可以表达为

$$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,\dots,a_n)=a_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+a_n\boldsymbol{e}_n.$$

尽管叫做向量, 但实际上我们以后大多数时候都将其等同于对应的点.

定义. 若 $V \subseteq \mathbb{R}^n$ 满足

(1) $\mathbf{0} \in V$;

(2) $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V \implies \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V$;

(3) $\boldsymbol{u} \in V, \lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda\boldsymbol{u} \in V$,

则称 V 是一个 **(实) 向量空间**.

例.

(1) 平面上经过原点的直线 $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = 0\}$ 是向量空间.

(2) $\mathbb{R}^3$ 中经过原点的平面 $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\}$ 是向量空间.

(3) $\mathbb{R}^3$ 中**不经过原点**的平面 $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 1\}$ 不是向量空间.

我们可以类似地定义复向量, $\mathbb{C}^n$, 以及**复向量空间**.

矩阵的定义

为了研究向量间的联系，我们引入矩阵的概念.

定义. 将 mn 个数按照每行 n 个元素，每列 m 个元素，排成的数表称为 m 行 n 列矩阵，或简称为 $m \times n$ 矩阵：

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n},$$

其中 a_{ij} 表示 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行 j 列元素，并记 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$.

我们总使用粗大写字母 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{\Lambda}, \ldots$ 表示矩阵. 不强调矩阵的阶时，也可省略右下角 $m \times n$.

矩阵的圆括号 (小括号) 也可用方括号 (中括号) 来代替.

例.

(1) $$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&-2&-3\\1&0&-1&-2\\2&1&0&-1\\3&2&1&0\end{pmatrix}=(i-j)_{4\times 4}.$$

(2) $$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&2&\cdots&n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&2^{n-1}&3^{n-1}&n^{n-1}\end{pmatrix}_n=(j^{i-1})_n.$$ $m=n$ 时可用 n 来表示右下角的 $n\times n$.

矩阵集合

- 令 $M_{m\times n}$ 表示 m 行 n 列的矩阵 (Matrix) 全体.
- 若 $m=n$, 称相应矩阵为 n **阶方阵**, 并用 M_n 来表示 n 阶方阵全体.
- 若矩阵元素都是实数, 我们称相应的矩阵为**实矩阵**, 并用 $M_{m\times n}(\mathbb{R}), M_n(\mathbb{R})$ 来表示相应集合.
- 若矩阵元素都是复数, 我们称相应的矩阵为**复矩阵**, 并用 $M_{m\times n}(\mathbb{C}), M_n(\mathbb{C})$ 来表示相应集合.
- 元素全为零的矩阵为**零矩阵** $\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}_{m\times n}\in M_{m\times n}$.

特殊矩阵

称 $a_{11},\ldots,a_{nn}$ 为方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_n$ 的**对角元**. 方阵中

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \in M_n$$

分别为**上三角阵**, **下三角阵**和**对角阵** (空白部分表示元素都是零). 为书写方便, 对角阵也可记作 (对角: diagonal)

$$\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n).$$

称方阵

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_n=\operatorname{diag}(1,1,\ldots,1)\in M_n$$

为**单位阵**.

将只有一行的矩阵

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in M_{1\times n}$$

称为 n 维**行矩阵**. 只有一列的矩阵

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in M_{n\times 1}$$

称为 n 维**列矩阵**.

我们将在后面定义矩阵的加法和数乘, 它与将行 (列) 矩阵看作行 (列) 向量的加法和数乘是相同的. 于是可将行 (列) 矩阵和对应的行 (列) 向量视为同一对象.

有时为了研究矩阵和其部分元素形成的矩阵的联系，需要将其进行拆分．用若干条横线和竖线将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分成许多小矩阵，用各个小矩阵来表示 $\boldsymbol{A}$ 自身，这种表示方法叫做分块矩阵．例如

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O}_{m\times n} & \boldsymbol{E}_m \\ \boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{O}_{n\times m} \end{pmatrix}$$

就是一个分块矩阵.

例如矩阵

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n),$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_j$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列．所以 $m \times n$ 矩阵可以看成 n 个列向量排成一行，或者 m 个行向量排成一列.

特殊分块矩阵

如果 $\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_k$ 都是方阵, 则称方阵

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & \boldsymbol{A}_k \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & \\ \vdots & \ddots & \\ * & \cdots & \boldsymbol{A}_k \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{A}_k \end{pmatrix} \in M_n$$

分别为分块上三角阵, 分块下三角阵和分块对角阵 ($*$ 表示省略标注的元素). 为书写方便, 分块对角阵也可记作

$$\operatorname{diag}(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \ldots, \boldsymbol{A}_k).$$

矩阵的转置

若 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$, 称

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = (a_{ji})_{n\times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{n\times m}$$

为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**转置**. 如同我们之前使用过的写法, 行向量的转置就是列向量

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (a_1, \ldots, a_n)^{\mathrm{T}}.$$

方阵的转置还是方阵, 上三角阵的转置是下三角阵.

第二节　行列式的定义

- 有向面积与二阶行列式
- n 阶行列式

平行四边形的面积

设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)$ 是一个二阶方阵, 其中 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$ 是两个二维向量. 那么

$$\{\lambda_1\boldsymbol{v}_1+\lambda_2\boldsymbol{v}_2:\lambda_1,\lambda_2\in[0,1]\}$$

形成一个平行四边形 (可能退化).

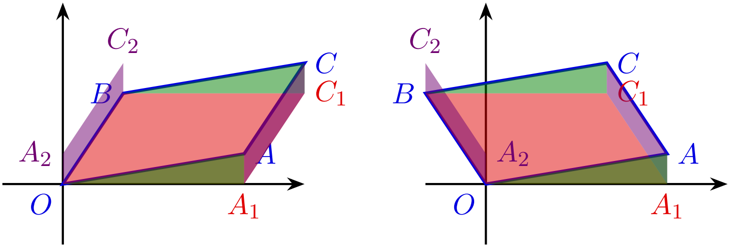
类似地, n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n)$ 的各列可类似形成一个平行多面体 (可能退化)

$$\{\lambda_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{v}_n:\lambda_1,\dots,\lambda_n\in[0,1]\}.$$

我们从 $n=2$ 情形出发, 来研究如何计算它的体积.

引例：平行四边形的面积

设平面上有 $\square OACB$，其中 A, B 坐标分别为 $\boldsymbol{u}=(a,c)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{v}=(b,d)^{\mathrm{T}}$. 如果将 $\boldsymbol{u}$ 拆分为 $(a,0)^{\mathrm{T}}+(0,c)^{\mathrm{T}}$，那么得到的三个平行四边形的面积有什么联系呢？



令 $A_1(a,0)$，并作 $\square OA_1C_1B$；令 $A_2(0,c)$，并作 $\square OA_2C_2B$. 那么 $\square OACB$ 的面积是这两个相加还是相减？使用割补法可知为**二者相减**.

如果 A 在第一象限，B 在第二象限. 那么 $\square OACB$ 的面积是这两个相加还是相减？使用割补法可知为**二者相加**.

为何第一种情形是相减而第二种情形是相加呢? 观察发现: 这些平行四边形中只有第一种情形的 $\square OA_2C_2B$, 从 OA_2 到 OB 是顺时针方向. 如果定义**有向面积**并记为

$$|\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{cases} S_{\square OACB}, & \text{从 } OA \text{ 到 } OB \text{ 是逆时针;} \\ -S_{\square OACB}, & \text{从 } OA \text{ 到 } OB \text{ 是顺时针.} \end{cases}$$

那么

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

一般地,

$$|\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{v}| + |\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{v}|. \qquad \text{(关于第一列线性)}$$

如果将 $\boldsymbol{u}$ 换成 $k\boldsymbol{u}$, 那么面积变为 $|k|$ 倍, 有向面积变为 k 倍. 因此

$$|k\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}| = \begin{vmatrix} ka & b \\ kc & d \end{vmatrix} = k|\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}| = k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}. \qquad \text{(关于第一列线性)}$$

对于 $\boldsymbol{v}$ 也有类似的性质:

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2| &= |\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1| + |\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_2|, \\ |\boldsymbol{u}, k\boldsymbol{v}| &= k|\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}|. \end{aligned} \qquad \text{(关于第二列线性)}$$

$\boldsymbol{u} = (1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{v} = (0,1)^{\mathrm{T}}$ 形成的平行四边形就是单位正方形, 有向面积为 1. 因此

$$|\boldsymbol{E}_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1. \qquad \text{(规范化)}$$

如果交换 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$, 那么面积不变但是有向面积变为 -1 倍. 因此

$$|\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}| = \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = -|\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}| = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}. \qquad \text{(反对称)}$$

通过前面三条性质 (规范化、反对称、线性), 我们可以完全确定 $|\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}|$. 由反对称可知

$$|\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}| = -|\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}| = 0, \qquad |\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1| = -|\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2| = -1.$$

于是

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} &= |a\boldsymbol{e}_1 + c\boldsymbol{e}_2, b\boldsymbol{e}_1 + d\boldsymbol{e}_2| = |a\boldsymbol{e}_1, b\boldsymbol{e}_1| + |a\boldsymbol{e}_1, d\boldsymbol{e}_2| + |c\boldsymbol{e}_2, b\boldsymbol{e}_1| + |c\boldsymbol{e}_2, d\boldsymbol{e}_2| \\ &= ab|\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1| + ad|\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2| + bc|\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1| + cd|\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2| = ad - bc,\end{aligned}$$

即

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

我们把它叫做二阶方阵的**行列式**, 或简称二阶行列式.

将上述概念推广到 n 维情形. 设

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}, \quad e_2 = (0, 1, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}, \quad \cdots, \quad e_n = (0, 0, \ldots, 1)^{\mathrm{T}}.$$

那么 n 维情形的有向面积, 也就是 n 阶行列式应当满足:

(1) $|\boldsymbol{E}_n| = |\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n| = 1$;

(2) 反对称性质: $|\cdots, \boldsymbol{v}_i, \cdots, \boldsymbol{v}_j, \cdots| = -|\cdots, \boldsymbol{v}_j, \cdots, \boldsymbol{v}_i, \cdots|$;

(3) 线性性质: $|\boldsymbol{v}_1, \cdots, k\boldsymbol{v}_i, \cdots, \boldsymbol{v}_n| = k|\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_i, \cdots, \boldsymbol{v}_n|$;

(4) 线性性质: $|\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{v}_i', \cdots| = |\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_i, \cdots, \boldsymbol{v}_n| + |\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_i', \cdots, \boldsymbol{v}_n|$.

和二阶情形类似, n 阶方阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 的行列式可以展开成 n^n 项

$$\sum_{k_1, k_2, \ldots, k_n = 1}^{n} |\boldsymbol{e}_{k_1}, \cdots, \boldsymbol{e}_{k_n}| a_{k_1 1} a_{k_2 2} \cdots a_{k_n n}.$$

由于有两列相同时, 行列式一定是零. 因此这个展开式只剩下 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 是 $1, 2, \ldots, n$ 的排列时的那些项.

设 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 是 $1, 2, \ldots, n$ 的排列. 如果排列 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 需要奇数次对换变成 $1, 2, \ldots, n$, 记 $\operatorname{sgn}(k_1, \ldots, k_n) = -1$; 否则 $\operatorname{sgn}(k_1, \ldots, k_n) = +1$. 根据反对称性,

$$|\boldsymbol{e}_{k_1}, \cdots, \boldsymbol{e}_{k_n}| = \operatorname{sgn}(k_1, \ldots, k_n)|\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n| = \operatorname{sgn}(k_1, \ldots, k_n).$$

定义. 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 是 n 阶方阵. 定义 $\boldsymbol{A}$ 的**行列式**为

$$|\boldsymbol{A}| = \sum \operatorname{sgn}(k_1, \ldots, k_n) a_{k_1 1} a_{k_2 2} \cdots a_{k_n n},$$

其中 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 取遍 $1, 2, \ldots, n$ 的全体排列.

2, 3 阶行列式

当 $n=2$ 时, $\operatorname{sgn}(12)=1, \operatorname{sgn}(21)=-1$, 于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

当 $n=3$ 时,

$$\operatorname{sgn}(123)=\operatorname{sgn}(231)=\operatorname{sgn}(312)=1,$$

$$\operatorname{sgn}(132)=\operatorname{sgn}(213)=\operatorname{sgn}(321)=-1,$$

于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

例.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot(-5)\cdot 4 + 3\cdot 1\cdot 2 + 2\cdot 3\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot 1 - 3\cdot 3\cdot 4 - 2\cdot(-5)\cdot 2$$

$$= -20 + 6 + 6 - 1 - 36 + 20 = -25.$$

练习. 若 $k > 0$ 且 $\begin{vmatrix} k & 2 & 1 \\ 2 & k & 1 \\ k & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$, 则 $k = \underline{\quad 2 \quad}$.

注记

(1) 行列式将一个方阵对应到一个数.

(2) 1 阶行列式就是方阵里面唯一的那个元素, 尽管也记作 $|\cdot|$, 但注意和绝对值区分.

(3) $2, 3$ 阶行列式可以用对角线法直接得到展开式, 但是更高阶的没有这种表示方法.

(4) 对角阵的行列式

$$\left|\operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)\right| = a_1 a_2 \cdots a_n,$$

分块对角阵的行列式

$$|\operatorname{diag}(\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_m)| = |\boldsymbol{A}_1| \cdots |\boldsymbol{A}_m|.$$

特别地 $|\boldsymbol{E}_n| = 1, |\boldsymbol{O}_n| = 0$.

(5) $|\boldsymbol{A}|$ 是由一些 $\pm a_{k_1 1} a_{k_2 2} \cdots a_{k_n n}$ 相加得到, 其中 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 取遍 $1, 2, \ldots, n$ 的所有排列, 一共有 $n!$ 个这样的项, 其中一半取 $+$, 一半取 $-$ $(n \geqslant 2)$.

(6) 可以把 $|\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n|$ 看成 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ 的某种乘法, 满足分配率, 但是不满足交换律.

第三节　行列式的性质

- 行列式的性质
- 拉普拉斯展开
- 行列式的计算举例
- 三对角和范德蒙型行列式

定理. 转置不改变行列式: $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{A}|$.

注意到

$$|\boldsymbol{A}| = \sum \operatorname{sgn}(k_1, \ldots, k_n) a_{k_1 1} \cdots a_{k_n n} = \sum a_{k_1 1} \cdots a_{k_n n} |\boldsymbol{P}|,$$

其中 $\boldsymbol{P}$ 是 $a_{k_1 1}, \ldots, a_{k_n n}$ 这些位置为 1, 其余为 0 的矩阵. 类似地,

$$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = \sum a_{k_1 1} \cdots a_{k_n 1} |\boldsymbol{Q}|,$$

其中 $\boldsymbol{Q}$ 是 $a_{1k_1}, \ldots, a_{nk_n}$ 这些位置为 1, 其余为 0 的矩阵. 所以我们只需证明 $|\boldsymbol{P}| = |\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}|$.

注意到交换 $\boldsymbol{P}$ 的两行等同于交换了它的两列. 所以将 $\boldsymbol{P}$ 变成 $\boldsymbol{E}$ 所需的交换列的次数, 和将 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$ 变成 $\boldsymbol{E}$ 所需的交换列的次数奇偶性相同, 即 $|\boldsymbol{P}| = |\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}|$.

定理 (行列式的性质).

(1) 互换两行 (列) 后，方阵的行列式变为 -1 倍.

(2) 方阵的某一行 (列) 乘 k 后，方阵的行列式变为 k 倍.

(3) 将方阵某一行 (列) 对应向量写成两个向量之和，则行列式也可对应拆成两个行列式之和.

推论.

(1) 具有相同的两行 (列) 的方阵的行列式为零: $|\cdots, \boldsymbol{v}, \cdots, \boldsymbol{v}, \cdots| = 0$.

(2) 若方阵有一行 (列) 全为零，则行列式为零: $|\cdots, \boldsymbol{0}, \cdots| = 0$.

(3) 若方阵有两行 (列) 成比例，则行列式为零: $|\cdots, \boldsymbol{v}, \cdots, k\boldsymbol{v}, \cdots| = 0$.

(4) 行列式中某一行 (列) 的公因子可以提到行列式外面.

计算行列式可以通过实施下列变换来化简:

初等变换.

(1) **互换两行 (列): $\boldsymbol{r_i \leftrightarrow r_j, c_i \leftrightarrow c_j}$, 行列式变号;**

(2) **一行 (列) 乘非零常数 k: $\boldsymbol{kr_i, kc_i}$, 行列式变为 k 倍;**

(3) **j 行 (列) 乘 k 加到 i 行 (列): $\boldsymbol{r_i + kr_j, c_i + kc_j}$, 行列式不变.**

实施第三类初等变换 $c_i + kc_j$ 时, 第 j 列不变, 改变的是第 i 列. 由于

$$\begin{aligned}\left|\cdots, \boldsymbol{v}_i, \cdots, \boldsymbol{v}_j, \cdots\right| &= \left|\cdots, \boldsymbol{v}_i, \cdots, \boldsymbol{v}_j, \cdots\right| + \left|\cdots, k\boldsymbol{v}_j, \cdots, \boldsymbol{v}_j, \cdots\right| \\ &= \left|\cdots, \boldsymbol{v}_i + k\boldsymbol{v}_j, \cdots, \boldsymbol{v}_j, \cdots\right|,\end{aligned}$$

因此第三类初等变换不改变行列式的值.

例：使用初等变换计算行列式

练习.

(1) 判断题：$\begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} & & & 1 \\ & & 2 & \\ & 3 & & \\ 4 & & & \end{vmatrix}$. × 交换 1, 4 列，交换 2, 3 列

(2) 计算 $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+d_1 & d_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+d_2 & d_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+d_3 & d_3+a_3 \\ a_4+b_4 & b_4+c_4 & c_4+d_4 & d_4+a_4 \end{vmatrix} = \underline{\quad 0 \quad}$.

例：使用初等变换计算行列式

例. 若 $abcd=1$，证明 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a^2+a^{-2} & a & a^{-1} & 1 \\ b^2+b^{-2} & b & b^{-1} & 1 \\ c^2+c^{-2} & c & c^{-1} & 1 \\ d^2+d^{-2} & d & d^{-1} & 1 \end{pmatrix}$ 行列式为零.

证明.

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a^2 & a & a^{-1} & 1 \\ b^2 & b & b^{-1} & 1 \\ c^2 & c & c^{-1} & 1 \\ d^2 & d & d^{-1} & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a^{-2} & a & a^{-1} & 1 \\ b^{-2} & b & b^{-1} & 1 \\ c^{-2} & c & c^{-1} & 1 \\ d^{-2} & d & d^{-1} & 1 \end{vmatrix}=abcd\begin{vmatrix} a & 1 & a^{-2} & a^{-1} \\ b & 1 & b^{-2} & b^{-1} \\ c & 1 & c^{-2} & c^{-1} \\ d & 1 & d^{-2} & d^{-1} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & a^{-2} & 1 & a^{-1} \\ b & b^{-2} & 1 & b^{-1} \\ c & c^{-2} & 1 & c^{-1} \\ d & d^{-2} & 1 & d^{-1} \end{vmatrix}.$$

由于 $abcd=1$，且等式右侧两个行列式相差 -1 倍，因此 $|\boldsymbol{A}|=0$. □

余子式和代数余子式

我们来介绍行列式与方阵子式的联系.

定义. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 $n\geqslant 2$ 阶方阵.

(1) $\boldsymbol{A}$ 去掉第 i 行和 j 列得到的 $n-1$ 阶方阵的行列式称为 $\boldsymbol{A}$ 在 (i,j) 处的**余子式 (Minor)**, 记为 M_{ij}.

(2) 称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 在 (i,j) 处的**代数余子式 (Algebraic Minor)**.

注意余子式和代数余子式是数而不是矩阵.

假设 $\boldsymbol{A}$ 的第 n 列除了 a_{nn} 都是零. 若 $k_n \neq n$, 则 $a_{k_1 1}\cdots a_{k_n n} = 0$; 若 $k_n = n$, 则 $\operatorname{sgn}(k_1, \ldots, k_{n-1}, n) = \operatorname{sgn}(k_1, \ldots, k_{n-1})$. 因此

$$|\boldsymbol{A}| = \sum \operatorname{sgn}(k_1, \ldots, k_{n-1}, n) a_{k_1,1} \cdots a_{k_{n-1},n-1} a_{n,n} = a_{nn} M_{nn} = a_{nn} A_{nn}.$$

假设 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列除了 a_{ij} 都是零. 依次对 $\boldsymbol{A}$ 实施

$$r_i \leftrightarrow r_{i+1}, \quad r_{i+1} \leftrightarrow r_{i+2}, \quad \ldots, \quad r_{n-1} \leftrightarrow r_n,$$

得到的方阵 $\boldsymbol{B}$ 就是将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行移动到第 n 行的后面得到的方阵. 由于一共 $n-i$ 次列互换, 因此 $|\boldsymbol{B}| = (-1)^{n-i}|\boldsymbol{A}|$.

同理, 将 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列移动到第 n 列的后面得到的方阵记为 $\boldsymbol{C}$, 则

$$|\boldsymbol{C}| = (-1)^{n-j}|\boldsymbol{B}| = (-1)^{i+j}|\boldsymbol{A}|.$$

注意到 $\boldsymbol{C}$ 在 (n,n) 处元素是 a_{ij}, 余子式是 M_{ij}, 因此

$$|\boldsymbol{C}| = a_{ij} M_{ij}, \qquad |\boldsymbol{A}| = (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = a_{ij} A_{ij}.$$

将 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列写成

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_{2j} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix},$$

根据行列式的线性性质，我们得到

$$|\boldsymbol{A}| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}.$$

由于转置不改变方阵的行列式，于是得到

$$|\boldsymbol{A}| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}.$$

定理 (行列式沿任一行或列展开). 方阵的行列式等于任一行 (列) 的元素与其对应的代数余子式乘积的和:

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}| &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \\ &= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}.\end{aligned}$$

由此也可以看出 $i \neq k$ 时,

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0,$$

因为它是第 i, k 行相同的方阵的行列式.

例.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & & \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & & \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$= \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

由于转置不改变行列式，因此上三角阵行列式也等于对角元乘积.

例. 计算 $|\boldsymbol{A}|$, 其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & & \end{pmatrix}$.

解.

$$|\boldsymbol{A}| = (-1)^{n+1}a_1 \begin{vmatrix} & & a_2 \\ & \iddots & \\ a_n & & \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}a_1 \cdot (-1)^n a_2 \begin{vmatrix} & & a_3 \\ & \iddots & \\ a_n & & \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = \prod_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}a_i = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n.$$

对于具体的方阵，我们可以利用初等变换将其化为三角阵来计算行列式. 也可以在某一行或一列只有少数非零元时用拉普拉斯展开来降阶.

例.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ -4 & -5 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & -5 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_1 - 2r_4]{\substack{r_2 + 4r_4 \\ r_3 + 3r_4}} \begin{vmatrix} {\color{red}0} & 7 & 1 & 1 \\ {\color{red}0} & -13 & 1 & -1 \\ {\color{red}0} & -5 & -5 & 0 \\ {\color{red}1} & -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ -13 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2 + r_1} - \begin{vmatrix} 7 & 1 & {\color{red}1} \\ -6 & 2 & {\color{red}0} \\ -5 & -5 & {\color{red}0} \end{vmatrix} = -(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} = -40.$$

初等变换只能一个一个地实施，不能同时实施诸如 $r_1 \leftrightarrow r_2, r_2 \leftrightarrow r_3$ 这种操作.

例：利用初等变换计算行列式

练习.

(1) $$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 501 & 200 & 299 \\ 500 & 200 & 300 \end{vmatrix} = \underline{\ -200\ }.$$

(2) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = \underline{\quad 0 \quad}.$$

例: 分块矩阵行列式

例. 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}=\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1m} & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & 0 & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & & & \\ \hline * & \cdots & * & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right).$$

证明 $|\boldsymbol{C}|=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|$.

例：分块矩阵行列式

证明. 对 m 归纳. 当 $m=1$ 时将 $|\boldsymbol{C}|$ 沿第一行展开可知成立.

假设命题对于 $m-1$ 成立. 设 $\boldsymbol{A}$ 在 $(1,j)$ 处的余子式为 M_{1j}, $\boldsymbol{C}$ 在 $(1,j)$ 处的余子式为 N_{1j}. 则由归纳假设 $N_{1j}=M_{1j}|\boldsymbol{B}|$. 因此

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{C}|&=\sum_{j=1}^{m}(-1)^{1+j}a_{1j}N_{1j}\\&=\sum_{j=1}^{m}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j}|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|.\end{aligned}$$

□

例：拉普拉斯展开的应用

例. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\5&3&-2&2\end{pmatrix}$. 计算 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$ 和 $M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}$.

解. 由拉普拉斯展开可知

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\1&1&1&1\end{vmatrix}=0.$$

例：拉普拉斯展开的应用

续解.

$$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=-A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\-1&1&-1&1\end{vmatrix}$$

$$=7\begin{vmatrix}3&4&0\\2&2&2\\-1&-1&1\end{vmatrix}=-28.$$

练习. 若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3&f\\b_1&b_2&b_3&f\\c_1&c_2&c_3&f\\d_1&d_2&d_3&f\end{pmatrix}$，则 $A_{11}+A_{21}+A_{31}+A_{41}=$ ___0___.

例：行和为常数的行列式

计算 n 阶矩阵的行列式可以使用初等变换将其变为三角型，也可以使用拉普拉斯展开来对其实施降阶.

例.

$$\begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix} \xlongequal[i \geqslant 2]{c_1 + c_i} \begin{vmatrix} a+n-1 & 1 & \cdots & 1 \\ a+n-1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a+n-1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix} = (a+n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i \geqslant 2]{r_i - r_1} (a+n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-1 \end{vmatrix} = (a+n-1)(a-1)^{n-1}.$$

例：行和为常数的行列式

若方阵的每行 (列) 之和为常数, 可用此法化简.

练习. 计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} = \underline{\quad 1+a_1+\cdots+a_n \quad}.$

例：箭形行列式

例.

$$
\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}
\xlongequal[i \geqslant 2]{c_1 - \frac{1}{i} c_i}
\begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{n} & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}
= \left(1 - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{n}\right) n!.
$$

一般的箭形行列式均可用此法处理.

例：特殊形状行列式

练习. 计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 & n \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & -(n-1) & 0 \end{vmatrix} = \underline{\quad n! \quad}$.

答案. 对该方阵实施 $r_i + r_1, i \geqslant 2$ 即可化为上三角阵.

例：降阶法

例. 计算矩阵 $\boldsymbol{A}_n = \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{pmatrix}$ 的行列式.

解. 沿着第一列展开得到

$$|\boldsymbol{A}_n| = x|\boldsymbol{A}_{n-1}| + (-1)^{1+n}a_n(-1)^{n-1} = x|\boldsymbol{A}_{n-1}| + a_n,$$

递推或归纳可知

$$|\boldsymbol{A}_n| = x(x|\boldsymbol{A}_{n-2}| + a_{n-1}) + a_n = \cdots = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n.$$

例：降阶法计算三对角矩阵行列式

例. 计算矩阵 $\boldsymbol{A}_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的行列式.

例：降阶法计算三对角矩阵行列式

解. 设 $D_n = |\boldsymbol{A}_n|$. 沿着第一行展开得到

$$|\boldsymbol{A}_n| = 2|\boldsymbol{A}_{n-1}| - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}_{n-1} = 2|\boldsymbol{A}_{n-1}| - |\boldsymbol{A}_{n-2}|,$$

因此

$$|\boldsymbol{A}_n| - |\boldsymbol{A}_{n-1}| = |\boldsymbol{A}_{n-1}| - |\boldsymbol{A}_{n-2}| = \cdots = |\boldsymbol{A}_2| - |\boldsymbol{A}_1| = 1,$$

从而 $|\boldsymbol{A}_n| = n - 1 + |\boldsymbol{A}_1| = n + 1$.

若主对角线元素均为 a, 上下副对角线元素均为 b 和 c, 则

$$|\boldsymbol{A}_n| - a|\boldsymbol{A}_{n-1}| + bc|\boldsymbol{A}_{n-2}| = 0.$$

设 $\lambda^2 - a\lambda + bc = 0$ 的两个根为 λ_1, λ_2, 则归纳可知

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{A}_n| &= \lambda_1^n + \lambda_1^{n-1}\lambda_2 + \cdots + \lambda_1\lambda_2^{n-1} + \lambda_2^n \\ &= \begin{cases} \dfrac{\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}}{\lambda_1 - \lambda_2}, & \text{若 } \lambda_1 \neq \lambda_2; \\ (n+1)\left(\dfrac{a}{2}\right)^n, & \text{若 } \lambda_1 = \lambda_2 = \dfrac{a}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

例：范德蒙行列式

范德蒙行列式. 设 $\boldsymbol{A}_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$. 证明 $|\boldsymbol{A}_n| = \prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} (x_j - x_i)$.

证明. 归纳证明. 当 $n=1,2$ 时显然成立. 设 $n \geqslant 3$, 由 $r_n - x_1 r_{n-1}, \ldots, r_2 - x_1 r_1$ 得到

$$|\boldsymbol{A}_n| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}.$$

例：范德蒙行列式

续证. 沿着第一列展开，然后提取每一列的公因式 $(x_j - x_1)$ 得到

$$|\boldsymbol{A}_n| = \prod_{j=2}^{n}(x_j - x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

由归纳假设可知

$$|\boldsymbol{A}_n| = \prod_{j=2}^{n}(x_j - x_1) \cdot \prod_{2 \leqslant i < j \leqslant n}(x_j - x_i) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n}(x_j - x_i).$$

□

例：范德蒙行列式的应用

练习.

(1) $\begin{vmatrix} x_1^{-3} & x_2^{-3} & x_3^{-3} & x_4^{-3} \\ x_1^{-1} & x_2^{-1} & x_3^{-1} & x_4^{-1} \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix} = \underline{\ x_1^{-3}x_2^{-3}x_3^{-3}x_4^{-3}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant 4}(x_j^2-x_i^2)\ }.$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 65 \end{vmatrix} = \underline{\ 14\ }. = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

(3) 设 a, b, c 两两不等，且 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = 0$，则 $a+b+c = \underline{\ 0\ }$.

例：范德蒙行列式

范德蒙行列式还有另一种证明方式，这种思路对于其它行列式的计算也有帮助.

证明. $f = |\boldsymbol{A}_n|$ 是 $x_1, \dots, x_n$ 的多项式，且次数不超过 $1 + 2 + \cdots + (n-1)$. 由于当 $x_i = x_j$ 时 $f = 0$，因此 f 包含因式 $x_i - x_j$，从而

$$f = g \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i).$$

比较两边次数可知 g 是常数. 注意到 $\prod_{i=1}^{n} x_i^{i-1}$ 只出现在范德蒙行列式对角元的乘积中，且它在 $\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$ 中的系数是 1. 因此 $g = 1$. □

特殊形状行列式

例. 计算
$$\begin{vmatrix} 1^{50} & 2^{50} & \cdots & 100^{50} \\ 2^{50} & 3^{50} & \cdots & 101^{50} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 100^{50} & 101^{50} & \cdots & 199^{50} \end{vmatrix}.$$

证明. 将第一行换成 $(x+1)^{50}, \dots, (x+100)^{50}$, 并将行列式记为 $f(x)$. 那么 $f(1) = \cdots = f(99) = 0$. 注意到 f 的次数不超过 50, 因此 $f \equiv 0$. □

同理若 $k < n-1$, $\left|\left((a_i + b_j)^k\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}\right| = 0$.

行列式常见计算方法总结

(1) $2, 3$ 阶行列式可用对角线法直接展开.

(2) 三角阵行列式等于对角元的乘积, 分块三角阵行列式等于对角阵行列式乘积.

(3) 行列式的计算一般需要用到三类初等变换, 创造出足够多的零.

(4) 行列式沿一行 (列) 的展开往往是降阶法的必要手段.

(5) 范德蒙型行列式可处理方阵各行 (列) 为等比数列的情形.

第四节　克拉默法则

- 矩阵、线性映射和线性方程组
- 克拉默法则

标准向量空间之间的映射

对于矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in M_{m\times n}$ 和 n 维列向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_n)^{\mathrm{T}}$, 我们定义

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

这样我们得到一个映射

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ \boldsymbol{x} &\longmapsto \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

不难验证, 对任意 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n, \lambda\in\mathbb{R}$,

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{v},\quad \boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{u})=\lambda(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}).$$

对于线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + \cdots + a_{1n}\ x_n = b_1 \\ a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + \cdots + a_{2n}\ x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

它等价于矩阵方阵 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, 其中

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

若线性方程组的常数都是零, 即

$$\begin{cases} a_{11}\ x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}\ x_n = 0 \\ a_{21}\ x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}\ x_n = 0 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

或 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, 称之为齐次线性方程组. 否则称之为非齐次线性方程组.

齐次线性方程组解的特点

对于齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, 令 $V = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$ 表示该方程的所有解形成的集合. 显然 $\mathbf{0} \in V$. 若 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$. 于是

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}, \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}.$$

换言之, 从而 V 构成一个向量空间.

显然**零解** $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的解, 其它解被称为**非零解**. 由于非零解的倍数还是它的解, 因此 **$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 有非零解 $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 有无穷多 (非零) 解**.

当 $\boldsymbol{A}$ 是方阵时, 我们有 (以后证明):

定理. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵.

(1) 若 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 只有零解;

(2) 若 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 有 (无穷多) 非零解.

非齐次线性方程组解的特点

对于一般情形, 若 ξ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的一个解, 则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{0}$, 从而它所有的解就是 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\in V$. 因此

- $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解 $\iff$ $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 无解或有唯一解;
- $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解 $\iff$ $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 无解或有无穷多解.

当 $\boldsymbol{A}$ 是方阵时, 我们有:

定理. **设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵.**

(1) 若 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解;

(2) 若 $|\boldsymbol{A}|=0$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 无解或有无穷多解.

我们来计算 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 解的形式.

克拉默法则. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, $\boldsymbol{b}=(b_1,\ldots,b_n)^{\mathrm{T}}$ 是 n 维列向量, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列换成 $\boldsymbol{b}$ 得到的方阵记为 $\boldsymbol{A}_j$. 当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$, 线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解

$$\boldsymbol{x}=\left(\frac{|\boldsymbol{A}_1|}{|\boldsymbol{A}|},\frac{|\boldsymbol{A}_2|}{|\boldsymbol{A}|},\ldots,\frac{|\boldsymbol{A}_n|}{|\boldsymbol{A}|}\right).$$

设 $\boldsymbol{a}=(|\boldsymbol{A}_1|,|\boldsymbol{A}_2|,\ldots,|\boldsymbol{A}_n|)$. 由于方阵 $\boldsymbol{A}_j$ 沿着第 j 列展开得到

$$|\boldsymbol{A}_j|=b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\cdots+b_nA_{nj}=(A_{1j},A_{2j},\ldots,A_{nj})\boldsymbol{b},$$

因此

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}\text{ 的第 } i \text{ 个分量}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}|A_j|=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\sum_{k=1}^{n}b_kA_{kj}=\sum_{k=1}^{n}b_k\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{kj}=b_i|\boldsymbol{A}|.$$

例：克拉默法则的应用

例. 已知 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = -2 \end{cases}$ 有无穷多解，求 λ.

解.

$$0 = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + 2 - 3\lambda = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2).$$

因此 $\lambda = 1$ 或 -2. 显然 $\lambda = 1$ 时无解. $\lambda = -2$ 时，$(t, t, t+1)$ 是方程的解. 因此 $\lambda = -2$.

例：克拉默法则的应用

练习. 若 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + (\lambda+1)x_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解，则 $\lambda =$ <u>0, 1</u>.

例. 证明：若三条不同的直线

$$ax + by + c = 0$$
$$bx + cy + a = 0$$
$$cx + ay + b = 0$$

相交于一点，则 $a + b + c = 0$.

例：克拉默法则的应用

证明. 线性方程组 $\begin{cases} ax_1+bx_2+cx_3=0 \\ bx_1+cx_2+ax_3=0 \\ cx_1+ax_2+bx_3=0 \end{cases}$ 有非零解 $(x,y,1)$. 因此 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}=0.$

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} &= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \\ &= (a+b+c)(bc+ac+ab-a^2-b^2-c^2) \\ &= -\frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right].\end{aligned}$$

由于这是三条不同直线，因此 a,b,c 不可能全部相等，从而 $a+b+c=0$. □

想一想：为什么 $a+b+c=0$ 时，三条直线一定相交于一点?

克拉默法则的注记

使用克拉默法则解线性方程组需要:

(1) 方程组的数量和未知数数量相同;

(2) 系数矩阵行列式非零.

但由于使用克拉默法则计算量较大, 一般不使用该方法解方程, 通常仅用于理论研究.

练习. 何时下述线性方程组有非零解? $b = 0$ 或 $-a_1 - \cdots - a_n$.

$$\begin{cases} (a_1+b)x_1 + \quad a_2x_2 + \cdots + \quad a_nx_n = 0 \\ a_1x_1 + (a_2+b)x_2 + \cdots + \quad a_nx_n = 0 \\ \qquad \vdots \\ a_1x_1 + \quad a_2x_2 + \cdots + (a_n+b)x_n = 0 \end{cases}$$

例. 设 $a_1,\dots,a_n$ 两两不同. 解方程组

$$\begin{cases} x_1+a_1x_2+\cdots+a_1^{n-1}x_n=1\\ x_1+a_2x_2+\cdots+a_2^{n-1}x_n=1\\ \qquad\vdots\\ x_1+a_nx_2+\cdots+a_n^{n-1}x_n=1\end{cases}$$

解. 由于系数矩阵行列式为范德蒙行列式

$$\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)\neq 0,$$

因此方程有唯一解 $x_1=1, x_2=\cdots=x_n=0.$