线性代数

张神星 (合肥工业大学)

翡翠科教楼 *B1810* 东

zhangshenxing@hfut.edu.cn

https://faculty.hfut.edu.cn/zhangshenxing

第二章　矩阵

第一节　矩阵的运算

- 矩阵的加法和数乘
- 矩阵与线性映射的关系
- 矩阵的乘法
- 矩阵的幂
- 矩阵的转置

给定同型矩阵(行列数都相同的矩阵) $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}, \boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$. 定义 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的和

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}.$$

只有同型矩阵才能相加. 自然地, 矩阵的减法为

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}.$$

给定矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $\lambda\in\mathbb{R}$. 矩阵数乘 $\lambda\boldsymbol{A}$ 定义为

$$\lambda\boldsymbol{A}=(\lambda a_{ij})_{m\times n}.$$

和向量类似, 矩阵的加法和数乘满足如下性质:

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$;

(3) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$;

(4) 对于任意矩阵 $\boldsymbol{A}$, 存在矩阵 $\boldsymbol{B}=(-1)\boldsymbol{A}$ 使得 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$. 称 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵, 记作 $-\boldsymbol{A}$.

(5) $(\lambda\mu)\boldsymbol{A}=\lambda(\mu\boldsymbol{A})=\mu(\lambda\boldsymbol{A})$;

(6) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$;

(7) $\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$;

(8) $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}, 0\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}, \lambda\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}$.

与行列式的联系

行 (列) 矩阵的加法和数乘就是其对应的行 (列) 向量的加法和数乘.

注意一般 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| \neq |\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$.

练习.

(1) 判断题: $|\lambda \boldsymbol{A}| = \lambda |\boldsymbol{A}|$. $|\lambda \boldsymbol{A}| = \lambda^n |\boldsymbol{A}|$

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 5 阶方阵, $|\boldsymbol{A}| = -1$, 则 $|2\boldsymbol{A}| = \underline{\ \ -32\ \ }$, $||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}| = \underline{\ \ 1\ \ }$.

若分块矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 同型, 且每个对应分块也同型, 则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 就是对应分块相加形成的分块矩阵:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{B}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{B}_{sr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r}+\boldsymbol{B}_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{s1}+\boldsymbol{B}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}+\boldsymbol{B}_{sr} \end{pmatrix}.$$

数 λ 和分块矩阵的数乘, 就是 λ 和对应分块数乘形成的分块矩阵:

$$\lambda \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \lambda\boldsymbol{A}_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda\boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \lambda\boldsymbol{A}_{sr} \end{pmatrix}.$$

矩阵线性运算的应用：图像处理

一张图片由一些像素构成，上图包含 341×512 个像素．在 $\overset{\text{红绿蓝}}{\text{RGB}}$ 颜色模式下，每个像素包含红绿蓝三个通道，每个通道为一个 $0 \sim 255$ 之间的整数，数值越高对应颜色越亮．例如

- $R = 0$，$G = 0$，$B = 0$ 表示纯黑色；
- $R = 255$，$G = 255$，$B = 255$ 表示纯白色；
- $R = 255$，$G = 0$，$B = 255$ 表示纯紫色．

若三个通道相同，图片就是一张灰色的图．此时图片对应一个 341×512 的矩阵 $\boldsymbol{A}$．

想一想：如何将这个图像变亮？

$\Longrightarrow$

我们只需要增加每个元素的值，例如 (超过 255 的需要修正为 255)

$$\boldsymbol{A}+\begin{pmatrix}50 & \cdots & 50\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 50 & \cdots & 50\end{pmatrix},\qquad 1.5\boldsymbol{A},\qquad \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{A}+\begin{pmatrix}255 & \cdots & 255\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 255 & \cdots & 255\end{pmatrix}\right).$$

如何让图像反色?

$\Longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 255 & \cdots & 255 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 255 & \cdots & 255 \end{pmatrix} - \boldsymbol{A}.$$

定义. 若映射 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 满足

$$f(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=f(\boldsymbol{u})+f(\boldsymbol{v}),\quad f(\lambda\boldsymbol{u})=\lambda(f(\boldsymbol{u})).$$

称 f 是一个**线性映射**或**线性变换**.

根据之前的分析, $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是一个线性映射. 反过来, 是不是所有的线性映射 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 都可以表达为前述形式 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 呢?

以线性映射 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ 为例，记

$$\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{e}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

那么

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+x_3\boldsymbol{e}_3.$$

记

$$f(\boldsymbol{e}_1)=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\\a_{41}\end{pmatrix},\qquad f(\boldsymbol{e}_2)=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\a_{32}\\a_{42}\end{pmatrix},\qquad f(\boldsymbol{e}_3)=\begin{pmatrix}a_{13}\\a_{23}\\a_{33}\\a_{43}\end{pmatrix}.$$

根据线性映射的性质，

$$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=f(x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+x_3\boldsymbol{e}_3)=x_1f(\boldsymbol{e}_1)+x_2f(\boldsymbol{e}_2)+x_3f(\boldsymbol{e}_3)$$

$$=x_1\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\\a_{41}\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\a_{32}\\a_{42}\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}a_{13}\\a_{23}\\a_{33}\\a_{43}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3\\a_{41}x_1+a_{42}x_2+a_{43}x_3\end{pmatrix},$$

即 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，其中 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{4\times 3}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_3)$ 的各列就是 $f(\boldsymbol{e}_j)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_j$.

这表明，全体线性映射 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 和 $\boldsymbol{A}\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ 是一一对应的.

例：旋转变换

如何用矩阵表示平面 $\mathbb{R}^2$ 上的旋转？设 $A(x_1,x_2)$ 是平面上的一个点，沿着原点逆时针旋转角度 θ 变成 $B(y_1,y_2)$。利用极坐标将 A 表示为

$$\begin{cases} x_1 = \rho\cos\alpha, \\ x_2 = \rho\sin\alpha, \end{cases}$$

则

$$\begin{cases} y_1 = \rho\cos(\alpha+\theta) = \rho(\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta) = (\cos\theta)x_1 - (\sin\theta)x_2, \\ y_2 = \rho\sin(\alpha+\theta) = \rho(\cos\alpha\sin\theta + \sin\alpha\cos\theta) = (\sin\theta)x_1 + (\cos\theta)x_2. \end{cases}$$

因此上述旋转变换对应的矩阵为

$$\boldsymbol{R}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

例：线性映射

- $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 表示各个分量分别放缩为 λ_i 倍的线性映射.
- $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 表示平面中沿着直线 $x_1 = x_2$ 翻转.
- $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 表示三维空间中沿着直线 $x_1 = x_2 = x_3$ 旋转 $\dfrac{2\pi}{3}$.
- 想一想: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 表示什么线性映射?

线性变换的复合

给定矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}, \boldsymbol{B} = (b_{ij})_{n\times p}$. 矩阵乘法 $\boldsymbol{C}$ 定义为满足如下等式的矩阵:

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}).$$

也就是映射 $\boldsymbol{y} \mapsto \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ 的复合映射所对应的向量.

$\boldsymbol{C}$ 的第 j 列是

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_j,$$

其中 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_p)$. 设 $\boldsymbol{C} = (c_{ij})_{m\times p}$, 那么

$$c_{ij} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_j\text{的第 } i \text{ 个分量} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj},$$

即 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_p) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_p)$.

当 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{x}$ 是列向量时, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 就是它们作为矩阵的乘积.

矩阵乘法的定义

定义. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}, \boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times p}$. 定义矩阵的**乘法**为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=(c_{ij})_{m\times p}$, 其中

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

只有第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数才能相乘.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = ?$$

不能相乘!

简单来说, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 的 (i,j) 元就是 $\boldsymbol{A}$ 的 i 行和 $\boldsymbol{B}$ 的 j 列对应分量相乘后求和得到的.

设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1t}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{B}_{r1} & \cdots & \boldsymbol{B}_{rt},\end{pmatrix}$$

且 $\boldsymbol{A}_{ik}$ 的列数和 $\boldsymbol{B}_{kj}$ 的行数相同, 则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_{11} & \cdots & \boldsymbol{C}_{1t}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{C}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{C}_{st}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}_{ij}=\sum_{k=1}^{r}\boldsymbol{A}_{ik}\boldsymbol{B}_{kj}.$$

分块矩阵能相乘, 需要 $\boldsymbol{A}$ 的列块数和 $\boldsymbol{B}$ 的行块数要相等. 这样分块矩阵的运算就如同把这些分块视作数一样运算.

设 $\boldsymbol{u}=(u_1,\dots,u_n)$ 是 n 维行向量, $\boldsymbol{v}=(v_1,\dots,v_n)^{\mathrm{T}}$ 是 n 维列向量. $\boldsymbol{uv},\boldsymbol{vu}=?$

$$\boldsymbol{uv}=\sum_{i=1}^{n}u_iv_i,\qquad \boldsymbol{vu}=(v_iu_j)_{n\times n}\in M_n.$$

对于矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times p}$. $\boldsymbol{AB}$ 的 (i,j) 元其实就是 $\boldsymbol{A}$ 第 i 行对应的行向量和 $\boldsymbol{B}$ 第 j 列对应的列向量相乘得到的数 (1 阶方阵包含的唯一元素):

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m\end{pmatrix}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_p)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\beta}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\beta}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\beta}_p\\ \boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\beta}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\beta}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\beta}_p\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m\boldsymbol{\beta}_1 & \boldsymbol{\alpha}_m\boldsymbol{\beta}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_m\boldsymbol{\beta}_p\end{pmatrix}.$$

例：矩阵乘法的计算

例. 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0&-1\\2&1&4&0\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&1\\-2&3&1\\1&5&0\\1&-3&4\end{pmatrix}$ 的乘积 $\boldsymbol{AB}$.

解.

$$\begin{pmatrix}1&2&0&-1\\2&1&4&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&1\\-2&3&1\\1&5&0\\1&-3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&9&-1\\6&23&3\end{pmatrix}.$$

由于 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})$ 对应的映射都是 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 对应线性映射的复合, 因此 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})$.

矩阵乘法满足如下性质:

(1) $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})$;

(2) $\lambda(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})$;

(3) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$;

(4) 若 $\boldsymbol{A}\in M_{m\times n}$, 则 $\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_n=\boldsymbol{A}$.

(5) 若 $\boldsymbol{A}\in M_{m\times n}$, 则 $\boldsymbol{O}_{p\times m}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}_{p\times n}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{O}_{n\times p}=\boldsymbol{O}_{m\times p}$.

定理. 设 A, B 是 n 阶方阵, 则 $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}|$.

证明. 设 $f(\boldsymbol{X}) := |\boldsymbol{AX}|$, 即 $f(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = |\boldsymbol{Av}_1, \ldots, \boldsymbol{Av}_n|$. 容易知道 f 也满足反对称性, 且对任意 $\boldsymbol{v}_i$ 是线性的. 类似于行列式展开可知, 对于 $\boldsymbol{X} = (a_{ij})$,

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{X}) &= \sum f(\boldsymbol{e}_{k_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{k_n}) a_{k_1 1} a_{k_2 2} \cdots a_{k_n n} \\ &= \sum f(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) \operatorname{sgn}(k_1, \ldots, k_n) a_{k_1 1} a_{k_2 2} \cdots a_{k_n n} \\ &= f(\boldsymbol{E}) |\boldsymbol{X}| = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{X}|, \end{aligned}$$

其中 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 取遍 $1, 2, \ldots, n$ 的全体排列. 故 $|\boldsymbol{AB}| = f(\boldsymbol{B}) = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}|$. □

由此可知, 对于 $V \subset \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{A}$ 对应的线性映射将其有向体积变为 $|\boldsymbol{A}|$ 倍.

例: 行列式的乘性

例. 求椭球面 $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x+y)^2+(2y+z)^2+(x+z)^2=R^2\}$ 的体积.

解. 设 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, 其中

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+y \\ 2y+z \\ x+z \end{pmatrix}, \qquad \text{即 } \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

那么 f 把 V 映射为球体 $x^2+y^2+z^2=R^2$, 从而

$$\mathrm{Vol}(V)=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{9}\pi R^3.$$

例. 证明：
$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

证明.
$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$
□

例. 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$，求 $|\boldsymbol{A}|$.

解. 这题可以直接硬算，不过我们可以利用一点小技巧：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix} = (a^2+b^2+c^2+d^2)\boldsymbol{E}.$$

因此 $|\boldsymbol{A}| = \pm(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$. 因为 $|\boldsymbol{A}|$ 一定有 a^4 项，所以 $|\boldsymbol{A}| = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$.

例. 计算 $\begin{vmatrix} 2\sin a\cos a & \sin a\cos b+\cos a\sin b & \sin a\cos c+\cos a\sin c \\ \sin b\cos a+\cos b\sin a & 2\sin b\cos b & \sin b\cos c+\cos b\sin c \\ \sin c\cos a+\cos c\sin a & \sin c\cos b+\cos c\sin b & 2\sin c\cos c \end{vmatrix}$.

容易看出该方阵可写成两个方阵之和

$$\begin{pmatrix} \sin a\cos a & \sin a\cos b & \sin a\cos c \\ \sin b\cos a & \sin b\cos b & \sin b\cos c \\ \sin c\cos a & \sin c\cos b & \sin c\cos c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos a\sin a & \cos a\sin b & \cos a\sin c \\ \cos b\sin a & \cos b\sin b & \cos b\sin c \\ \cos c\sin a & \cos c\sin b & \cos c\sin c \end{pmatrix}.$$

这两个方阵各自满足各行成比例, 因此可分别写成

$$\begin{pmatrix} \sin a \\ \sin b \\ \sin c \end{pmatrix} (\cos a, \cos b, \cos c), \qquad \begin{pmatrix} \cos a \\ \cos b \\ \cos c \end{pmatrix} (\sin a, \sin b, \sin c).$$

因此原方阵为

$$\begin{pmatrix} \sin a & \cos a \\ \sin b & \cos b \\ \sin c & \cos c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos a & \cos b & \cos c \\ \sin a & \sin b & \sin c \end{pmatrix}.$$

解. 原式 $= \begin{vmatrix} \sin a & \cos a & 0 \\ \sin b & \cos b & 0 \\ \sin c & \cos c & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos a & \cos b & \cos c \\ \sin a & \sin b & \sin c \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}, \boldsymbol{B} \in M_{n\times m}$. 若 $m > n$, 则

$$|\boldsymbol{AB}| = \left| (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{O}_{m\times(m-n)}) \begin{pmatrix} \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O}_{(m-n)\times m} \end{pmatrix} \right| = 0.$$

矩阵乘法无交换律和消去律

矩阵的乘法不能随意交换顺序. 一般称 $\boldsymbol{AB}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 左乘 $\boldsymbol{B}$, 或者 $\boldsymbol{B}$ 右乘 $\boldsymbol{A}$.

若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$, 则称 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是可交换的. 此时 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 必为同阶方阵. 例如

$$\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&5\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$$

方阵总和同阶单位阵交换.

矩阵乘法也没有消去律: $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 推不出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$. 例如

$$\begin{pmatrix}2&4\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-2\\-1&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{O}_2.$$

由此可知: $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{BC}$ 推不出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

练习. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 $n>1$ 阶方阵, 则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{AB}=($ C $)$.

(A) $\boldsymbol{A}(1+\boldsymbol{B})$ (B) $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}$ (C) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})$ (D) 以上都不对

例. 求与矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ & 0 & 1\\ & & 0\end{pmatrix}$ 可交换的所有矩阵.

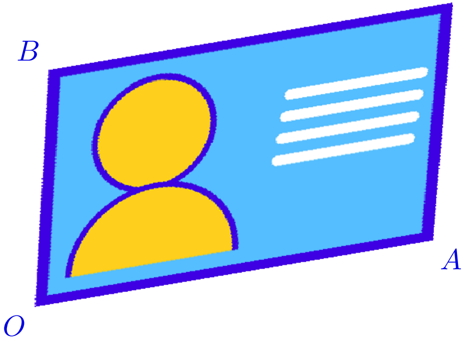
解. 设 $\boldsymbol{B}=(a_{ij})_{3\times 3}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 可交换, 则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}0 & a_{11} & a_{12}\\ 0 & a_{21} & a_{22}\\ 0 & a_{31} & a_{32}\end{pmatrix},$$

$$a_{21}=a_{31}=a_{32}=0,\quad a_{11}=a_{22}=a_{33},\quad a_{23}=a_{12},$$

即 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ & a_{11} & a_{12}\\ & & a_{11}\end{pmatrix}.$

某位同学拍身份证照片拍成了下图的样子，如何才能修复好呢？



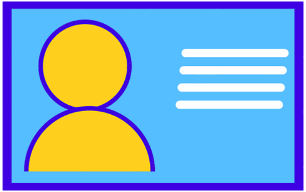
以左下角为原点，通过测量发现 A 坐标为 $(521, 88)$，B 坐标为 $(19, 311)$.

经过查询知道身份证长宽比为 $42.7 : 27$. 令 $A' = (427, 0), B' = (0, 270)$. 我们希望找到一个线性变换，将 A, B 变为 A', B'.

设该线性变换对应的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，则

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 521 & 19 \\ 88 & 311 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 427 & 0 \\ 0 & 270 \end{pmatrix}, \quad \text{即} \quad \begin{cases} 521a+\ 88\,b=427 \\ 19\,a+311\,b=\ 0 \\ 521\,c+\ 88\,d=\ 0 \\ 19\ c+311d=270 \end{cases}$$

解得 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0.828 & -0.051 \\ -0.148 & 0.877 \end{pmatrix}$. 通过应用该变换，图片被修复成如下效果:



矩阵幂的定义

定义. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 定义 $\boldsymbol{A}$ 的幂

$$\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{E}_n, \qquad \boldsymbol{A}^k = \underbrace{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \cdots \cdot \boldsymbol{A}}_{k\ \text{个}}.$$

矩阵幂满足如下性质 (k, ℓ 为非负整数):

(1) $\boldsymbol{A}^{k+\ell} = \boldsymbol{A}^k \cdot \boldsymbol{A}^\ell$;

(2) $\boldsymbol{A}^{k\ell} = (\boldsymbol{A}^k)^\ell$.

注意 $(\boldsymbol{AB})^k$ 一般不等于 $\boldsymbol{A}^k \cdot \boldsymbol{B}^k$. 想一想: 下面的等式成立吗?

$$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{B}^2? \qquad (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^2 = \boldsymbol{A}^2 + 2\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{B}^2?$$

当且仅当 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$ 时成立.

例. 设 $\boldsymbol{A} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. 求 $\boldsymbol{A}^k$.

解.

$$\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} = \operatorname{diag}(\lambda_1^2, \cdots, \lambda_n^2),$$

$$\boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^2 = \operatorname{diag}(\lambda_1^3, \cdots, \lambda_n^3),$$

递推下去可知

$$\boldsymbol{A}^k = \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \cdots, \lambda_n^k).$$

同理, 若 $\boldsymbol{A} = \operatorname{diag}(\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_m)$, 则

$$\boldsymbol{A}^k = \operatorname{diag}(\boldsymbol{A}_1^k, \ldots, \boldsymbol{A}_m^k).$$

例: 矩阵幂的计算

例. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ & \lambda & 1\\ & & \lambda\end{pmatrix}$. 求 $\boldsymbol{A}^k$.

解.

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ & \lambda & 1\\ & & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ & \lambda & 1\\ & & \lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^2 & 2\lambda & 1\\ & \lambda^2 & 2\lambda\\ & & \lambda^2\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^3=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ & \lambda & 1\\ & & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda^2 & 2\lambda & 1\\ & \lambda^2 & 2\lambda\\ & & \lambda^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda\\ & \lambda^3 & 3\lambda^2\\ & & \lambda^3\end{pmatrix}.$$

归纳可知 $\boldsymbol{A}^k=\begin{pmatrix}\lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{1}{2}k(k-1)\lambda^{k-2}\\ & \lambda^k & k\lambda^{k-1}\\ & & \lambda^k\end{pmatrix}$.

例：矩阵幂的计算

另解. 设 $\boldsymbol{N}=\begin{pmatrix}0&1&0\\&0&1\\&&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{N}^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\&0&0\\&&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{N}^3=\boldsymbol{O}$. 由于 $\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{N}$ 且 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{N}$ **可交换**，因此

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^k&=(\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{N})^k=\lambda^k\boldsymbol{E}+\mathrm{C}_k^1\lambda^{k-1}\boldsymbol{N}+\mathrm{C}_k^2\lambda^{k-2}\boldsymbol{N}^2\\&=\begin{pmatrix}\lambda^k&k\lambda^{k-1}&\frac{1}{2}k(k-1)\lambda^{k-2}\\&\lambda^k&k\lambda^{k-1}\\&&\lambda^k\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

例: 矩阵幂的计算

例. 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. 求 $\boldsymbol{A}^k$.

解. 注意到 $\boldsymbol{A}$ 对应平面 $\mathbb{R}^2$ 上的线性变换是逆时针旋转 θ, 所以 $\boldsymbol{A}^k$ 就是逆时针旋转 $n\theta$, 对应的矩阵为

$$\boldsymbol{A}^k = \begin{pmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix}.$$

例：矩阵幂的计算

例. 设 $\boldsymbol{A}=(1,2,3), \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$. 求 $(\boldsymbol{BA})^k$.

解. 注意到 $\boldsymbol{AB}=3$, 因此

$$(\boldsymbol{BA})^k=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{AB})^{k-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\cdot 3^{k-1}\cdot\boldsymbol{A}=3^{k-1}\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}-3^{k-1} & -2\cdot 3^{k-1} & -3^k\\ 2\cdot 3^{k-1} & 4\cdot 3^{k-1} & 2\cdot 3^k\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

把数 λ 看成一阶方阵时, 它右乘一列向量、或左乘一行向量和数乘效果一样.

该方法可用于计算每行之间成比例的方阵的幂.

练习. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}$. 求 $\boldsymbol{A}^k$.

答案. 注意到 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}(1,2,3)$, 因此 $\boldsymbol{A}^k=14^{k-1}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}14^{k-1}&2\cdot14^{k-1}&3\cdot14^{k-1}\\2\cdot14^{k-1}&4\cdot14^{k-1}&6\cdot14^{k-1}\\3\cdot14^{k-1}&6\cdot14^{k-1}&9\cdot14^{k-1}\end{pmatrix}$.

练习. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,-1)$, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$, 则 $|5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^3|=\underline{\ -75\ }$.

想一想: $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$ 能推出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$ 或 $-\boldsymbol{E}$ 吗?

设

$$f(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0$$

是一个多项式. 对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$, 定义

$$f(\boldsymbol{A}) = a_m \boldsymbol{A}^m + \cdots + a_1 \boldsymbol{A} + a_0 \boldsymbol{E}.$$

和幂的计算类似, 我们有

(1) $f\big(\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\big) = \mathrm{diag}\big(f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n)\big)$.

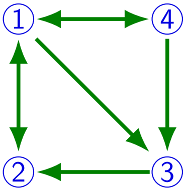
(2) $f(\lambda \boldsymbol{E} + \boldsymbol{N}) = f(\lambda)\boldsymbol{E} + f'(\lambda)\boldsymbol{N} + \dfrac{1}{2!} f''(\lambda)\boldsymbol{N}^2 + \cdots + \dfrac{1}{m!} f^{(m)}(\lambda)\boldsymbol{N}^m$.

(3) 若 $a_0 = 0$, 则 $f(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}) = \big(a_m \lambda^{m-1} + \cdots + a_2 \lambda + a_1\big)\boldsymbol{A}$, 其中 $\lambda = \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$.

矩阵幂的应用：换乘

非考试内容

网上订票系统里记录了所有能直飞的航班线路. 对于不能直达的城市，该怎么确定是否有换乘方案呢？例如 4 个城市之间的航线如图所示：



$\Longleftrightarrow$ 邻接矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

邻接矩阵中 $a_{ij} = 1$ 表示从 i 到 j 有直飞航线.

于是 $\boldsymbol{A}^2$ 的 (i,j) 元

$$b_{ij}=\sum_{k=1}^{4}a_{ik}a_{kj}$$

就是从 i 到 j 换乘一次的方案数. 例如从②$\Longrightarrow$③:

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&1&0\\0&1&\boxed{1}&1\\1&0&0&0\\0&2&1&1\end{pmatrix}.$$

由于 $b_{23}=1$, 因此可通过②$\Longrightarrow$①$\Longrightarrow$③换乘一次到达.

想一想: 如何从③到达④? 考虑 $\boldsymbol{A}^3$, 即换乘两次即可.

矩阵的转置满足如下性质:

(1) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$;

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$;

(3) $(\lambda \boldsymbol{A})^{\mathrm{T}} = \lambda \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$;

(4) $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

例如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

两边取转置得到

$$(b_1, b_2, b_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = (c_1, c_2, c_3).$$

设

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr} \end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{s1}^{\mathrm{T}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{1r}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}.$$

注意小块的位置需要转置，每个小块也需要转置.

对称阵和反对称阵

定义.

- 若方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$, 称 $\boldsymbol{A}$ 为对称阵;
- 若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$, 称 $\boldsymbol{A}$ 为反对称阵.

例如 $\begin{pmatrix}12 & 6 & 1\\ 6 & 8 & 0\\ 1 & 0 & 6\end{pmatrix}$ 是对称阵. 对角矩阵都是对称阵.

例如 $\begin{pmatrix}0 & 6 & 1\\ -6 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 是反对称阵. 反对称阵的对角线均为 0.

例. 证明: 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{AB}$ 都是对称阵, 则 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$.

证明. 由题设可知 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}$,

$$\boldsymbol{AB} = (\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{BA}. \qquad \square$$

想一想: 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{AB}$ 中有一个对称阵和两个反对称阵呢? 同理 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$.

练习. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, (A)一定是对称阵?

(A) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ (B) $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ (C) $\boldsymbol{A}^2$ (D) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{A}$

一般地, 若 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}$, $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}$ 是 m 阶对称阵, $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是 n 阶对称阵.

例：反对称阵的行列式

例. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 是反对称阵. 若 n 是奇数, 则 $|\boldsymbol{A}|=0$.

证明. 由于 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$, 于是

$$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|-\boldsymbol{A}|=(-1)^n|\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{A}|.$$

故 $|\boldsymbol{A}|=0$. □

若 n 是偶数, 则反对称阵的行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 是 $\boldsymbol{A}$ 各个元素的 $\frac{n}{2}$ 次多项式的平方.

任一方阵可表为对称阵与反对称阵之和

例. 证明: 任一方阵均可写成一对称阵和一反对称阵之和.

证明.

$$\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}{2} + \frac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}{2}.$$

□

想一想:

- 若函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称, 则 $f(x)$ 可以表示成一个偶函数和一个奇函数之和.
- 复数 z 可以写成 z_1+z_2, 其中 $\overline{z_1}=z_1, \overline{z_2}=-z_2$.

第二节　逆矩阵

- 方阵的伴随矩阵
- 逆矩阵的定义和形式
- 逆矩阵的性质
- 逆矩阵的应用

伴随矩阵的定义

定义. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为 $n\geqslant 2$ 阶方阵. 由 $\boldsymbol{A}$ 的代数余子式形成的 n 阶方阵

$$\boldsymbol{A}^*=(A_{ji})=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.

注意, 伴随矩阵的 (i,j) 元是代数余子式 A_{ji} 而不是 A_{ij}.

例. 若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

伴随矩阵满足如下性质:

(1) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}_n$.

这是因为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

的 (i,j) 元是 $a_{i1}A_{j1}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases} |\boldsymbol{A}|, & i=j; \\ 0, & i\neq j. \end{cases}$

(2) $(k\boldsymbol{A})^* = k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$.

(3) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^* = (\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}$.

(4) $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

若 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 由 $|\boldsymbol{A}^*| \cdot |\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}| = ||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}_n| = |\boldsymbol{A}|^n$ 可得.

若 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{A}^*)^* = |\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{A}^*)^* = \boldsymbol{O} = |\boldsymbol{A}^*|\boldsymbol{A},$$

于是 $|\boldsymbol{A}^*| = 0$ 或 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}, \boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{O}$. 故 $|\boldsymbol{A}^*| = 0$.

(5) $(\boldsymbol{A}^*)^* = \begin{cases} \boldsymbol{A}, & n=2; \\ |\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}, & n \geqslant 3. \end{cases}$

容易知道, 2 阶方阵满足 $(\boldsymbol{A}^*)^* = \boldsymbol{A}$. 若 $\boldsymbol{A}$ 是 $n \geqslant 3$ 阶方阵且 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 则由

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{A}^*)^* = |\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{A}^*)^* = |\boldsymbol{A}^*|\boldsymbol{A}$$

可知

$$(\boldsymbol{A}^*)^* = \frac{|\boldsymbol{A}^*|}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}.$$

若 $\boldsymbol{A}$ 是 $n \geqslant 3$ 阶方阵且 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 我们会在 §2.4 证明 $(\boldsymbol{A}^*)^* = \boldsymbol{O}$.

例. 设非零 $n \geqslant 3$ 实方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足对任意 i,j, $a_{ij} = A_{ij}$. 求 $|\boldsymbol{A}|$.

解. 由题设可知 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$. 因此 $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$, $|\boldsymbol{A}| = 0, 1$ 或 -1.
注意 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 的第 i 个对角元

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 \geqslant 0.$$

因此 $|\boldsymbol{A}| \geqslant 0$. 若 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 则所有的 $a_{ik} = 0, \boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$, 矛盾! 因此 $|\boldsymbol{A}| = 1$.

事实上, $\boldsymbol{A}$ 是正交阵, 即满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$ 的实方阵.

例：分块方阵的伴随

练习. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶方阵，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \\ & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{C}^*=$(C).

(A) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^* & \\ & \boldsymbol{B}^*\end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}^* & \\ & \boldsymbol{A}^*\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & \\ & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^*\end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* & \\ & |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^*\end{pmatrix}$

给定一个线性变换 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, 若线性变换 $g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ 满足

$$(gf)(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x},\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n,\quad (fg)(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y},\forall\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m,$$

则称 g 是 f 的逆.

设 f,g 对应的矩阵分别是 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$, 则

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}_m,\quad \boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}_n.$$

由于 $m>n$ 时 $|\boldsymbol{AB}|=0$; $m<n$ 时 $|\boldsymbol{BA}|=0$. 因此线性变换的逆只可能在 $m=n$ 时存在.

由此得到对应的矩阵的逆的定义:

定义. 设 A 是 n 阶方阵. 若存在 n 阶方阵 B 使得

$$AB = BA = E_n,$$

则称 A 是**可逆矩阵**, B 是 A 的**逆矩阵**.

可逆矩阵的逆矩阵唯一吗? 设 B, B' 都是 A 的逆矩阵, 则

$$AB = E_n, \quad B'A = E_n.$$

于是

$$B = (B'A)B = B'(AB) = B'.$$

因此**若逆矩阵存在必唯一, 记为 A^{-1}**.

若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 从 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{E}$ 可知 $|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{A}^{-1}|=1$. 从而 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

反之, 若 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$, 则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E},\qquad \boldsymbol{A}\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E},\qquad \boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*.$$

逆矩阵的存在性和形式. n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆当且仅当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$. 此时 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$.

逆矩阵存在性的刻画

推论. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵. 若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$ (或 $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{E}$), 则 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$.

证明. 若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$, 则 $|\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}| = 1$, $|\boldsymbol{A}| \neq 0$. 因此 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AB}) = \boldsymbol{B}.$$

□

行列式为零的方阵也叫**退化方阵**.

例. 证明 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ 可逆并求其逆矩阵.

解. 由于 $|\boldsymbol{A}|=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 可逆. 由于 $\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$, 因此

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.$$

注意到 $\boldsymbol{A}$ 对应的是平面上沿原点逆时针旋转 θ, 因此 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 对应的是平面上沿原点逆时针旋转 $-\theta$.

例：计算逆矩阵

例. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-1\\-1&3&4\end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&7&-2\\-1&-3&5\\1&5&11\end{pmatrix}$ 是否可逆？若可逆求其逆矩阵.

解. 由于 $|\boldsymbol{A}| \xlongequal{r_3+r_1} \begin{vmatrix}1&2&1\\0&1&-1\\0&5&5\end{vmatrix}=10$，因此 $\boldsymbol{A}$ 可逆，

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{10}\boldsymbol{A}^*=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}7&-5&-3\\1&5&1\\1&-5&1\end{pmatrix}.$$

由于 $|\boldsymbol{B}| \xlongequal[c_2-5c_1]{c_3-11c_1} \begin{vmatrix}2&-3&-24\\-1&2&16\\1&0&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3&-24\\2&16\end{vmatrix}=0$，因此 $\boldsymbol{B}$ 不可逆.

例：计算逆矩阵

例. 设 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \neq 0$,

$$\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n),$$

则

$$\boldsymbol{\Lambda}^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1}).$$

通过计算伴随矩阵还可知道，行列式非零的上 (下) 三角阵的逆也是上 (下) 三角的,且二者对角元对应元素互为逆.

分块对角阵也有类似性质. $\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_m)$ 可逆当且仅当 $\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_m$ 均可逆，此时

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{A}_1^{-1}, \ldots, \boldsymbol{A}_m^{-1}).$$

例：分块对角阵

例. 求 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&-1&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解. 设 $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}2&0\\-1&3\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}_1^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}_2^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}3&0\\1&2\end{pmatrix}$.

故 $\boldsymbol{A}^{-1}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{A}_1^{-1},\boldsymbol{A}_2^{-1})=\begin{pmatrix}1&-1&&\\-1&2&&\\&&1/2&0\\&&1/6&1/3\end{pmatrix}$.

例: 分块三角阵的逆

例. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均可逆, 求 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解. 由 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}| \neq 0$ 可知该方阵可逆. 设 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{A}_4 \end{pmatrix} = \boldsymbol{E}$.
则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{E}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{O}, \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_2 + \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}_4 = \boldsymbol{E}$. 于是 $\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}^{-1}, \boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{O}, \boldsymbol{A}_4 = \boldsymbol{B}^{-1}$. 再由 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}_3 = \boldsymbol{O}$ 可得

$$\boldsymbol{A}_3 = -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_1 = -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}.$$

故 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{pmatrix}$.

由此可知, (分块) 上/下三角阵的逆还是 (分块) 上/下三角阵.

逆矩阵通常采用下述方法计算:

(1) 利用公式 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*$, 适用于 $2,3$ 阶方阵, 或用于抽象分析.

(2) 寻找方阵 B 使得 $AB=E$, 适用于抽象矩阵求逆.

(3) 利用矩阵的初等变换求逆矩阵, 该方法我们会在下一节中学习.

例. 设 A 为 n 阶方阵且满足 $A^2+3A-2E=O$. 求 A^{-1} 和 $(A-E)^{-1}$.

解.

(1) 由于 $A^2+3A=2E$, 因此 $A(A+3E)=2E$, $A^{-1}=\dfrac{1}{2}(A+3E)$.

(2) 由于 $(A-E)(A+4E)=-2E$, 因此 $(A-E)^{-1}=-\dfrac{1}{2}(A+4E)$.

设 $f(x)$ 是一多项式, $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$, 我们想求 $(\boldsymbol{A}-a\boldsymbol{E})^{-1}$. 由带余除法可以找到多项式 $h(x)$ 和常数 $r=f(a)$, 使得

$$f(x)=(x-a)h(x)+r,$$

因此

$$f(\boldsymbol{A})-f(a)\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{A}-a\boldsymbol{E})h(\boldsymbol{A}).$$

从而当 $f(a)\neq 0$ 时, $(\boldsymbol{A}-a\boldsymbol{E})^{-1}=-\dfrac{1}{f(a)}h(\boldsymbol{A})$. 当 $f(a)=0$ 时, $\boldsymbol{A}-a\boldsymbol{E}$ 未必可逆.

对于和 $f(x)$ 没有公因子的多项式 $g(x)$, 也总可以通过辗转相除找到多项式 $\alpha(x),\beta(x)$ 使得

$$\alpha(x)f(x)+\beta(x)g(x)=1.$$

从而 $g(\boldsymbol{A})^{-1}=\beta(\boldsymbol{A})$.

逆矩阵满足如下性质:

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 可逆, $\lambda \neq 0$.

- $|\boldsymbol{A}^{-1}| = |\boldsymbol{A}|^{-1}$;
- $\boldsymbol{A}^{-1}$ 可逆, 且 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}$;
- $\lambda\boldsymbol{A}$ 可逆, 且 $(\lambda\boldsymbol{A})^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{A}^{-1}$;
- $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 可逆, 且 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$;
- $\boldsymbol{A}^*$ 可逆, 且 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^* = \dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}$.

由于 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$, 因此 $\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$. 于是

$$(\boldsymbol{A}^{-1})^* = |\boldsymbol{A}^{-1}|(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}, \quad (\boldsymbol{A}^*)^{-1} = (|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}.$$

(2) 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为同阶可逆矩阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 也可逆，且

$$(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}.$$

一般地

$$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_n)^{-1} = \boldsymbol{A}_n^{-1}\cdots\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{A}_1^{-1}.$$

注意矩阵不能相除 $\dfrac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{B}}$，因为一般 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{AB}^{-1}$.

一般地，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1} \neq \boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$. 例如 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 均可逆，但 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 不可逆.

例: 逆矩阵的性质

例. 多选题: 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 为同阶方阵, 且 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则(AC).

(A) 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$, 则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$

(B) 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{CB}$, 则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}$

(C) 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$, 则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$

(D) 若 $\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{O}$, 则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$

练习.

(1) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&1&3\\4&a&7\\3&-1&4\end{pmatrix}$, 且存在矩阵 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$, 则 $a=$ __-3__.

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 则下面命题正确的有__1__个.

(i) $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$; (ii) $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$; (iii) $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

例. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，若(D)，则 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆.

(A) $\boldsymbol{A}$ 可逆　　(B) $|\boldsymbol{A}|=0$

(C) $\boldsymbol{A}$ 的主对角线元素均为 0　　(D) 存在某个正整数 m 使得 $\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{O}$

练习.

(1) 设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^3-2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，且 $|\boldsymbol{A}|=2$，则 $|(\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{E})^{-1}|=$ $\underline{\ -2\ }$.

(2) 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 满足 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$，则(D).

(A) $\boldsymbol{ACB}=\boldsymbol{E}$　(B) $\boldsymbol{CBA}=\boldsymbol{E}$　(C) $\boldsymbol{BAC}=\boldsymbol{E}$　(D) $\boldsymbol{CAB}=\boldsymbol{E}$

想一想 $\boldsymbol{B}^{-1}=?$

例：逆矩阵的性质

例. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵，$|\boldsymbol{A}| = \dfrac{1}{2}$. 求 $\left|(2\boldsymbol{A})^{-1} - (2\boldsymbol{A})^{*}\right|$.

解.

$$(2\boldsymbol{A})^{-1} - (2\boldsymbol{A})^{*} = \frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{-1} - |2\boldsymbol{A}| \cdot (2\boldsymbol{A})^{-1} = \frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{-1} - 4 \cdot \frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{-1} = -\frac{3}{2}\boldsymbol{A}^{-1}$$

因此

$$\left|(2\boldsymbol{A})^{-1} - (2\boldsymbol{A})^{*}\right| = \left|-\frac{3}{2}\boldsymbol{A}^{-1}\right| = \left(-\frac{3}{2}\right)^{3} \cdot 2 = -\frac{27}{4}.$$

例. 设 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 2 \end{pmatrix}$, 求 $(\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1})^n$.

解. $|\boldsymbol{P}| = 2, \boldsymbol{P}^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1})^n &= \boldsymbol{P\Lambda P}^{-1} \cdot \boldsymbol{P\Lambda P}^{-1} \cdots \boldsymbol{P\Lambda P}^{-1} = \boldsymbol{P\Lambda}^n\boldsymbol{P}^{-1} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2^n & 2^n-1 \\ 2-2^{n+1} & 2^{n+1}-1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

由此可知，对于多项式 $f(x)$，$f(\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1})=\boldsymbol{P}f(\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}^{-1}$.

练习. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵，设 $\boldsymbol{P}$ 是可逆方阵使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}$，那么 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}=$ $\underline{\quad\mathrm{diag}(6,3,2)\quad}$.

例：矩阵乘积的伴随

例. 证明 $(\boldsymbol{AB})^* = \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$.

证明. 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均可逆，则

$$(\boldsymbol{AB})^* = |\boldsymbol{AB}|(\boldsymbol{AB})^{-1} = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*.$$

一般情形下，设 $f(x)$ 是

$$((x\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})(x\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}))^* - (x\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^*(x\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^*$$

的 (i,j) 元. 注意到 $|x\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|$ 展开式包含 x^n 项，所以它是 x 的多项式. 因此最多只有 $2n$ 个 x 使得 $|(x\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})(x\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})| = 0$. 对除此之外的无穷多 x, $f(x) = 0$. 而 f 均是 x 的多项式，这迫使 $f \equiv 0, f(0) = 0$. 故 $(\boldsymbol{AB})^* = \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$. □

伴随、逆、转置相互可交换，且均满足此种性质.

逆矩阵的应用：图像处理

非考试内容

左图是一张夏天的风景图，我们希望把它修改成秋天的景色. Photoshop 提供了将颜色重新搭配的通道混合器. 用取色工具选取树叶、蓝天、地面的颜色，分别得到 RGB 值为

$$(59, 181, 19), \quad (90, 185, 249), \quad (210, 205, 186).$$

我们希望将树叶变成金黄色 RGB$(234, 228, 70)$ 而保持蓝天和地面的颜色不变. 则我们需要的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 59 & 90 & 210 \\ 181 & 185 & 205 \\ 19 & 249 & 186 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 234 & 90 & 210 \\ 228 & 185 & 205 \\ 70 & 249 & 186 \end{pmatrix}.$$

解得

$$A = \begin{pmatrix} 234 & 90 & 210 \\ 228 & 185 & 205 \\ 70 & 249 & 186 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 59 & 90 & 210 \\ 181 & 185 & 205 \\ 19 & 249 & 186 \end{pmatrix}^{-1} \approx \begin{pmatrix} 0.43 & 1.23 & -0.70 \\ -0.15 & 1.33 & -0.19 \\ -0.17 & 0.36 & 0.79 \end{pmatrix}.$$

分别在通道混合器的红绿蓝通道输入上面三行即可.

第三节　矩阵的初等变换

- 初等矩阵
- 矩阵等价
- 初等变换解矩阵方程

初等行变换解线性方程组

我们曾利用如下三种初等变换来帮助计算行列式:

初等变换.

(1) 互换两行 (列): $r_i \leftrightarrow r_j, c_i \leftrightarrow c_j$, 行列式变号;

(2) 一行 (列) 乘非零常数 k: kr_i, kc_i, 行列式变为 k 倍;

(3) j 行 (列) 乘 k 加到 i 行 (列): $r_i + kr_j, c_i + kc_j$, 行列式不变.

实际上我们也可以对矩阵实施初等变换, 而且这三类变换过程都是可逆的, 且其逆变换是同一类变换. 以行变换为例:

(1) $r_i \leftrightarrow r_j$ 的逆是 $r_i \leftrightarrow r_j$;

(2) kr_i 的逆是 $\frac{1}{k}r_i$;

(3) $r_i + kr_j$ 的逆是 $r_i - kr_j$.

我们使用矩阵来表示上述变换.

第一类初等矩阵

单位阵 $\boldsymbol{E}$ 经过一次初等变换得到的方阵称为**初等矩阵**.

(1) $r_i \leftrightarrow r_j$ 和 $c_i \leftrightarrow c_j$ 都对应初等矩阵

$$\boldsymbol{E}(i,j)=\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & \\
 & & & 0 & \cdots & 1 & & & \\
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & \cdots & 0 & & & \\
 & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \\
\end{array}$$

第二类初等矩阵

(2) kr_i, kc_i 都对应初等矩阵

$$\boldsymbol{E}(i(k)) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & {\color{red}k} & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \uparrow \\ \text{第 } i \text{ 列} \end{array}$$

第三类初等矩阵

(3) $r_i + kr_j, c_j + kc_i$ 都对应初等矩阵

$$\boldsymbol{E}(i,j(k)) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 &&&&&&\\ &\ddots&&&&&\\ &&1&&{\color{red}k}&&\\ &&&\ddots&&&\\ &&&&1&&\\ &&&&&\ddots&\\ &&&&&&1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array} \\ \uparrow \qquad\quad \uparrow \\ \text{第 } i \text{ 列 第 } j \text{ 列} \end{array}$$

需要注意的是 $c_i + kc_j$ 对应的初等矩阵不是 $E(i,j(k))$ 而是 $E(j,i(k))$.

我们来看

$$\boldsymbol{E}(1,3)\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&10&11&12\\5&6&7&8\\1&2&3&4\end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{E}(2(k))\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&k&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5k&6k&7k&8k\\9&10&11&12\end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{E}(i(k))$ 左乘在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 上, 即对 $\boldsymbol{A}$ 实施 kr_i.

$$\boldsymbol{E}(3,1(k))\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\k&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9+k&10+2k&11+3k&12+4k\end{pmatrix}.$$

因此初等矩阵左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 等同于对 $\boldsymbol{A}$ 实施对应的初等行变换.

同理, 初等矩阵右乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 等同于对 $\boldsymbol{A}$ 实施对应的初等列变换.

定理. 设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}$.

(1) 对 $\boldsymbol{A}$ 实施一次初等行变换, 相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的左边乘对应的 m 阶初等矩阵.

(2) 对 $\boldsymbol{A}$ 实施一次初等列变换, 相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的右边乘对应的 n 阶初等矩阵.

对应的初等矩阵就是对单位阵 $\boldsymbol{E}$ 实施相应的初等变换得到的矩阵.

即左行右列.

例. 设 A 为 3 阶可逆方阵, 将 A 的第 1 列与第 2 列交换得 B, 再把 B 的第 2 列加到第 3 列得到 C. 求 $Q = A^{-1}C$.

解. $B = A\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = B\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = AQ$. 因此

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

练习. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31}+2a_{11} & a_{33}+2a_{13} & a_{32}+2a_{12} \end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 则 $\boldsymbol{B}=$(C).

(A) $\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2$ (B) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_3$ (C) $\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1$ (D) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}$

由于初等变换都是可逆，因此初等矩阵也都是可逆的：

(1) $\boldsymbol{E}(i,j)\boldsymbol{E}(i,j)=\boldsymbol{E} \implies \boldsymbol{E}(i,j)^{-1}=\boldsymbol{E}(i,j)$;

(2) $\boldsymbol{E}(i(k))\boldsymbol{E}(i(\frac{1}{k}))=\boldsymbol{E} \implies \boldsymbol{E}(i(k))^{-1}=\boldsymbol{E}(i(\frac{1}{k}))$;

(3) $\boldsymbol{E}(i,j(k))\boldsymbol{E}(i,j(-k))=\boldsymbol{E} \implies \boldsymbol{E}(i,j(k))^{-1}=\boldsymbol{E}(i,j(-k))$.

例. 将可逆方阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行的 2 倍加到第 2 行得到 $\boldsymbol{B}$，则对 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 实施初等变换(D)可得到 $\boldsymbol{B}^{-1}$.

(A) r_2+2r_1 (B) r_2-2r_1 (C) c_1+2c_2 (D) c_1-2c_2

练习. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与第 j 行对换后得到的矩阵记为 $\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{AB}^{-1}=$ ___ $\boldsymbol{E}(i,j)$ ___.

例: 初等矩阵

例. 设 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&&&\\0&1&&\\0&0&1&\\a&0&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix}1&&&\\&k&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$, $k\neq 0$, 求 $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_3$ 及逆.

解.

$$\boldsymbol{P}_1 \underset{\sim}{\overset{c_1+ac_4}{}} \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\a&0&0&1\end{pmatrix} \underset{\sim}{\overset{kc_2}{}} \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&k&0&0\\1&0&0&0\\a&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}_1^{-1}=\boldsymbol{P}_1 \underset{\sim}{\overset{r_4-ar_1}{}} (\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2)^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&-a&1\end{pmatrix} \underset{\sim}{\overset{\frac{1}{k}r_2}{}} (\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_3)^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1/k&0&0\\1&0&0&0\\0&0&-a&1\end{pmatrix}.$$

例：初等变换

练习. 设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41} \end{pmatrix},$$

$$P_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

若 A 可逆，则 $B^{-1}=$(C).

(A) $A^{-1}P_1P_2$ (B) $P_1A^{-1}P_2$ (C) $P_1P_2A^{-1}$ (D) $P_2A^{-1}P_1$

练习. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵，存在可逆阵 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$. 若 $\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2)$，则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} =$ ___ $\mathrm{diag}(1,3,2)$ ___.

由于初等矩阵 P 是可逆的, 因此方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \iff$ 方程 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{b}$. 我们希望初等行变换能够将这个方程形式变得简单, 因此我们来看初等行变换能够将矩阵化简成何种形式.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -2 & 11 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \underset{r_3-2r_1}{\overset{r_2-3r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \end{pmatrix} \overset{-\frac{1}{5}r_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{r_2\leftrightarrow r_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \overset{r_3+3r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

经过若干次初等行变换, 矩阵变为行阶梯形矩阵.

定义. 满足下述条件的矩阵称为行阶梯形矩阵:

(1) 每个非零行的第一个非零元只出现在上一行第一个非零元的右边;

(2) 零行只可能出现在最下方.

换言之, 楼梯每行需要拐弯一次, 拐弯处非零, 楼梯左下全零.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \times$$

任何矩阵都可通过初等行变换化为行阶梯形.

行最简形矩阵

$$\begin{pmatrix}1&3&-2&4\\0&1&-1&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}\underset{r_1+2r_3}{\overset{r_2+r_3}{\sim}}\begin{pmatrix}1&3&0&8\\0&1&0&3\\0&0&1&2\end{pmatrix}\overset{r_1-3r_2}{\sim}\begin{pmatrix}\boxed{1}&0&0&-1\\0&\boxed{1}&0&3\\0&0&\boxed{1}&2\end{pmatrix}$$

再经过若干次初等变换, 矩阵变为行最简形矩阵.

定义. 满足下述条件的行阶梯形矩阵称为行最简形矩阵:

(1) 每个非零行的第一个非零元是 1;

(2) 每个非零行的第一个非零元所在列其它元素均为 0.

例如 $\begin{pmatrix}0&\boxed{1}&0&2&0\\0&0&\boxed{1}&1&0\\0&0&0&0&\boxed{1}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$. 任何矩阵都可通过初等行变换化为行最简形.

例. 用初等行变换将 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ -2 & -3 & 9 & 6 \end{pmatrix}$ 化为行最简形矩阵.

解.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ -2 & -3 & 9 & 6 \end{pmatrix} \overset{r_3 + 2r_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & -9 & 12 \end{pmatrix} \overset{r_3 - 3r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{r_1 - 3r_2}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & -9 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

命题. n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆 $\Longleftrightarrow$ 它的行最简形为 $\boldsymbol{E}_n$.

注意到初等行变换不改变行列式的非零性. 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则它的行最简形 $\boldsymbol{B}$ 不能有零行, 从而 $\boldsymbol{B}$ 有 n 个非零行. 而每个非零行的首个非零元所在列数递增, 因此第 i 行的首个非零元一定在第 i 列, 从而 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$.

由此可知, 存在一系列初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\ldots,\boldsymbol{P}_k$ 使得 $\boldsymbol{P}_1\cdots\boldsymbol{P}_k\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$. 从而 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_k^{-1}\cdots\boldsymbol{P}_1^{-1}$, 可逆方阵可以写成有限个初等矩阵的乘积.

矩阵等价的定义

定义.

(1) 若 A 经过有限次初等行变换变为 B, 则称 A 和 B **行等价**, 记作$A \overset{r}{\sim} B$.

(2) 若 A 经过有限次初等列变换变为 B, 则称 A 和 B **列等价**, 记作$A \overset{c}{\sim} B$.

(3) 若 A 经过有限次初等行变换和初等列变换变为 B, 则称 A 和 B **等价**, 记作$A \sim B$.

由于可逆方阵可以写成有限个初等矩阵的乘积, 因此:

定理.

(1) $A \overset{r}{\sim} B$ 当且仅当存在可逆矩阵 P 使得 $B = PA$.

(2) $A \overset{c}{\sim} B$ 当且仅当存在可逆矩阵 Q 使得 $B = AQ$.

(3) $A \sim B$ 当且仅当存在可逆矩阵 P, Q 使得 $B = PAQ$.

由此可知

命题. 矩阵的行等价、列等价、等价均满足

(1) 自反性: $A \sim A$;

(2) 对称性: $A \sim B \implies B \sim A$;

(3) 传递性: $A \sim B, B \sim C \implies A \sim C$.

任一矩阵通过有限次初等行变换变为行最简形后，可通过初等列变换将其变为标准型 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$. 例如:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\sim}{c_4+9c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{c_4-4c_2}{\overset{c_3+3c_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

矩阵的等价也叫做相抵，上述标准型也叫作相抵标准型. 我们会看到不同的 r 对应的相抵标准型不等价. 所以相抵标准型相当于在每一个等价类中找到了一个具有代表性的矩阵.

例：矩阵等价

命题. n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆当且仅当它的标准型为 $\boldsymbol{E}_n$.

练习. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$, 则以下说法正确的有__4__个.

(i) $\boldsymbol{A}$ 等价于 $\boldsymbol{E}$;

(ii) $\boldsymbol{A}$ 等价于 $\boldsymbol{B}$;

(iii) $\boldsymbol{A}$ 可经过有限次初等行变换化为 $\boldsymbol{B}$;

(iv) $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$.

矩阵的变换关系

可逆方阵　　　　可逆上三角阵　　　　$\boldsymbol{E}_n$

任意矩阵 $\xLeftrightarrow[\text{初等行变换}]{\text{有限次}}$ 行阶梯形矩阵 $\xLeftrightarrow[\text{初等行变换}]{\text{有限次}}$ 行最简形矩阵

行最简形矩阵 $\Updownarrow$ 有限次初等列变换

任意矩阵 $\xLeftrightarrow{\text{有限次初等变换}}$ 标准型矩阵

标准型矩阵

$\boldsymbol{E}_n$

例. 将矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$ 表示成有限个初等阵的乘积.

解.

$$\boldsymbol{A} \overset{r_2 \leftrightarrow r_3}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix} \overset{r_3-2r_1}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \underset{-r_3}{\overset{-r_2}{\sim}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

因此 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$,

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

若 A 可逆, 则 $AX=B \iff X=A^{-1}B$. 若 $(A,B)\overset{r}{\sim}(E,X)$, 则存在可逆矩阵 P 使得 $P(A,B)=(E,X)$. 即 $P=A^{-1}, X=A^{-1}B$. 所以

$$AX=B \iff X=A^{-1}B \iff (A,B)\overset{r}{\sim}(E,X).$$

同理

$$XA=C \iff X=CA^{-1} \iff \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}\overset{c}{\sim}\begin{pmatrix} E \\ X \end{pmatrix}.$$

所以我们可使用初等变换解该类型矩阵方程.

特别地, $(A,E)\overset{r}{\sim}(E,A^{-1})$ 可计算矩阵的逆, $(A,b)\overset{r}{\sim}(E,A^{-1}b)$ 可解方程 $Ax=b$.

例. 求 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ 的逆.

例：初等变换解矩阵方程

解.

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&1&0&0\\1&2&3&0&1&0\\2&1&4&0&0&1\end{array}\right)\underset{r_3-2r_1}{\underset{\sim}{r_2-r_1}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&1&0&0\\0&1&1&-1&1&0\\0&-1&0&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&1&0&0\\0&1&1&-1&1&0\\0&0&1&-3&1&1\end{array}\right)\underset{r_2-r_3}{\underset{\sim}{r_1-2r_3}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&7&-2&-2\\0&1&0&2&0&-1\\0&0&1&-3&1&1\end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{r_1-r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&5&-2&-1\\0&1&0&2&0&-1\\0&0&1&-3&1&1\end{array}\right).$$

故 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}5&-2&-1\\2&0&-1\\-3&1&1\end{pmatrix}.$

例. 若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&0\\2&1&3\\0&1&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{X}$, 求 $\boldsymbol{X}$.

解. 由题设知 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}$.

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E},\boldsymbol{A})=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&2&2&0\\2&0&3&2&1&3\\0&1&-1&0&1&0\end{array}\right)\xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_3]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&2&2&0\\0&1&-1&0&1&0\\0&-4&3&-2&-3&3\end{array}\right)$$

续解.

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & -3 & 3 \end{array}\right) \underset{-r_3}{\overset{r_3+4r_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\overset{r_2+r_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right) \overset{r_1-2r_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right).$$

故 $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$

例. 解矩阵方程 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=2\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{X}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$.

解. 注意到 $|\boldsymbol{A}|=4$. 两边同时左乘 $\boldsymbol{A}$ 得到 $4\boldsymbol{X}=2\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$，$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}$.

$$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A},\boldsymbol{A})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&1&1&1&-1\\1&1&-1&-1&1&1\\-1&1&1&1&-1&1\end{array}\right)\overset{r}{\sim}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&1\\0&0&1&1&0&0\end{array}\right).$$

故 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$.

练习. 解矩阵方程 $A^*XA = 2XA - 8E$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

答案. 两边同时左乘 A 右乘 A^{-1} 得到 $-2X = 2AX - 8E$, $(A+E)X = 4E$,

$$(A+E, 4E) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 2 & 2 & -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$