线性代数

张神星 (合肥工业大学)
翡翠科教楼 *B1810* 东
zhangshenxing@hfut.edu.cn
https://faculty.hfut.edu.cn/zhangshenxing

第二章　等价和秩

第一节　矩阵的初等变换

- 初等矩阵
- 矩阵等价
- 初等变换解矩阵方程

初等行变换解线性方程组

我们曾利用如下三种初等变换来帮助计算行列式:

初等行变换解线性方程组

我们曾利用如下三种初等变换来帮助计算行列式:

初等变换.

我们曾利用如下三种初等变换来帮助计算行列式:

初等变换.

(1) **互换两行 (列):** $r_i \leftrightarrow r_j, c_i \leftrightarrow c_j$, **行列式变号;**

我们曾利用如下三种初等变换来帮助计算行列式:

初等变换.

(1) **互换两行 (列): $r_i \leftrightarrow r_j, c_i \leftrightarrow c_j$, 行列式变号;**

(2) **一行 (列) 乘非零常数 k: kr_i, kc_i, 行列式变为 k 倍;**

我们曾利用如下三种初等变换来帮助计算行列式:

初等变换.

(1) **互换两行 (列): $r_i \leftrightarrow r_j, c_i \leftrightarrow c_j$, 行列式变号;**

(2) **一行 (列) 乘非零常数 k: kr_i, kc_i, 行列式变为 k 倍;**

(3) **j 行 (列) 乘 k 加到 i 行 (列): $r_i + kr_j, c_i + kc_j$, 行列式不变.**

我们曾利用如下三种初等变换来帮助计算行列式:

初等变换.

(1) **互换两行 (列): $r_i \leftrightarrow r_j, c_i \leftrightarrow c_j$, 行列式变号;**

(2) **一行 (列) 乘非零常数 k: kr_i, kc_i, 行列式变为 k 倍;**

(3) **j 行 (列) 乘 k 加到 i 行 (列): $r_i + kr_j, c_i + kc_j$, 行列式不变.**

实际上我们也可以对矩阵实施初等变换,

我们曾利用如下三种初等变换来帮助计算行列式:

初等变换.

(1) **互换两行 (列): $r_i \leftrightarrow r_j, c_i \leftrightarrow c_j$, 行列式变号;**

(2) **一行 (列) 乘非零常数 k: kr_i, kc_i, 行列式变为 k 倍;**

(3) **j 行 (列) 乘 k 加到 i 行 (列): $r_i + kr_j, c_i + kc_j$, 行列式不变.**

实际上我们也可以对矩阵实施初等变换, 而且这三类变换过程都是可逆的, 且其逆变换是同一类变换.

我们曾利用如下三种初等变换来帮助计算行列式:

初等变换.

(1) **互换两行 (列): $r_i \leftrightarrow r_j, c_i \leftrightarrow c_j$, 行列式变号;**

(2) **一行 (列) 乘非零常数 k: kr_i, kc_i, 行列式变为 k 倍;**

(3) **j 行 (列) 乘 k 加到 i 行 (列): $r_i + kr_j, c_i + kc_j$, 行列式不变.**

实际上我们也可以对矩阵实施初等变换, 而且这三类变换过程都是可逆的, 且其逆变换是同一类变换. 以行变换为例:

初等行变换解线性方程组

我们曾利用如下三种初等变换来帮助计算行列式:

初等变换.

(1) **互换两行 (列): $r_i \leftrightarrow r_j, c_i \leftrightarrow c_j$, 行列式变号;**

(2) **一行 (列) 乘非零常数 k: kr_i, kc_i, 行列式变为 k 倍;**

(3) **j 行 (列) 乘 k 加到 i 行 (列): $r_i + kr_j, c_i + kc_j$, 行列式不变.**

实际上我们也可以对矩阵实施初等变换, 而且这三类变换过程都是可逆的, 且其逆变换是同一类变换. 以行变换为例:

(1) $r_i \leftrightarrow r_j$ 的逆是 $r_i \leftrightarrow r_j$;

初等行变换解线性方程组

我们曾利用如下三种初等变换来帮助计算行列式:

初等变换.

(1) **互换两行 (列): $r_i \leftrightarrow r_j, c_i \leftrightarrow c_j$, 行列式变号;**

(2) **一行 (列) 乘非零常数 k: kr_i, kc_i, 行列式变为 k 倍;**

(3) **j 行 (列) 乘 k 加到 i 行 (列): $r_i + kr_j, c_i + kc_j$, 行列式不变.**

实际上我们也可以对矩阵实施初等变换, 而且这三类变换过程都是可逆的, 且其逆变换是同一类变换. 以行变换为例:

(1) $r_i \leftrightarrow r_j$ 的逆是 $r_i \leftrightarrow r_j$;

(2) kr_i 的逆是 $\dfrac{1}{k}r_i$;

初等行变换解线性方程组

我们曾利用如下三种初等变换来帮助计算行列式:

初等变换.

(1) **互换两行 (列): $r_i \leftrightarrow r_j, c_i \leftrightarrow c_j$, 行列式变号;**

(2) **一行 (列) 乘非零常数 k: kr_i, kc_i, 行列式变为 k 倍;**

(3) **j 行 (列) 乘 k 加到 i 行 (列): $r_i + kr_j, c_i + kc_j$, 行列式不变.**

实际上我们也可以对矩阵实施初等变换, 而且这三类变换过程都是可逆的, 且其逆变换是同一类变换. 以行变换为例:

(1) $r_i \leftrightarrow r_j$ 的逆是 $r_i \leftrightarrow r_j$;

(2) kr_i 的逆是 $\dfrac{1}{k} r_i$;

(3) $r_i + kr_j$ 的逆是 $r_i - kr_j$.

初等行变换解线性方程组

我们曾利用如下三种初等变换来帮助计算行列式:

初等变换.

(1) **互换两行 (列): $\boldsymbol{r_i \leftrightarrow r_j, c_i \leftrightarrow c_j}$, 行列式变号;**

(2) **一行 (列) 乘非零常数 k: $\boldsymbol{kr_i, kc_i}$, 行列式变为 k 倍;**

(3) **j 行 (列) 乘 k 加到 i 行 (列): $\boldsymbol{r_i + kr_j, c_i + kc_j}$, 行列式不变.**

实际上我们也可以对矩阵实施初等变换, 而且这三类变换过程都是可逆的, 且其逆变换是同一类变换. 以行变换为例:

(1) $r_i \leftrightarrow r_j$ 的逆是 $r_i \leftrightarrow r_j$;

(2) kr_i 的逆是 $\frac{1}{k}r_i$;

(3) $r_i + kr_j$ 的逆是 $r_i - kr_j$.

我们使用矩阵来表示上述变换.

第一类初等矩阵

单位阵 E 经过一次初等变换得到的方阵称为**初等矩阵**.

单位阵 $\boldsymbol{E}$ 经过一次初等变换得到的方阵称为**初等矩阵**.

(1) $r_i \leftrightarrow r_j$ 和 $c_i \leftrightarrow c_j$ 都对应初等矩阵

$$\boldsymbol{E}(i,j)=\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 0 & \cdots & 1 & & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & \cdots & 0 & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

第二类初等矩阵

(2) kr_i, kc_i 都对应初等矩阵

$$\boldsymbol{E}(i(k)) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 &&&& \\ &&& k &&& \\ &&&& 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix} \\ \uparrow \\ 第\ i\ 列 \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow 第\ i\ 行 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

(3) $r_i + kr_j, c_j + kc_i$ 都对应初等矩阵

$$\boldsymbol{E}(i,j(k)) = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & k & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \text{第 } i \text{ 列} & \text{第 } j \text{ 列} \end{array} & \end{array}$$

第三类初等矩阵

(3) $r_i + kr_j, c_j + kc_i$ 都对应初等矩阵

$$\boldsymbol{E}(i,j(k)) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 && k && \\ &&& \ddots &&& \\ &&&& 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array} \\ \uparrow \qquad\qquad \uparrow \\ \text{第 } i \text{ 列} \quad \text{第 } j \text{ 列} \end{array}$$

需要注意的是 $c_i + kc_j$ 对应的初等矩阵不是 $E(i,j(k))$ 而是 $E(j,i(k))$.

初等矩阵左乘矩阵

我们来看

$$\boldsymbol{E}(1,3)\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

我们来看

$$\boldsymbol{E}(1,3)\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&10&11&12\\5&6&7&8\\1&2&3&4\end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{E}(2(k))\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&k&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5k&6k&7k&8k\\9&10&11&12\end{pmatrix}.$$

我们来看

$$\boldsymbol{E}(1,3)\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{E}(2(k))\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5k & 6k & 7k & 8k \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{E}(i(k))$ 左乘在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 上, 即对 $\boldsymbol{A}$ 实施 kr_i.

我们来看

$$\boldsymbol{E}(1,3)\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&10&11&12\\5&6&7&8\\1&2&3&4\end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{E}(2(k))\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&k&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5k&6k&7k&8k\\9&10&11&12\end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{E}(i(k))$ 左乘在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 上, 即对 $\boldsymbol{A}$ 实施 kr_i.

$$\boldsymbol{E}(3,1(k))\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\k&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9+k&10+2k&11+3k&12+4k\end{pmatrix}.$$

因此初等矩阵左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 等同于对 $\boldsymbol{A}$ 实施对应的初等行变换.

因此初等矩阵左乘矩阵 A 等同于对 A 实施对应的初等行变换.

同理, 初等矩阵右乘矩阵 A 等同于对 A 实施对应的初等列变换.

因此初等矩阵左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 等同于对 $\boldsymbol{A}$ 实施对应的初等行变换.

同理, 初等矩阵右乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 等同于对 $\boldsymbol{A}$ 实施对应的初等列变换.

定理. 设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}$.

因此初等矩阵左乘矩阵 A 等同于对 A 实施对应的初等行变换.

同理, 初等矩阵右乘矩阵 A 等同于对 A 实施对应的初等列变换.

定理. 设 $A \in M_{m\times n}$.

(1) 对 A 实施一次初等行变换, 相当于在 A 的左边乘对应的 m 阶初等矩阵.

因此初等矩阵左乘矩阵 A 等同于对 A 实施对应的初等行变换.

同理, 初等矩阵右乘矩阵 A 等同于对 A 实施对应的初等列变换.

定理. 设 $A \in M_{m\times n}$.

(1) 对 A 实施一次初等行变换, 相当于在 A 的左边乘对应的 m 阶初等矩阵.

(2) 对 A 实施一次初等列变换, 相当于在 A 的右边乘对应的 n 阶初等矩阵.

因此初等矩阵左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 等同于对 $\boldsymbol{A}$ 实施对应的初等行变换.

同理, 初等矩阵右乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 等同于对 $\boldsymbol{A}$ 实施对应的初等列变换.

定理. 设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}$.

(1) 对 $\boldsymbol{A}$ 实施一次初等行变换, 相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的左边乘对应的 m 阶初等矩阵.

(2) 对 $\boldsymbol{A}$ 实施一次初等列变换, 相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的右边乘对应的 n 阶初等矩阵.

对应的初等矩阵就是对单位阵 $\boldsymbol{E}$ 实施相应的初等变换得到的矩阵.

因此初等矩阵左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 等同于对 $\boldsymbol{A}$ 实施对应的初等行变换.

同理, 初等矩阵右乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 等同于对 $\boldsymbol{A}$ 实施对应的初等列变换.

定理. 设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}$.

(1) 对 $\boldsymbol{A}$ 实施一次初等行变换, 相当于在$\boldsymbol{A}$ 的左边乘对应的 m 阶初等矩阵.

(2) 对 $\boldsymbol{A}$ 实施一次初等列变换, 相当于在$\boldsymbol{A}$ 的右边乘对应的 n 阶初等矩阵.

对应的初等矩阵就是对单位阵 $\boldsymbol{E}$ 实施相应的初等变换得到的矩阵.

即左行右列.

例: 初等矩阵与初等变换

例. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶可逆方阵, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 列与第 2 列交换得 $\boldsymbol{B}$, 再把 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 列加到第 3 列得到 $\boldsymbol{C}$. 求 $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$.

例: 初等矩阵与初等变换

例. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶可逆方阵, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 列与第 2 列交换得 $\boldsymbol{B}$, 再把 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 列加到第 3 列得到 $\boldsymbol{C}$. 求 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$.

解. $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}.$

例. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶可逆方阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 列与第 2 列交换得 $\boldsymbol{B}$，再把 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 列加到第 3 列得到 $\boldsymbol{C}$. 求 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$.

解. $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$. 因此

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

例：初等矩阵与初等变换

练习. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31}+2a_{11} & a_{33}+2a_{13} & a_{32}+2a_{12} \end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 则 $\boldsymbol{B}=($ $)$.

(A) $\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2$ (B) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_3$ (C) $\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1$ (D) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}$

例：初等矩阵与初等变换

练习. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31}+2a_{11} & a_{33}+2a_{13} & a_{32}+2a_{12} \end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 则 $\boldsymbol{B}=$(C).

(A) $\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2$ (B) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_3$ (C) $\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1$ (D) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}$

例：初等矩阵的逆

由于初等变换都是可逆, 因此初等矩阵也都是可逆的:

例：初等矩阵的逆

由于初等变换都是可逆, 因此初等矩阵也都是可逆的:

(1) $\boldsymbol{E}(i,j)\boldsymbol{E}(i,j) = \boldsymbol{E} \implies \boldsymbol{E}(i,j)^{-1} = \boldsymbol{E}(i,j)$;

例：初等矩阵的逆

由于初等变换都是可逆，因此初等矩阵也都是可逆的：

(1) $\boldsymbol{E}(i,j)\boldsymbol{E}(i,j) = \boldsymbol{E} \implies \boldsymbol{E}(i,j)^{-1} = \boldsymbol{E}(i,j)$;

(2) $\boldsymbol{E}\big(i(k)\big)\boldsymbol{E}\big(i(\frac{1}{k})\big) = \boldsymbol{E} \implies \boldsymbol{E}\big(i(k)\big)^{-1} = \boldsymbol{E}\big(i(\frac{1}{k})\big)$;

例：初等矩阵的逆

由于初等变换都是可逆，因此初等矩阵也都是可逆的:

(1) $\boldsymbol{E}(i,j)\boldsymbol{E}(i,j)=\boldsymbol{E} \implies \boldsymbol{E}(i,j)^{-1}=\boldsymbol{E}(i,j)$;

(2) $\boldsymbol{E}\big(i(k)\big)\boldsymbol{E}\big(i(\frac{1}{k})\big)=\boldsymbol{E} \implies \boldsymbol{E}\big(i(k)\big)^{-1}=\boldsymbol{E}\big(i(\frac{1}{k})\big)$;

(3) $\boldsymbol{E}\big(i,j(k)\big)\boldsymbol{E}\big(i,j(-k)\big)=\boldsymbol{E} \implies \boldsymbol{E}\big(i,j(k)\big)^{-1}=\boldsymbol{E}\big(i,j(-k)\big)$.

例: 初等矩阵的逆

由于初等变换都是可逆, 因此初等矩阵也都是可逆的:

(1) $\boldsymbol{E}(i,j)\boldsymbol{E}(i,j)=\boldsymbol{E} \implies \boldsymbol{E}(i,j)^{-1}=\boldsymbol{E}(i,j)$;

(2) $\boldsymbol{E}(i(k))\boldsymbol{E}(i(\frac{1}{k}))=\boldsymbol{E} \implies \boldsymbol{E}(i(k))^{-1}=\boldsymbol{E}(i(\frac{1}{k}))$;

(3) $\boldsymbol{E}(i,j(k))\boldsymbol{E}(i,j(-k))=\boldsymbol{E} \implies \boldsymbol{E}(i,j(k))^{-1}=\boldsymbol{E}(i,j(-k))$.

例. 将可逆方阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行的 2 倍加到第 2 行得到 $\boldsymbol{B}$, 则对 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 实施初等变换(　　)可得到 $\boldsymbol{B}^{-1}$.

(A) r_2+2r_1　　(B) r_2-2r_1　　(C) c_1+2c_2　　(D) c_1-2c_2

例: 初等矩阵的逆

由于初等变换都是可逆, 因此初等矩阵也都是可逆的:

(1) $\boldsymbol{E}(i,j)\boldsymbol{E}(i,j)=\boldsymbol{E} \implies \boldsymbol{E}(i,j)^{-1}=\boldsymbol{E}(i,j)$;

(2) $\boldsymbol{E}(i(k))\boldsymbol{E}(i(\frac{1}{k}))=\boldsymbol{E} \implies \boldsymbol{E}(i(k))^{-1}=\boldsymbol{E}(i(\frac{1}{k}))$;

(3) $\boldsymbol{E}(i,j(k))\boldsymbol{E}(i,j(-k))=\boldsymbol{E} \implies \boldsymbol{E}(i,j(k))^{-1}=\boldsymbol{E}(i,j(-k))$.

例. 将可逆方阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行的 2 倍加到第 2 行得到 $\boldsymbol{B}$, 则对 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 实施初等变换(D)可得到 $\boldsymbol{B}^{-1}$.

(A) r_2+2r_1 (B) r_2-2r_1 (C) c_1+2c_2 (D) c_1-2c_2

例: 初等矩阵的逆

由于初等变换都是可逆, 因此初等矩阵也都是可逆的:

(1) $\boldsymbol{E}(i,j)\boldsymbol{E}(i,j)=\boldsymbol{E} \implies \boldsymbol{E}(i,j)^{-1}=\boldsymbol{E}(i,j)$;

(2) $\boldsymbol{E}\big(i(k)\big)\boldsymbol{E}\big(i(\frac{1}{k})\big)=\boldsymbol{E} \implies \boldsymbol{E}\big(i(k)\big)^{-1}=\boldsymbol{E}\big(i(\frac{1}{k})\big)$;

(3) $\boldsymbol{E}\big(i,j(k)\big)\boldsymbol{E}\big(i,j(-k)\big)=\boldsymbol{E} \implies \boldsymbol{E}\big(i,j(k)\big)^{-1}=\boldsymbol{E}\big(i,j(-k)\big)$.

例. 将可逆方阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行的 2 倍加到第 2 行得到 $\boldsymbol{B}$, 则对 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 实施初等变换(D)可得到 $\boldsymbol{B}^{-1}$.

(A) r_2+2r_1 (B) r_2-2r_1 (C) c_1+2c_2 (D) c_1-2c_2

练习. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与第 j 行对换后得到的矩阵记为 $\boldsymbol{B}$, 则 $\boldsymbol{AB}^{-1}=$______________.

例: 初等矩阵的逆

由于初等变换都是可逆, 因此初等矩阵也都是可逆的:

(1) $\boldsymbol{E}(i,j)\boldsymbol{E}(i,j)=\boldsymbol{E} \implies \boldsymbol{E}(i,j)^{-1}=\boldsymbol{E}(i,j)$;

(2) $\boldsymbol{E}(i(k))\boldsymbol{E}(i(\frac{1}{k}))=\boldsymbol{E} \implies \boldsymbol{E}(i(k))^{-1}=\boldsymbol{E}(i(\frac{1}{k}))$;

(3) $\boldsymbol{E}(i,j(k))\boldsymbol{E}(i,j(-k))=\boldsymbol{E} \implies \boldsymbol{E}(i,j(k))^{-1}=\boldsymbol{E}(i,j(-k))$.

例. 将可逆方阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行的 2 倍加到第 2 行得到 $\boldsymbol{B}$, 则对 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 实施初等变换(D)可得到 $\boldsymbol{B}^{-1}$.

(A) r_2+2r_1 (B) r_2-2r_1 (C) c_1+2c_2 (D) c_1-2c_2

练习. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与第 j 行对换后得到的矩阵记为 $\boldsymbol{B}$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}=$ ____ $\boldsymbol{E}(i,j)$ ____.

例. 设 $\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{P}_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & k & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, k \neq 0$, 求 $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_3$ 及逆.

例. 设 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&&&\\0&1&&\\0&0&1&\\a&0&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix}1&&&\\&k&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$, $k\neq0$, 求 $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_3$ 及逆.

解.

$$\boldsymbol{P}_1 \overset{c_1+ac_4}{\sim} \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\a&0&0&1\end{pmatrix}$$

例. 设 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}, \boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&&&\\0&1&&\\0&0&1&\\a&0&0&1\end{pmatrix}, \boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix}1&&&\\&k&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}, k\neq 0$, 求 $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_3$ 及逆.

解.

$$\boldsymbol{P}_1 \underset{\sim}{c_1+ac_4} \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\a&0&0&1\end{pmatrix} \underset{\sim}{kc_2} \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&k&0&0\\1&0&0&0\\a&0&0&1\end{pmatrix},$$

例. 设 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&&&\\0&1&&\\0&0&1&\\a&0&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix}1&&&\\&k&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$, $k\neq 0$, 求 $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_3$ 及逆.

解.

$$\boldsymbol{P}_1 \overset{c_1+ac_4}{\sim} \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\a&0&0&1\end{pmatrix} \overset{kc_2}{\sim} \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&k&0&0\\1&0&0&0\\a&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}_1^{-1}=\boldsymbol{P}_1 \overset{r_4-ar_1}{\sim} (\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2)^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&-a&1\end{pmatrix}$$

例. 设 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&&&\\0&1&&\\0&0&1&\\a&0&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix}1&&&\\&k&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$, $k\neq 0$, 求 $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_3$ 及逆.

解.

$$\boldsymbol{P}_1 \underset{\sim}{\xrightarrow{c_1+ac_4}} \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\a&0&0&1\end{pmatrix} \underset{\sim}{\xrightarrow{kc_2}} \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&k&0&0\\1&0&0&0\\a&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}_1^{-1}=\boldsymbol{P}_1 \underset{\sim}{\xrightarrow{r_4-ar_1}} (\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2)^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&-a&1\end{pmatrix} \underset{\sim}{\xrightarrow{\frac{1}{k}r_2}} (\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_3)^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1/k&0&0\\1&0&0&0\\0&0&-a&1\end{pmatrix}.$$

练习. 设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41} \end{pmatrix},$$

$$P_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

若 A 可逆，则 $B^{-1}=(\quad)$.

(A) $A^{-1}P_1P_2$ (B) $P_1A^{-1}P_2$ (C) $P_1P_2A^{-1}$ (D) $P_2A^{-1}P_1$

练习. 设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41} \end{pmatrix},$$

$$P_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

若 A 可逆，则 $B^{-1}=$(C).

(A) $A^{-1}P_1P_2$ (B) $P_1A^{-1}P_2$ (C) $P_1P_2A^{-1}$ (D) $P_2A^{-1}P_1$

练习. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵，存在可逆阵 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$. 若 $\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2)$，则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} =$ ________________.

练习. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵，存在可逆阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 3\end{pmatrix}$. 若 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)$，则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=$ ___$\mathrm{diag}(1,3,2)$___.

由于初等矩阵 $\boldsymbol{P}$ 是可逆的，因此方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \iff$ 方程 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{b}$.

矩阵化为行阶梯形

由于初等矩阵 $\boldsymbol{P}$ 是可逆的, 因此方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b} \iff$ 方程 $\boldsymbol{PAx}=\boldsymbol{Pb}$. 我们希望初等行变换能够将这个方程形式变得简单, 因此我们来看初等行变换能够将矩阵化简成何种形式.

矩阵化为行阶梯形

由于初等矩阵 $\boldsymbol{P}$ 是可逆的, 因此方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b} \iff$ 方程 $\boldsymbol{PAx}=\boldsymbol{Pb}$. 我们希望初等行变换能够将这个方程形式变得简单, 因此我们来看初等行变换能够将矩阵化简成何种形式.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -2 & 11 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

矩阵化为行阶梯形

由于初等矩阵 $\boldsymbol{P}$ 是可逆的, 因此方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \iff$ 方程 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{b}$. 我们希望初等行变换能够将这个方程形式变得简单, 因此我们来看初等行变换能够将矩阵化简成何种形式.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -2 & 11 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \overset{r_2-3r_1}{\underset{r_3-2r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

由于初等矩阵 $\boldsymbol{P}$ 是可逆的, 因此方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b} \iff$ 方程 $\boldsymbol{PAx}=\boldsymbol{Pb}$. 我们希望初等行变换能够将这个方程形式变得简单, 因此我们来看初等行变换能够将矩阵化简成何种形式.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -2 & 11 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \underset{r_3-2r_1}{\overset{r_2-3r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \end{pmatrix} \overset{-\frac{1}{5}r_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

矩阵化为行阶梯形

由于初等矩阵 $\boldsymbol{P}$ 是可逆的, 因此方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b} \iff$ 方程 $\boldsymbol{PAx}=\boldsymbol{Pb}$. 我们希望初等行变换能够将这个方程形式变得简单, 因此我们来看初等行变换能够将矩阵化简成何种形式.

$$\begin{pmatrix}1&3&-2&4\\3&6&-2&11\\2&1&1&3\end{pmatrix}\underset{r_3-2r_1}{\underbrace{\xrightarrow{r_2-3r_1}}}\begin{pmatrix}1&3&-2&4\\0&-3&4&-1\\0&-5&5&-5\end{pmatrix}\underbrace{\xrightarrow{-\frac{1}{5}r_3}}\begin{pmatrix}1&3&-2&4\\0&-3&4&-1\\0&1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}}\begin{pmatrix}1&3&-2&4\\0&1&-1&1\\0&-3&4&-1\end{pmatrix}$$

由于初等矩阵 $\boldsymbol{P}$ 是可逆的, 因此方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b} \iff$ 方程 $\boldsymbol{PAx}=\boldsymbol{Pb}$. 我们希望初等行变换能够将这个方程形式变得简单, 因此我们来看初等行变换能够将矩阵化简成何种形式.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -2 & 11 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \underset{r_3-2r_1}{\overset{r_2-3r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \end{pmatrix} \overset{-\frac{1}{5}r_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{r_2\leftrightarrow r_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \overset{r_3+3r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

矩阵化为行阶梯形

由于初等矩阵 $\boldsymbol{P}$ 是可逆的, 因此方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \iff$ 方程 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{b}$. 我们希望初等行变换能够将这个方程形式变得简单, 因此我们来看初等行变换能够将矩阵化简成何种形式.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -2 & 11 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \underset{r_3-2r_1}{\overset{r_2-3r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \end{pmatrix} \overset{-\frac{1}{5}r_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{r_2\leftrightarrow r_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \overset{r_3+3r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

由于初等矩阵 P 是可逆的, 因此方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \iff$ 方程 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{b}$. 我们希望初等行变换能够将这个方程形式变得简单, 因此我们来看初等行变换能够将矩阵化简成何种形式.

$$\begin{pmatrix}1&3&-2&4\\3&6&-2&11\\2&1&1&3\end{pmatrix}\underset{r_3-2r_1}{\overset{r_2-3r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&3&-2&4\\0&-3&4&-1\\0&-5&5&-5\end{pmatrix}\overset{-\frac{1}{5}r_3}{\sim}\begin{pmatrix}1&3&-2&4\\0&-3&4&-1\\0&1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\overset{r_2\leftrightarrow r_3}{\sim}\begin{pmatrix}1&3&-2&4\\0&1&-1&1\\0&-3&4&-1\end{pmatrix}\overset{r_3+3r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&3&-2&4\\0&1&-1&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}$$

经过若干次初等行变换, 矩阵变为行阶梯形矩阵.

定义. 满足下述条件的矩阵称为**行阶梯形矩阵**:

定义. 满足下述条件的矩阵称为**行阶梯形矩阵**:

(1) 每个非零行的第一个非零元只出现在上一行第一个非零元的右边;

定义. 满足下述条件的矩阵称为行阶梯形矩阵:

(1) 每个非零行的第一个非零元只出现在上一行第一个非零元的右边;

(2) 零行只可能出现在最下方.

定义. 满足下述条件的矩阵称为**行阶梯形矩阵**:

(1) 每个非零行的第一个非零元只出现在上一行第一个非零元的右边;

(2) 零行只可能出现在最下方.

换言之, 楼梯每行需要拐弯一次, 拐弯处非零, 楼梯左下全零.

定义. 满足下述条件的矩阵称为**行阶梯形矩阵**:

(1) 每个非零行的第一个非零元只出现在上一行第一个非零元的右边;

(2) 零行只可能出现在最下方.

换言之, 楼梯每行需要拐弯一次, 拐弯处非零, 楼梯左下全零.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

定义. 满足下述条件的矩阵称为**行阶梯形矩阵**:

(1) 每个非零行的第一个非零元只出现在上一行第一个非零元的右边;

(2) 零行只可能出现在最下方.

换言之, 楼梯每行需要拐弯一次, 拐弯处非零, 楼梯左下全零.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

定义. 满足下述条件的矩阵称为**行阶梯形矩阵**:

(1) 每个非零行的第一个非零元只出现在上一行第一个非零元的右边;

(2) 零行只可能出现在最下方.

换言之, 楼梯每行需要拐弯一次, 拐弯处非零, 楼梯左下全零.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \times$$

定义. 满足下述条件的矩阵称为**行阶梯形矩阵**:

(1) 每个非零行的第一个非零元只出现在上一行第一个非零元的右边;

(2) 零行只可能出现在最下方.

换言之, 楼梯每行需要拐弯一次, 拐弯处非零, 楼梯左下全零.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \times$$

任何矩阵都可通过初等行变换化为行阶梯形.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

行最简形矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1 + 2r_3]{r_2 + r_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

行最简形矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{r_1+2r_3}{\overset{r_2+r_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{r_1-3r_2}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&3&-2&4\\0&1&-1&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}\underset{r_1+2r_3}{\overset{r_2+r_3}{\sim}}\begin{pmatrix}1&3&0&8\\0&1&0&3\\0&0&1&2\end{pmatrix}\overset{r_1-3r_2}{\sim}\begin{pmatrix}\boxed{1}&0&0&-1\\0&\boxed{1}&0&3\\0&0&\boxed{1}&2\end{pmatrix}$$

再经过若干次初等变换, 矩阵变为**行最简形矩阵**.

行最简形矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{r_1 + 2r_3}{\overset{r_2 + r_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{r_1 - 3r_2}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{pmatrix}$$

再经过若干次初等变换, 矩阵变为行最简形矩阵.

定义. 满足下述条件的行阶梯形矩阵称为行最简形矩阵:

$$\begin{pmatrix}1&3&-2&4\\0&1&-1&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}\underset{r_1+2r_3}{\overset{r_2+r_3}{\sim}}\begin{pmatrix}1&3&0&8\\0&1&0&3\\0&0&1&2\end{pmatrix}\overset{r_1-3r_2}{\sim}\begin{pmatrix}\boxed{1}&0&0&-1\\0&\boxed{1}&0&3\\0&0&\boxed{1}&2\end{pmatrix}$$

再经过若干次初等变换, 矩阵变为**行最简形矩阵**.

定义. 满足下述条件的行阶梯形矩阵称为**行最简形矩阵**:

(1) 每个非零行的第一个非零元是 1;

行最简形矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{r_1+2r_3}{\overset{r_2+r_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{r_1-3r_2}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{pmatrix}$$

再经过若干次初等变换, 矩阵变为行最简形矩阵.

定义. 满足下述条件的行阶梯形矩阵称为行最简形矩阵:

(1) 每个非零行的第一个非零元是 1;

(2) 每个非零行的第一个非零元所在列其它元素均为 0.

行最简形矩阵

$$\begin{pmatrix}1&3&-2&4\\0&1&-1&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}\underset{r_1+2r_3}{\overset{r_2+r_3}{\sim}}\begin{pmatrix}1&3&0&8\\0&1&0&3\\0&0&1&2\end{pmatrix}\overset{r_1-3r_2}{\sim}\begin{pmatrix}\boxed{1}&0&0&-1\\0&\boxed{1}&0&3\\0&0&\boxed{1}&2\end{pmatrix}$$

再经过若干次初等变换，矩阵变为行最简形矩阵.

定义. 满足下述条件的行阶梯形矩阵称为行最简形矩阵:

(1) 每个非零行的第一个非零元是 1;

(2) 每个非零行的第一个非零元所在列其它元素均为 0.

例如 $\begin{pmatrix}0&\boxed{1}&0&2&0\\0&0&\boxed{1}&1&0\\0&0&0&0&\boxed{1}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$.

行最简形矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{r_1+2r_3}{\overset{r_2+r_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{r_1-3r_2}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{pmatrix}$$

再经过若干次初等变换, 矩阵变为行最简形矩阵.

定义. 满足下述条件的行阶梯形矩阵称为**行最简形矩阵**:

(1) 每个非零行的第一个非零元是 1;

(2) 每个非零行的第一个非零元所在列其它元素均为 0.

例如 $\begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 任何矩阵都可通过初等行变换化为行最简形.

例：行最简形矩阵

例. 用初等行变换将 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ -2 & -3 & 9 & 6 \end{pmatrix}$ 化为行最简形矩阵.

例：行最简形矩阵

例. 用初等行变换将 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ -2 & -3 & 9 & 6 \end{pmatrix}$ 化为行最简形矩阵.

解.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ -2 & -3 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

例: 行最简形矩阵

例. 用初等行变换将 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ -2 & -3 & 9 & 6 \end{pmatrix}$ 化为行最简形矩阵.

解.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ -2 & -3 & 9 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & -9 & 12 \end{pmatrix}$$

例. 用初等行变换将 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ -2 & -3 & 9 & 6 \end{pmatrix}$ 化为行最简形矩阵.

解.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ -2 & -3 & 9 & 6 \end{pmatrix} \underset{}{\overset{r_3+2r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & -9 & 12 \end{pmatrix} \overset{r_3-3r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例. 用初等行变换将 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ -2 & -3 & 9 & 6 \end{pmatrix}$ 化为行最简形矩阵.

解.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ -2 & -3 & 9 & 6 \end{pmatrix} \underset{\sim}{r_3 + 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & -9 & 12 \end{pmatrix} \underset{\sim}{r_3 - 3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{r_1 - 3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

方阵的行最简形

命题. n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆 $\iff$ 它的行最简形为 $\boldsymbol{E}_n$.

命题. n 阶方阵 A 可逆 $\Longleftrightarrow$ 它的行最简形为 E_n.

注意到初等行变换不改变行列式的非零性.

命题. n 阶方阵 A 可逆 $\iff$ 它的行最简形为 E_n.

注意到初等行变换不改变行列式的非零性. 若 A 可逆, 则它的行最简形 B 不能有零行, 从而 B 有 n 个非零行.

方阵的行最简形

命题. n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆 $\iff$ 它的行最简形为 $\boldsymbol{E}_n$.

注意到初等行变换不改变行列式的非零性. 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则它的行最简形 $\boldsymbol{B}$ 不能有零行, 从而 $\boldsymbol{B}$ 有 n 个非零行. 而每个非零行的首个非零元所在列数递增, 因此第 i 行的首个非零元一定在第 i 列, 从而 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}$.

命题. n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆 $\Longleftrightarrow$ 它的行最简形为 $\boldsymbol{E}_n$.

注意到初等行变换不改变行列式的非零性. 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则它的行最简形 $\boldsymbol{B}$ 不能有零行, 从而 $\boldsymbol{B}$ 有 n 个非零行. 而每个非零行的首个非零元所在列数递增, 因此第 i 行的首个非零元一定在第 i 列, 从而 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}$.

由此可知, 存在一系列初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1, \ldots, \boldsymbol{P}_k$ 使得 $\boldsymbol{P}_1 \cdots \boldsymbol{P}_k \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$.

命题. n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆 $\Longleftrightarrow$ 它的行最简形为 $\boldsymbol{E}_n$.

注意到初等行变换不改变行列式的非零性. 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则它的行最简形 $\boldsymbol{B}$ 不能有零行, 从而 $\boldsymbol{B}$ 有 n 个非零行. 而每个非零行的首个非零元所在列数递增, 因此第 i 行的首个非零元一定在第 i 列, 从而 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}$.

由此可知, 存在一系列初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1, \ldots, \boldsymbol{P}_k$ 使得 $\boldsymbol{P}_1 \cdots \boldsymbol{P}_k \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$. 从而 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}_k^{-1} \cdots \boldsymbol{P}_1^{-1}$, 可逆方阵可以写成有限个初等矩阵的乘积.

行最简形的应用

命题. 设 A 是 n 阶方阵. 若 $|A| = 0$, 则 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 有非零解.

行最简形的应用

命题. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵. 若 $|\boldsymbol{A}|=0$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解.

证明. 设 $\boldsymbol{A}$ 的列最简形为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 即 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 是行最简形,

行最简形的应用

命题. **设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵. 若 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 有非零解.**

证明. 设 $\boldsymbol{A}$ 的列最简形为 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 即 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 是行最简形, 其中 $\boldsymbol{P}$ 是一些初等矩阵的乘积, 从而可逆.

命题. 设 A 是 n 阶方阵. 若 $|A| = 0$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 有非零解.

证明. 设 $\boldsymbol{A}$ 的列最简形为 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 即 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 是行最简形, 其中 $\boldsymbol{P}$ 是一些初等矩阵的乘积, 从而可逆. 由 $|\boldsymbol{A}| = 0$ 可知 $|\boldsymbol{B}| = 0$, 从而 $\boldsymbol{B}$ 最后一列为零,

命题. 设 A 是 n 阶方阵. 若 $|A| = 0$, 则 $Ax = \mathbf{0}$ 有非零解.

证明. 设 $\boldsymbol{A}$ 的列最简形为 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 即 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 是行最简形, 其中 $\boldsymbol{P}$ 是一些初等矩阵的乘积, 从而可逆. 由 $|\boldsymbol{A}| = 0$ 可知 $|\boldsymbol{B}| = 0$, 从而 $\boldsymbol{B}$ 最后一列为零, 即 $\boldsymbol{A}$ 乘 $\boldsymbol{P}$ 最后一列为零. $\square$.

行最简形的应用

命题. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵. 若 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 则 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 有非零解.

证明. 设 $\boldsymbol{A}$ 的列最简形为 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{AP}$, 即 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 是行最简形, 其中 $\boldsymbol{P}$ 是一些初等矩阵的乘积, 从而可逆. 由 $|\boldsymbol{A}| = 0$ 可知 $|\boldsymbol{B}| = 0$, 从而 $\boldsymbol{B}$ 最后一列为零, 即 $\boldsymbol{A}$ 乘 $\boldsymbol{P}$ 最后一列为零. $\square$.

推论. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵. 若 $m < n$, 则 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 有非零解.

命题. 设 A 是 n 阶方阵. 若 $|A|=0$, 则 $Ax=\mathbf{0}$ 有非零解.

证明. 设 $\boldsymbol{A}$ 的列最简形为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 即 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 是行最简形, 其中 $\boldsymbol{P}$ 是一些初等矩阵的乘积, 从而可逆. 由 $|\boldsymbol{A}|=0$ 可知 $|\boldsymbol{B}|=0$, 从而 $\boldsymbol{B}$ 最后一列为零, 即 $\boldsymbol{A}$ 乘 $\boldsymbol{P}$ 最后一列为零. □.

推论. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵. 若 $m<n$, 则 $Ax=\mathbf{0}$ 有非零解.

证明. 将 $\boldsymbol{A}$ 补充 $n-m$ 个零行得到 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$,

行最简形的应用

命题. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵. 若 $|\boldsymbol{A}|=0$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解.

证明. 设 $\boldsymbol{A}$ 的列最简形为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 即 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 是行最简形, 其中 $\boldsymbol{P}$ 是一些初等矩阵的乘积, 从而可逆. 由 $|\boldsymbol{A}|=0$ 可知 $|\boldsymbol{B}|=0$, 从而 $\boldsymbol{B}$ 最后一列为零, 即 $\boldsymbol{A}$ 乘 $\boldsymbol{P}$ 最后一列为零. □.

推论. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵. 若 $m<n$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解.

证明. 将 $\boldsymbol{A}$ 补充 $n-m$ 个零行得到 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$, 则 $|\boldsymbol{B}|=0$, 存在非零向量 $\boldsymbol{x}$ 使得 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.

命题. 设 A 是 n 阶方阵. 若 $|A|=0$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 有非零解.

证明. 设 $\boldsymbol{A}$ 的列最简形为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 即 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 是行最简形, 其中 $\boldsymbol{P}$ 是一些初等矩阵的乘积, 从而可逆. 由 $|\boldsymbol{A}|=0$ 可知 $|\boldsymbol{B}|=0$, 从而 $\boldsymbol{B}$ 最后一列为零, 即 $\boldsymbol{A}$ 乘 $\boldsymbol{P}$ 最后一列为零. $\square$.

推论. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵. 若 $m<n$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 有非零解.

证明. 将 $\boldsymbol{A}$ 补充 $n-m$ 个零行得到 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$, 则 $|\boldsymbol{B}|=0$, 存在非零向量 $\boldsymbol{x}$ 使得 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$. 从而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$. $\square$

矩阵等价的定义

定义.

矩阵等价的定义

定义.

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等行变换变为 $\boldsymbol{B}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ **行等价**, 记作$\boldsymbol{A} \overset{r}{\sim} \boldsymbol{B}$.

矩阵等价的定义

定义.

(1) 若 A 经过有限次初等行变换变为 B, 则称 A 和 B 行等价, 记作$A \overset{r}{\sim} B$.

(2) 若 A 经过有限次初等列变换变为 B, 则称 A 和 B 列等价, 记作$A \overset{c}{\sim} B$.

矩阵等价的定义

定义.

(1) 若 A 经过有限次初等行变换变为 B, 则称 A 和 B **行等价**, 记作$A \stackrel{r}{\sim} B$.

(2) 若 A 经过有限次初等列变换变为 B, 则称 A 和 B **列等价**, 记作$A \stackrel{c}{\sim} B$.

(3) 若 A 经过有限次初等行变换和初等列变换变为 B, 则称 A 和 B **等价**, 记作$A \sim B$.

矩阵等价的定义

定义.

(1) 若 A 经过有限次初等行变换变为 B, 则称 A 和 B **行等价**, 记作$A \overset{r}{\sim} B$.

(2) 若 A 经过有限次初等列变换变为 B, 则称 A 和 B **列等价**, 记作$A \overset{c}{\sim} B$.

(3) 若 A 经过有限次初等行变换和初等列变换变为 B, 则称 A 和 B **等价**, 记作$A \sim B$.

由于可逆方阵可以写成有限个初等矩阵的乘积, 因此:

矩阵等价的定义

定义.

(1) 若 A 经过有限次初等行变换变为 B, 则称 A 和 B 行等价, 记作$A \overset{r}{\sim} B$.

(2) 若 A 经过有限次初等列变换变为 B, 则称 A 和 B 列等价, 记作$A \overset{c}{\sim} B$.

(3) 若 A 经过有限次初等行变换和初等列变换变为 B, 则称 A 和 B 等价, 记作$A \sim B$.

由于可逆方阵可以写成有限个初等矩阵的乘积, 因此:

定理.

定义.

(1) 若 A 经过有限次初等行变换变为 B, 则称 A 和 B **行等价**, 记作$A \overset{r}{\sim} B$.

(2) 若 A 经过有限次初等列变换变为 B, 则称 A 和 B **列等价**, 记作$A \overset{c}{\sim} B$.

(3) 若 A 经过有限次初等行变换和初等列变换变为 B, 则称 A 和 B **等价**, 记作$A \sim B$.

由于可逆方阵可以写成有限个初等矩阵的乘积, 因此:

定理.

(1) $A \overset{r}{\sim} B$ 当且仅当存在可逆矩阵 P 使得 $B = PA$.

矩阵等价的定义

定义.

(1) 若 A 经过有限次初等行变换变为 B, 则称 A 和 B **行等价**, 记作$A \overset{r}{\sim} B$.

(2) 若 A 经过有限次初等列变换变为 B, 则称 A 和 B **列等价**, 记作$A \overset{c}{\sim} B$.

(3) 若 A 经过有限次初等行变换和初等列变换变为 B, 则称 A 和 B **等价**, 记作$A \sim B$.

由于可逆方阵可以写成有限个初等矩阵的乘积, 因此:

定理.

(1) $A \overset{r}{\sim} B$ 当且仅当存在可逆矩阵 P 使得 $B = PA$.

(2) $A \overset{c}{\sim} B$ 当且仅当存在可逆矩阵 Q 使得 $B = AQ$.

矩阵等价的定义

定义.

(1) 若 A 经过有限次初等行变换变为 B, 则称 A 和 B **行等价**, 记作$A \overset{r}{\sim} B$.

(2) 若 A 经过有限次初等列变换变为 B, 则称 A 和 B **列等价**, 记作$A \overset{c}{\sim} B$.

(3) 若 A 经过有限次初等行变换和初等列变换变为 B, 则称 A 和 B **等价**, 记作$A \sim B$.

由于可逆方阵可以写成有限个初等矩阵的乘积, 因此:

定理.

(1) $A \overset{r}{\sim} B$ 当且仅当存在可逆矩阵 P 使得 $B = PA$.

(2) $A \overset{c}{\sim} B$ 当且仅当存在可逆矩阵 Q 使得 $B = AQ$.

(3) $A \sim B$ 当且仅当存在可逆矩阵 P, Q 使得 $B = PAQ$.

由此可知

命题. 矩阵的行等价、列等价、等价均满足

由此可知

命题. 矩阵的行等价、列等价、等价均满足

(1) 自反性: $A \sim A$;

矩阵等价的性质

由此可知

命题. 矩阵的行等价、列等价、等价均满足

(1) 自反性: $A \sim A$;

(2) 对称性: $A \sim B \implies B \sim A$;

由此可知

命题. 矩阵的行等价、列等价、等价均满足

(1) 自反性: $A \sim A$;

(2) 对称性: $A \sim B \implies B \sim A$;

(3) 传递性: $A \sim B, B \sim C \implies A \sim C$.

任一矩阵通过有限次初等行变换变为行最简形后，可通过初等**列变换**将其变为**标准型** $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$.

任一矩阵通过有限次初等行变换变为行最简形后，可通过初等列变换将其变为标准型 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$. 例如:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

任一矩阵通过有限次初等行变换变为行最简形后，可通过初等**列变换**将其变为**标准型** $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$. 例如:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{c_4+9c_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

任一矩阵通过有限次初等行变换变为行最简形后，可通过初等**列变换**将其变为**标准型** $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$. 例如:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\sim}{c_4 + 9c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{c_4 - 4c_2}{\overset{c_3 + 3c_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

矩阵的标准型

任一矩阵通过有限次初等行变换变为行最简形后，可通过初等**列变换**将其变为**标准型** $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$. 例如:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\sim}{c_4 + 9c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{c_4 - 4c_2}{\overset{c_3 + 3c_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

矩阵的等价也叫做**相抵**, 上述标准型也叫作**相抵标准型**.

任一矩阵通过有限次初等行变换变为行最简形后, 可通过初等**列变换**将其变为**标准型** $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$. 例如:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{c_4+9c_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{c_4-4c_2}{\overset{c_3+3c_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

矩阵的等价也叫做**相抵**, 上述标准型也叫作**相抵标准型**. 我们会看到不同的 r 对应的相抵标准型不等价.

任一矩阵通过有限次初等行变换变为行最简形后，可通过初等**列变换**将其变为**标准型** $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$. 例如:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{}{\overset{c_4+9c_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{c_4-4c_2}{\overset{c_3+3c_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

矩阵的等价也叫做**相抵**，上述标准型也叫作**相抵标准型**. 我们会看到不同的 r 对应的相抵标准型不等价. 所以相抵标准型相当于在每一个等价类中找到了一个具有代表性的矩阵.

例：矩阵等价

命题. n 阶方阵 A 可逆当且仅当它的标准型为 E_n.

命题. n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆当且仅当它的标准型为 $\boldsymbol{E}_n$.

练习. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}$, 则以下说法正确的有______个.

(i) $\boldsymbol{A}$ 等价于 $\boldsymbol{E}$;

(ii) $\boldsymbol{A}$ 等价于 $\boldsymbol{B}$;

(iii) $\boldsymbol{A}$ 可经过有限次初等行变换化为 $\boldsymbol{B}$;

(iv) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$.

命题. n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆当且仅当它的标准型为 $\boldsymbol{E}_n$.

练习. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$, 则以下说法正确的有__4__个.

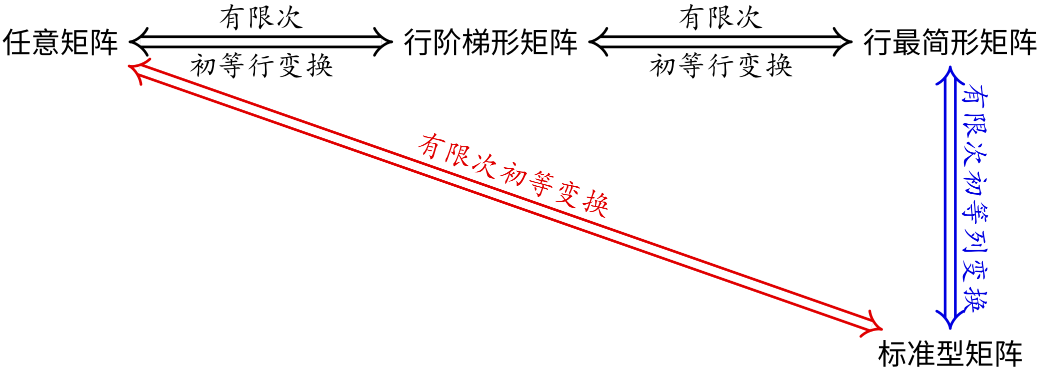
(i) $\boldsymbol{A}$ 等价于 $\boldsymbol{E}$;

(ii) $\boldsymbol{A}$ 等价于 $\boldsymbol{B}$;

(iii) $\boldsymbol{A}$ 可经过有限次初等行变换化为 $\boldsymbol{B}$;

(iv) $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$.

矩阵的变换关系


任意矩阵
有限次
初等行变换
行阶梯形矩阵
有限次
初等行变换
行最简形矩阵
有限次初等变换
有限次初等列变换
标准型矩阵

矩阵的变换关系

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\textcolor{green}{\text{可逆方阵}} & \textcolor{green}{\text{可逆上三角阵}} & \boldsymbol{E}_n \\
\text{任意矩阵} \arrow[r, Leftrightarrow, "\text{有限次}", "\text{初等行变换}"'] \arrow[rrd, Leftrightarrow, "\text{有限次初等变换}"] & \text{行阶梯形矩阵} \arrow[r, Leftrightarrow, "\text{有限次}", "\text{初等行变换}"'] & \text{行最简形矩阵} \arrow[d, Leftrightarrow, "\text{有限次初等列变换}"] \\
 & & \text{标准型矩阵} \\
 & & \boldsymbol{E}_n
\end{tikzcd}
$$

例: 初等变换

例. 将矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ 表示成有限个初等阵的乘积.

例. 将矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$ 表示成有限个初等阵的乘积.

解.

$$\boldsymbol{A}\underset{\sim}{\overset{r_2\leftrightarrow r_3}{}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\2&0&-1\end{pmatrix}\underset{\sim}{\overset{r_3-2r_1}{}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\underset{-r_3}{\overset{-r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

例. 将矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$ 表示成有限个初等阵的乘积.

解.

$$\boldsymbol{A}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\2&0&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-2r_1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[-r_3]{-r_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

因此 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$,

例. 将矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$ 表示成有限个初等阵的乘积.

解.

$$\boldsymbol{A}\underset{}{\overset{r_2\leftrightarrow r_3}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\2&0&-1\end{pmatrix}\overset{r_3-2r_1}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\underset{-r_3}{\overset{-r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

因此 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$,

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B} \iff \boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$.

初等变换解矩阵方程

若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B} \iff \boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$. 若 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \overset{r}{\sim} (\boldsymbol{E},\boldsymbol{X})$, 则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{E},\boldsymbol{X})$.

初等变换解矩阵方程

若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B} \iff \boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$. 若 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \stackrel{r}{\sim} (\boldsymbol{E},\boldsymbol{X})$, 则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{E},\boldsymbol{X})$. 即 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}^{-1}, \boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$.

若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B} \iff \boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$. 若 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \overset{r}{\sim} (\boldsymbol{E},\boldsymbol{X})$, 则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{E},\boldsymbol{X})$. 即 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}^{-1}, \boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$. 所以

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B} \iff \boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \iff (\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \overset{r}{\sim} (\boldsymbol{E},\boldsymbol{X}).$$

若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B} \iff \boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$. 若 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \overset{r}{\sim} (\boldsymbol{E},\boldsymbol{X})$, 则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{E},\boldsymbol{X})$. 即 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}^{-1}, \boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$. 所以

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B} \iff \boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \iff (\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \overset{r}{\sim} (\boldsymbol{E},\boldsymbol{X}).$$

同理

$$\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{C} \iff \boldsymbol{X}=\boldsymbol{CA}^{-1} \iff \begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{C}\end{pmatrix} \overset{c}{\sim} \begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{X}\end{pmatrix}.$$

若 A 可逆, 则 $AX = B \iff X = A^{-1}B$. 若 $(A, B) \overset{r}{\sim} (E, X)$, 则存在可逆矩阵 P 使得 $P(A, B) = (E, X)$. 即 $P = A^{-1}, X = A^{-1}B$. 所以

$$AX = B \iff X = A^{-1}B \iff (A, B) \overset{r}{\sim} (E, X).$$

同理

$$XA = C \iff X = CA^{-1} \iff \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \overset{c}{\sim} \begin{pmatrix} E \\ X \end{pmatrix}.$$

所以我们可使用初等变换解该类型矩阵方程.

若 A 可逆, 则 $AX = B \iff X = A^{-1}B$. 若 $(A, B) \overset{r}{\sim} (E, X)$, 则存在可逆矩阵 P 使得 $P(A, B) = (E, X)$. 即 $P = A^{-1}, X = A^{-1}B$. 所以

$$AX = B \iff X = A^{-1}B \iff (A, B) \overset{r}{\sim} (E, X).$$

同理

$$XA = C \iff X = CA^{-1} \iff \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \overset{c}{\sim} \begin{pmatrix} E \\ X \end{pmatrix}.$$

所以我们可使用初等变换解该类型矩阵方程.

特别地, $(A, E) \overset{r}{\sim} (E, A^{-1})$ 可计算矩阵的逆, $(A, b) \overset{r}{\sim} (E, A^{-1}b)$ 可解方程 $Ax = b$.

若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B} \iff \boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$. 若 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \overset{r}{\sim} (\boldsymbol{E},\boldsymbol{X})$, 则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{E},\boldsymbol{X})$. 即 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}^{-1}, \boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$. 所以

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B} \iff \boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \iff (\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \overset{r}{\sim} (\boldsymbol{E},\boldsymbol{X}).$$

同理

$$\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{C} \iff \boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} \iff \begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{C}\end{pmatrix} \overset{c}{\sim} \begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{X}\end{pmatrix}.$$

所以我们可使用初等变换解该类型矩阵方程.

特别地, $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E}) \overset{r}{\sim} (\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}^{-1})$ 可计算矩阵的逆, $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) \overset{r}{\sim} (\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b})$ 可解方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$.

例. 求 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&3\\2&1&4\end{pmatrix}$ 的逆.

例：初等变换解矩阵方程

解.

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{E}) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

解.

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{E}) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{r_3 - 2r_1}{\overset{r_2 - r_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

解.

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&1&0&0\\1&2&3&0&1&0\\2&1&4&0&0&1\end{array}\right)\underset{r_3-2r_1}{\underbrace{\sim}_{r_2-r_1}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&1&0&0\\0&1&1&-1&1&0\\0&-1&0&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\underbrace{\sim}_{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&1&0&0\\0&1&1&-1&1&0\\0&0&1&-3&1&1\end{array}\right)$$

例：初等变换解矩阵方程

解.

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{E}) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{r_3 - 2r_1}{\overset{r_2 - r_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{r_3 + r_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{r_2 - r_3}{\overset{r_1 - 2r_3}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 0 & 7 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

解.

$$
(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&1&0&0\\1&2&3&0&1&0\\2&1&4&0&0&1\end{array}\right)\underset{r_3-2r_1}{\underrightarrow{r_2-r_1}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&1&0&0\\0&1&1&-1&1&0\\0&-1&0&-2&0&1\end{array}\right)
$$

$$
\underrightarrow{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&1&0&0\\0&1&1&-1&1&0\\0&0&1&-3&1&1\end{array}\right)\underset{r_2-r_3}{\underrightarrow{r_1-2r_3}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&0&7&-2&-2\\0&1&0&2&0&-1\\0&0&1&-3&1&1\end{array}\right)
$$

$$
\underrightarrow{r_1-r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&5&-2&-1\\0&1&0&2&0&-1\\0&0&1&-3&1&1\end{array}\right).
$$

解.

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&1&0&0\\1&2&3&0&1&0\\2&1&4&0&0&1\end{array}\right)\underset{r_3-2r_1}{\overset{r_2-r_1}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&1&0&0\\0&1&1&-1&1&0\\0&-1&0&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\overset{r_3+r_2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&1&0&0\\0&1&1&-1&1&0\\0&0&1&-3&1&1\end{array}\right)\underset{r_2-r_3}{\overset{r_1-2r_3}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&0&7&-2&-2\\0&1&0&2&0&-1\\0&0&1&-3&1&1\end{array}\right)$$

$$\overset{r_1-r_2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&5&-2&-1\\0&1&0&2&0&-1\\0&0&1&-3&1&1\end{array}\right).$$

故 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}5&-2&-1\\2&0&-1\\-3&1&1\end{pmatrix}.$

例: 初等变换解矩阵方程

例. 若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&0\\2&1&3\\0&1&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{X}$, 求 $\boldsymbol{X}$.

例. 若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&0\\2&1&3\\0&1&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{X}$, 求 $\boldsymbol{X}$.

解. 由题设知 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}$.

例. 若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&0\\2&1&3\\0&1&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{X}$, 求 $\boldsymbol{X}$.

解. 由题设知 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}$.

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E},\boldsymbol{A})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&0&2&2&0\\2&0&3&2&1&3\\0&1&-1&0&1&0\end{array}\right)$$

例. 若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&0\\2&1&3\\0&1&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{X}$, 求 $\boldsymbol{X}$.

解. 由题设知 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}$.

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E},\boldsymbol{A})=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&2&2&0\\2&0&3&2&1&3\\0&1&-1&0&1&0\end{array}\right)\xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_3]{\underbrace{r_2-2r_1}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&2&2&0\\0&1&-1&0&1&0\\0&-4&3&-2&-3&3\end{array}\right)$$

续解.

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & -3 & 3 \end{array}\right) \underset{-r_3}{\overset{r_3+4r_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

续解.

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & -3 & 3 \end{array}\right) \underset{-r_3}{\underbrace{r_3+4r_2}} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{r_2+r_3} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

续解.

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & -3 & 3 \end{array}\right) \underset{-r_3}{\overset{r_3+4r_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\overset{r_2+r_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right) \overset{r_1-2r_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right).$$

续解.

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & -3 & 3 \end{array}\right) \underset{-r_3}{\overset{r_3+4r_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\overset{r_2+r_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right) \overset{r_1-2r_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right).$$

故 $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$

例: 解矩阵方程

例. 解矩阵方程 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X} = 2\boldsymbol{E} + 2\boldsymbol{X}$, 其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

例. 解矩阵方程 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X} = 2\boldsymbol{E} + 2\boldsymbol{X}$, 其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

解. 注意到 $|\boldsymbol{A}| = 4$.

例：解矩阵方程

例. 解矩阵方程 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=2\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{X}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$.

解. 注意到 $|\boldsymbol{A}|=4$. 两边同时左乘 $\boldsymbol{A}$ 得到 $4\boldsymbol{X}=2\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$, $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}$.

例. 解矩阵方程 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X} = 2\boldsymbol{E} + 2\boldsymbol{X}$, 其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

解. 注意到 $|\boldsymbol{A}| = 4$. 两边同时左乘 $\boldsymbol{A}$ 得到 $4\boldsymbol{X} = 2\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$, $(2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}$.

$$(2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

例. 解矩阵方程 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X} = 2\boldsymbol{E} + 2\boldsymbol{X}$, 其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

解. 注意到 $|\boldsymbol{A}| = 4$. 两边同时左乘 $\boldsymbol{A}$ 得到 $4\boldsymbol{X} = 2\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$, $(2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}$.

$$(2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

例. 解矩阵方程 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X} = 2\boldsymbol{E} + 2\boldsymbol{X}$，其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

解. 注意到 $|\boldsymbol{A}| = 4$. 两边同时左乘 $\boldsymbol{A}$ 得到 $4\boldsymbol{X} = 2\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$，$(2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}$.

$$(2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

故 $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

例：解矩阵方程

练习. 解矩阵方程 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{X}\boldsymbol{A} - 8\boldsymbol{E}$, 其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

例：解矩阵方程

练习. 解矩阵方程 $A^*XA = 2XA - 8E$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

答案. 两边同时左乘 A 右乘 A^{-1} 得到 $-2X = 2AX - 8E$, $(A+E)X = 4E$,

$$(A+E, 4E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

第二节　向量组

- 线性组合
- 线性相关和线性无关
- 线性相关和线性无关的性质
- 维数和秩
- 极大线性无关组

我们将一些具有相同维数的向量放在一起称之为**向量组**(可以有重复的):

向量组

我们将一些具有相同维数的向量放在一起称之为**向量组**(可以有重复的)：例如:

我们将一些具有相同维数的向量放在一起称之为**向量组**(可以有重复的): 例如:

- $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,-1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (2,1,2)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (3,2,1)^{\mathrm{T}}$;

我们将一些具有相同维数的向量放在一起称之为**向量组**(可以有重复的): 例如:

- $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,-1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (2,1,2)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (3,2,1)^{\mathrm{T}}$;
- $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} = (1,1,-1), \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} = (2,1,2), \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}} = (3,2,1)$;

我们将一些具有相同维数的向量放在一起称之为**向量组**(可以有重复的): 例如:

- $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 1, -1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (2, 1, 2)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (3, 2, 1)^{\mathrm{T}}$;
- $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} = (1, 1, -1), \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} = (2, 1, 2), \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}} = (3, 2, 1)$;
- $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 m 行可以看成 m 个行向量, 它们构成一个向量组, 叫做 $\boldsymbol{A}$ 的**行向量组**;

向量组

我们将一些具有相同维数的向量放在一起称之为**向量组**(可以有重复的)：例如:

- $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 1, -1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (2, 1, 2)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (3, 2, 1)^{\mathrm{T}}$;
- $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} = (1, 1, -1), \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} = (2, 1, 2), \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}} = (3, 2, 1)$;
- $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 m 行可以看成 m 个行向量, 它们构成一个向量组, 叫做 $\boldsymbol{A}$ 的**行向量组**;
- 类似地, $\boldsymbol{A}$ 的列向量构成它的**列向量组**.

向量组

我们将一些具有相同维数的向量放在一起称之为**向量组**(可以有重复的)：例如:

- $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 1, -1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (2, 1, 2)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (3, 2, 1)^{\mathrm{T}}$;
- $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} = (1, 1, -1), \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} = (2, 1, 2), \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}} = (3, 2, 1)$;
- $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 m 行可以看成 m 个行向量，它们构成一个向量组，叫做 $\boldsymbol{A}$ 的**行向量组**;
- 类似地，$\boldsymbol{A}$ 的列向量构成它的**列向量组**.
- $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}, \ldots, \boldsymbol{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)^{\mathrm{T}}$.

对于标准向量空间 $V=\mathbb{R}^n$, 我们可以将任一 $\boldsymbol{v}\in V$ **唯一**地表达为形式

$$\boldsymbol{v}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{e}_n,$$

对于标准向量空间 $V=\mathbb{R}^n$, 我们可以将任一 $\boldsymbol{v}\in V$ **唯一**地表达为形式

$$\boldsymbol{v}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{e}_n,$$

其中

$$\boldsymbol{e}_1=(1,0,\ldots,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{e}_2=(0,1,\ldots,0)^{\mathrm{T}},\ldots,\boldsymbol{e}_n=(0,0,\ldots,1)^{\mathrm{T}}.$$

对于标准向量空间 $V=\mathbb{R}^n$, 我们可以将任一 $\boldsymbol{v}\in V$ **唯一**地表达为形式

$$\boldsymbol{v}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{e}_n,$$

其中

$$\boldsymbol{e}_1=(1,0,\ldots,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{e}_2=(0,1,\ldots,0)^{\mathrm{T}},\ldots,\boldsymbol{e}_n=(0,0,\ldots,1)^{\mathrm{T}}.$$

定义. 设 V 是向量空间. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m\in V$ 满足: 对任意 $\boldsymbol{v}\in V$, 存在唯一的一组数 $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ 使得

$$\boldsymbol{v}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m,$$

则称 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 是 V 的一组**基**.

对于标准向量空间 $V=\mathbb{R}^n$, 我们可以将任一 $\boldsymbol{v}\in V$ **唯一**地表达为形式

$$\boldsymbol{v}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{e}_n,$$

其中

$$\boldsymbol{e}_1=(1,0,\ldots,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{e}_2=(0,1,\ldots,0)^{\mathrm{T}},\ldots,\boldsymbol{e}_n=(0,0,\ldots,1)^{\mathrm{T}}.$$

定义. 设 V 是向量空间. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m\in V$ 满足: 对任意 $\boldsymbol{v}\in V$, 存在唯一的一组数 $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ 使得

$$\boldsymbol{v}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m,$$

则称 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 是 V 的一组**基**.

如何判断一组向量是不是基呢?

对于标准向量空间 $V=\mathbb{R}^n$, 我们可以将任一 $\boldsymbol{v}\in V$ **唯一**地表达为形式

$$\boldsymbol{v}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{e}_n,$$

其中

$$\boldsymbol{e}_1=(1,0,\ldots,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{e}_2=(0,1,\ldots,0)^{\mathrm{T}},\ldots,\boldsymbol{e}_n=(0,0,\ldots,1)^{\mathrm{T}}.$$

定义. 设 V 是向量空间. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m\in V$ 满足: 对任意 $\boldsymbol{v}\in V$, 存在唯一的一组数 $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ 使得

$$\boldsymbol{v}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m,$$

则称 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 是 V 的一组**基**.

如何判断一组向量是不是基呢? 这需要线性组合和线性无关的概念.

向量组的线性组合

定义. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 为 n 维向量. 若存在一组数 $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ 使得

$$\boldsymbol{\beta}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m,$$

则称 $\boldsymbol{\beta}$ 可以被向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$ **线性表示**, 或称 $\boldsymbol{\beta}$ 是向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$ 的**线性组合**.

向量组的线性组合

定义. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}$ 为 n 维向量. 若存在一组数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ 使得

$$\boldsymbol{\beta} = \lambda_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_m \boldsymbol{\alpha}_m,$$

则称 $\boldsymbol{\beta}$ 可以被向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$ **线性表示**, 或称 $\boldsymbol{\beta}$ 是向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$ 的**线性组合**.

例.

向量组的线性组合

定义. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}$ 为 n 维向量. 若存在一组数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ 使得

$$\boldsymbol{\beta} = \lambda_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_m \boldsymbol{\alpha}_m,$$

则称 $\boldsymbol{\beta}$ 可以被向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$ **线性表示**, 或称 $\boldsymbol{\beta}$ 是向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$ 的**线性组合**.

例.

(1) n 维零向量是任一 n 维向量组的线性组合.

定义. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}$ 为 n 维向量. 若存在一组数 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ 使得

$$\boldsymbol{\beta} = \lambda_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_m \boldsymbol{\alpha}_m,$$

则称 $\boldsymbol{\beta}$ 可以被向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$ **线性表示**, 或称 $\boldsymbol{\beta}$ 是向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$ 的**线性组合**.

例.

(1) n 维零向量是任一 n 维向量组的线性组合.

(2) 任意 n 维向量是 $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ 的线性组合.

定义. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}$ 为 n 维向量. 若存在一组数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ 使得

$$\boldsymbol{\beta} = \lambda_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_m \boldsymbol{\alpha}_m,$$

则称 $\boldsymbol{\beta}$ 可以被向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$ **线性表示**, 或称 $\boldsymbol{\beta}$ 是向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$ 的**线性组合**.

例.

(1) n 维零向量是任一 n 维向量组的线性组合.

(2) 任意 n 维向量是 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ 的线性组合.

(3) $v \in V$ 是它的一组基的线性组合.

向量组的线性组合

定义. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 为 n 维向量. 若存在一组数 $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ 使得

$$\boldsymbol{\beta}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m,$$

则称 $\boldsymbol{\beta}$ 可以被向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$ **线性表示**, 或称 $\boldsymbol{\beta}$ 是向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$ 的**线性组合**.

例.

(1) n 维零向量是任一 n 维向量组的线性组合.

(2) 任意 n 维向量是 $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ 的线性组合.

(3) $v\in V$ 是它的一组基的线性组合.

(4) 空间中两条不共线的向量的线性组合全体就是过二者的平面.

向量 β 能被向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示,

向量 β 能被向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，当且仅当存在 $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ 使得

$$\beta=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m)\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_m\end{pmatrix},$$

向量 β 能被向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示, 当且仅当存在 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ 使得

$$\boldsymbol{\beta} = \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m = (\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m)\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_m\end{pmatrix},$$

即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \beta$ 有解, 其中 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m)$.

线性表示的矩阵刻画

向量 β 能被向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示, 当且仅当存在 $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ 使得

$$\beta=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m)\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_m\end{pmatrix},$$

即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\beta$ 有解, 其中 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m)$.

定理. 向量 β 能被 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示, 当且仅当 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\beta$ 有解.

线性表示的空间刻画

设向量组 S 是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组.

设向量组 S 是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组. 记 V 为向量组 S 能线性表示的向量全体,

设向量组 S 是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组. 记 V 为向量组 S 能线性表示的向量全体, 则

$$V = \{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

是一个向量空间, 称为 S **生成的空间**.

设向量组 S 是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组. 记 V 为向量组 S 能线性表示的向量全体, 则

$$V = \{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

是一个向量空间, 称为 S **生成的空间**. 它是包含 S 中所有向量的最小的向量空间.

设向量组 S 是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组. 记 V 为向量组 S 能线性表示的向量全体, 则

$$V = \{\boldsymbol{Ax} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

是一个向量空间, 称为 S **生成的空间**. 它是包含 S 中所有向量的最小的向量空间.

这样, $\boldsymbol{\beta}$ 能被 S 线性表示 $\iff \boldsymbol{\beta} \in V$.

向量组等价及其矩阵、空间刻画

定义.

向量组等价及其矩阵、空间刻画

定义.

(1) 设有两个向量组 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m\}, T=\{\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_k\}$. 若 $\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_k$ 均可以被 S 线性表示，则称向量组 T 可以被向量组 S 线性表示.

定义.

(1) 设有两个向量组 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m\}, T=\{\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_k\}$. 若 $\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_k$ 均可以被 S 线性表示，则称向量组 T 可以被向量组 S 线性表示.

(2) 若向量组 S 和 T 能相互线性表示，则称 S,T **向量组等价**.

定义.

(1) 设有两个向量组 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m\}, T=\{\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_k\}$. 若 $\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_k$ 均可以被 S 线性表示，则称向量组 T 可以被向量组 S 线性表示.

(2) 若向量组 S 和 T 能相互线性表示，则称 S,T **向量组等价**.

设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m), \boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_k)$.

定义.

(1) 设有两个向量组 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m\},T=\{\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_k\}$. 若 $\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_k$ 均可以被 S 线性表示，则称向量组 T 可以被向量组 S 线性表示.

(2) 若向量组 S 和 T 能相互线性表示，则称 S,T **向量组等价**.

设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_k)$. T 能被 S 线性表示，当且仅当存在 $\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_k$ 使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{\beta}_1,\quad \dots,\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{\beta}_k,$$

定义.

(1) 设有两个向量组 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m\}, T=\{\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_k\}$. 若 $\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_k$ 均可以被 S 线性表示，则称向量组 T 可以被向量组 S 线性表示.

(2) 若向量组 S 和 T 能相互线性表示，则称 S,T **向量组等价**.

设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m), \boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_k)$. T 能被 S 线性表示，当且仅当存在 $\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_k$ 使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{\beta}_1,\quad \dots,\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{\beta}_k,$$

即存在矩阵 $\boldsymbol{X}$ 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$.

向量组等价及其矩阵、空间刻画

定义.

(1) 设有两个向量组 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m\}, T=\{\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_k\}$. 若 $\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_k$ 均可以被 S 线性表示，则称向量组 T 可以被向量组 S 线性表示.

(2) 若向量组 S 和 T 能相互线性表示，则称 S,T **向量组等价**.

设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m), \boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_k)$. T 能被 S 线性表示，当且仅当存在 $\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_k$ 使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{\beta}_1,\quad \dots,\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{\beta}_k,$$

即存在矩阵 $\boldsymbol{X}$ 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$.

定理. 设 S,T 分别为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的列向量组，且分别生成空间 V,W.

定义.

(1) 设有两个向量组 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m\}, T=\{\boldsymbol{\beta}_1,\ldots,\boldsymbol{\beta}_k\}$. 若 $\boldsymbol{\beta}_1,\ldots,\boldsymbol{\beta}_k$ 均可以被 S 线性表示，则称向量组 T 可以被向量组 S 线性表示.

(2) 若向量组 S 和 T 能相互线性表示，则称 S,T **向量组等价**.

设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m), \boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\ldots,\boldsymbol{\beta}_k)$. T 能被 S 线性表示，当且仅当存在 $\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_k$ 使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{\beta}_1, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{\beta}_k,$$

即存在矩阵 $\boldsymbol{X}$ 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$.

定理. 设 S,T 分别为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的列向量组，且分别生成空间 V,W.

(1) T 可以被 S 线性表示 $\iff W\subseteq V \iff \exists\boldsymbol{X}$ 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$.

定义.

(1) 设有两个向量组 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m\}, T=\{\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_k\}$. 若 $\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_k$ 均可以被 S 线性表示，则称向量组 T 可以被向量组 S 线性表示.

(2) 若向量组 S 和 T 能相互线性表示，则称 S,T **向量组等价**.

设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m), \boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_k)$. T 能被 S 线性表示，当且仅当存在 $\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_k$ 使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{\beta}_1,\quad \dots,\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{\beta}_k,$$

即存在矩阵 $\boldsymbol{X}$ 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$.

定理. 设 S,T 分别为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的列向量组，且分别生成空间 V,W.

(1) T 可以被 S 线性表示 $\iff W\subseteq V \iff \exists\boldsymbol{X}$ 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$.

(2) S,T 向量组等价 $\iff W=V \iff \exists\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}$.

向量组的等价的性质

命题. 向量组的等价满足如下性质:

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的列向量组为 S, T.

命题. 向量组的等价满足如下性质:

(1) 自反性: $S \sim S$;

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的列向量组为 S, T.

命题. 向量组的等价满足如下性质:

(1) 自反性: $S \sim S$;

(2) 对称性: $S \sim T \implies T \sim S$;

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的列向量组为 S, T.

命题. 向量组的等价满足如下性质:

(1) 自反性: $S \sim S$;

(2) 对称性: $S \sim T \implies T \sim S$;

(3) 传递性: $S \sim T, T \sim R \implies S \sim R$.

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的列向量组为 S, T.

命题. 向量组的等价满足如下性质:

(1) 自反性: $S \sim S$;

(2) 对称性: $S \sim T \implies T \sim S$;

(3) 传递性: $S \sim T, T \sim R \implies S \sim R$.

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的列向量组为 S, T. 若矩阵 $\boldsymbol{A} \overset{c}{\sim} \boldsymbol{B}$ 列等价, 则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{AQ}$,

命题. **向量组的等价满足如下性质:**

(1) **自反性:** $S \sim S$;

(2) **对称性:** $S \sim T \implies T \sim S$;

(3) **传递性:** $S \sim T, T \sim R \implies S \sim R$.

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的列向量组为 S, T. 若矩阵 $\boldsymbol{A} \overset{c}{\sim} \boldsymbol{B}$ 列等价, 则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$, 于是二者的列向量组作为向量组等价.

命题. 向量组的等价满足如下性质:

(1) 自反性: $S \sim S$;

(2) 对称性: $S \sim T \implies T \sim S$;

(3) 传递性: $S \sim T, T \sim R \implies S \sim R$.

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的列向量组为 S, T. 若矩阵 $\boldsymbol{A} \overset{c}{\sim} \boldsymbol{B}$ 列等价, 则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$, 于是二者的列向量组作为向量组等价. 反过来, 如果 S, T 大小相同, 则 $\boldsymbol{A} \overset{c}{\sim} \boldsymbol{B}$.

向量组的等价的性质

命题. 向量组的等价满足如下性质:

(1) 自反性: $S \sim S$;

(2) 对称性: $S \sim T \implies T \sim S$;

(3) 传递性: $S \sim T, T \sim R \implies S \sim R$.

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的列向量组为 S, T. 若矩阵 $\boldsymbol{A} \overset{c}{\sim} \boldsymbol{B}$ 列等价, 则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{AQ}$, 于是二者的列向量组作为向量组等价. 反过来, 如果 S, T 大小相同, 则 $\boldsymbol{A} \overset{c}{\sim} \boldsymbol{B}$. 若 S 向量个数比 T 的少, 则 $S \sim S \cup \{\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}\}$, 从而 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{O}) \overset{c}{\sim} \boldsymbol{B}$.

定义. 对于 n 维向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$，若存在一组不全为零的数 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ 使得

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0},$$

则称该向量组线性相关. 否则称该向量组线性无关.

线性相关与线性无关

定义. 对于 n 维向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$, 若存在一组不全为零的数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ 使得

$$\lambda_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_m \boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0},$$

则称该向量组线性相关. 否则称该向量组线性无关.

例.

定义. 对于 n 维向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$，若存在一组不全为零的数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ 使得

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0},$$

则称该向量组线性相关. 否则称该向量组线性无关.

例.

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,2,3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (2,3,4)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (0,0,0)^{\mathrm{T}}$ 线性相关. 包含零向量的向量组总是线性相关的.

定义. 对于 n 维向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$, 若存在一组**不全为零**的数 $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ 使得

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0},$$

则称该向量组**线性相关**. 否则称该向量组**线性无关**.

例.

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,4)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,0)^{\mathrm{T}}$ 线性相关. **包含零向量的向量组总是线性相关的.**

(2) $\boldsymbol{e}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{e}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{e}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$ 线性无关. 一般地, n **维基本向量组 $\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n$ 线性无关.**

定义. 对于 n 维向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$, 若存在一组不全为零的数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ 使得

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0},$$

则称该向量组线性相关. 否则称该向量组线性无关.

例.

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 2, 3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (2, 3, 4)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ 线性相关. 包含零向量的向量组总是线性相关的.

(2) $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$ 线性无关. 一般地, n 维基本向量组 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ 线性无关.

(3) $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关 $\iff$ $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$.

定义. 对于 n 维向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$, 若存在一组**不全为零**的数 $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ 使得

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0},$$

则称该向量组**线性相关**. 否则称该向量组**线性无关**.

例.

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,4)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,0)^{\mathrm{T}}$ 线性相关. **包含零向量的向量组总是线性相关的**.

(2) $\boldsymbol{e}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{e}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{e}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$ 线性无关. 一般地, n **维基本向量组** $\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n$ **线性无关**.

(3) $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关 $\iff$ $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

(4) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关 $\iff$ $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 对应分量成比例 (共线).

线性无关的等价刻画

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关

线性无关的等价刻画

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关当且仅当

$$\lambda_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_m \boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0} \implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0,$$

线性无关的等价刻画

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关当且仅当

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0} \implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0,$$

即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 只有零解, 其中 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)$.

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关当且仅当

$$\lambda_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_m \boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0} \implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0,$$

即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 只有零解, 其中 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)$. 因此:

定理. 设 V 是 $\boldsymbol{A}$ 列向量生成的空间, 则以下结论等价:

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关当且仅当

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0} \implies \lambda_1=\cdots=\lambda_m=0,$$

即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 只有零解, 其中 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$. 因此:

定理. 设 V 是 $\boldsymbol{A}$ 列向量生成的空间, 则以下结论等价:

- $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关;

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关当且仅当

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0} \implies \lambda_1=\cdots=\lambda_m=0,$$

即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 只有零解, 其中 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$. 因此:

定理. 设 V 是 $\boldsymbol{A}$ 列向量生成的空间, 则以下结论等价:

- $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关;
- $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 只有零解;

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关当且仅当

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0} \implies \lambda_1=\cdots=\lambda_m=0,$$

即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 只有零解, 其中 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$. 因此:

定理. 设 V 是 $\boldsymbol{A}$ 列向量生成的空间, 则以下结论等价:

- $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关;
- $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 只有零解;
- $\exists \boldsymbol{v}\in V$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{v}$ 只有唯一解;

线性无关的等价刻画

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关当且仅当

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0} \implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0,$$

即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 只有零解, 其中 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)$. 因此:

定理. 设 V 是 $\boldsymbol{A}$ 列向量生成的空间, 则以下结论等价:

- $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关;
- $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 只有零解;
- $\exists \boldsymbol{v} \in V$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}$ 只有唯一解;
- $\forall \boldsymbol{v} \in V$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}$ 只有唯一解.

练习. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 0 & 4\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}k\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$. 若 $\boldsymbol{A\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关，则 $k=$______.

练习. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}k\\1\\1\end{pmatrix}$. 若 $\boldsymbol{A\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关，则 $k=$ $\underline{\quad -1 \quad}$.

例：线性无关和线性相关

练习. 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. 若 $\boldsymbol{A\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关，则 $k =$ <u>-1</u>.

练习. 已知向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2\}$ 线性无关，请问向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1\}$ 是否线性无关？

例：线性无关和线性相关

练习. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}k\\1\\1\end{pmatrix}$. 若 $\boldsymbol{A\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关，则 $k=$ <u>-1</u>.

练习. 已知向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\}$ 线性无关，请问向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1\}$ 是否线性无关？

答案. 线性相关，因为 $(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)-2\boldsymbol{\alpha}_1=\mathbf{0}$.

例：判断线性无关

例. 已知向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\}$ 线性无关，证明向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1\}$ 线性无关.

例: 判断线性无关

例. 已知向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\}$ 线性无关, 证明向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_1\}$ 线性无关.

证明. 我们可以用定义来直接证明.

例：判断线性无关

例. 已知向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\}$ 线性无关，证明向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1\}$ 线性无关.

证明. 我们可以用定义来直接证明. 设

$$\lambda_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+\lambda_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+\lambda_3(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}.$$

例：判断线性无关

例. 已知向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\}$ 线性无关，证明向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1\}$ 线性无关.

证明. 我们可以用定义来直接证明. 设

$$\lambda_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+\lambda_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+\lambda_3(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}.$$

那么

$$(\lambda_1+\lambda_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(\lambda_1+\lambda_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(\lambda_2+\lambda_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}.$$

例. 已知向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\}$ 线性无关，证明向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_1\}$ 线性无关.

证明. 我们可以用定义来直接证明. 设

$$\lambda_1(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2) + \lambda_2(\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3) + \lambda_3(\boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_1) = \mathbf{0}.$$

那么

$$(\lambda_1 + \lambda_3)\boldsymbol{\alpha}_1 + (\lambda_1 + \lambda_2)\boldsymbol{\alpha}_2 + (\lambda_2 + \lambda_3)\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}.$$

由于 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\}$ 线性无关，因此

$$\lambda_1 + \lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_2 + \lambda_3 = 0,$$

例. 已知向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 线性无关，证明向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1\}$ 线性无关.

证明. 我们可以用定义来直接证明. 设

$$\lambda_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+\lambda_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+\lambda_3(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}.$$

那么

$$(\lambda_1+\lambda_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(\lambda_1+\lambda_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(\lambda_2+\lambda_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}.$$

由于 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 线性无关，因此

$$\lambda_1+\lambda_3=\lambda_1+\lambda_2=\lambda_2+\lambda_3=0,$$

解得 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$. 证毕. □

例：判断线性无关

我们来看另一种证法.

例：判断线性无关

我们来看另一种证法.

另证. 我们有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{A},$$

其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

我们来看另一种证法.

另证. 我们有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{A},$$

其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$. 若 $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 则

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\implies\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

我们来看另一种证法.

另证. 我们有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{A},$$

其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 若 $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 则

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \implies \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

由于 $|\boldsymbol{A}| = 2$, $\boldsymbol{A}$ 可逆, 因此 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. □

例：判断线性无关

命题.

例：判断线性无关

命题.

(1) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关, $(\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m)\boldsymbol{C}$. $\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_n$ 线性无关 $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 只有零解.

例：判断线性无关

命题.

(1) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关, $(\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m)\boldsymbol{C}$. $\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_n$ 线性无关 $\iff$ $\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 只有零解.

(2) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关, $(\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{C}$. $\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_n$ 线性无关 $\iff$ $|\boldsymbol{C}| \neq 0$.

命题.

(1) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，$(\boldsymbol{\beta}_1,\ldots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m)\boldsymbol{C}$. $\boldsymbol{\beta}_1,\ldots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性无关 $\iff$ $\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解.

(2) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，$(\boldsymbol{\beta}_1,\ldots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{C}$. $\boldsymbol{\beta}_1,\ldots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性无关 $\iff$ $|\boldsymbol{C}|\neq 0$.

(3) n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关 $\iff$ $|\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n|\neq 0$.

例. $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,2,3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (2,3,4)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (3,5,7)^{\mathrm{T}}$ 线性相关.

例：判断线性无关

例. $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,2,3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (2,3,4)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (3,5,7)^{\mathrm{T}}$ 线性相关. 因为它们构成的 3 阶矩阵行列式为零.

例：判断线性无关

例. $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,2,3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (2,3,4)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (3,5,7)^{\mathrm{T}}$ 线性相关. 因为它们构成的 3 阶矩阵行列式为零.

练习.

例：判断线性无关

例. $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,4)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(3,5,7)^{\mathrm{T}}$ 线性相关. 因为它们构成的 3 阶矩阵行列式为零.

练习.

(1) 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,t)^{\mathrm{T}}$ 线性相关, 则 $t=$______.

例. $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,4)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(3,5,7)^{\mathrm{T}}$ 线性相关. 因为它们构成的 3 阶矩阵行列式为零.

练习.

(1) 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,t)^{\mathrm{T}}$ 线性相关, 则 $t=$__5__.

例：判断线性无关

例. $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,4)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(3,5,7)^{\mathrm{T}}$ 线性相关. 因为它们构成的 3 阶矩阵行列式为零.

练习.

(1) 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,t)^{\mathrm{T}}$ 线性相关, 则 $t=$ ___5___.

(2) 若任一 3 维向量都可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(a,3,2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(2,-1,3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(3,2,1)^{\mathrm{T}}$ 线性表示, 则 $a\neq$ ______.

例. $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,2,3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (2,3,4)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (3,5,7)^{\mathrm{T}}$ 线性相关. 因为它们构成的 3 阶矩阵行列式为零.

练习.

(1) 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (1,2,3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (1,3,t)^{\mathrm{T}}$ 线性相关, 则 $t =$ ___5___.

(2) 若任一 3 维向量都可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (a,3,2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (2,-1,3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (3,2,1)^{\mathrm{T}}$ 线性表示, 则 $a \neq$ ___5___.

线性相关和线性无关的等价刻画

定理. 向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 线性相关 $\iff$ 其中至少有一个向量可以由其它向量线性表示.

定理. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关 $\Longleftrightarrow$ 其中至少有一个向量可以由其它向量线性表示.

证明. 若该向量组线性相关, 则存在不全为零的数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ 使得

$$\lambda_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_m \boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}.$$

定理. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关 $\iff$ 其中至少有一个向量可以由其它向量线性表示.

证明. 若该向量组线性相关, 则存在不全为零的数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ 使得

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}.$$

设 $\lambda_i \neq 0$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_i = -\dfrac{1}{\lambda_i}\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m}\lambda_j\boldsymbol{\alpha}_j$ 可由其它向量线性表示.

线性相关和线性无关的等价刻画

定理. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关 $\iff$ 其中至少有一个向量可以由其它向量线性表示.

证明. 若该向量组线性相关, 则存在不全为零的数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ 使得

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}.$$

设 $\lambda_i \neq 0$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_i = -\dfrac{1}{\lambda_i}\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}\lambda_j\boldsymbol{\alpha}_j$ 可由其它向量线性表示.

反之, 若 $\boldsymbol{\alpha}_i = \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}\lambda_j\boldsymbol{\alpha}_j$ 可由其它向量线性表示.

定理. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关 $\Longleftrightarrow$ 其中至少有一个向量可以由其它向量线性表示.

证明. 若该向量组线性相关, 则存在不全为零的数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ 使得

$$\lambda_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_m \boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}.$$

设 $\lambda_i \neq 0$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_i = -\dfrac{1}{\lambda_i} \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \lambda_j \boldsymbol{\alpha}_j$ 可由其它向量线性表示.

反之, 若 $\boldsymbol{\alpha}_i = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \lambda_j \boldsymbol{\alpha}_j$ 可由其它向量线性表示. 则 $-\boldsymbol{\alpha}_i + \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \lambda_j \boldsymbol{\alpha}_j = \mathbf{0}$, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关. □

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关 $\iff$ 其中任一向量不可以由其它向量线性表示.

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关 $\iff$ 其中任一向量不可以由其它向量线性表示.

注意, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关 $\not\Rightarrow$ 其中任一向量可以由其它向量线性表示.

线性相关和线性无关的等价刻画

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关 $\Longleftrightarrow$ 其中任一向量不可以由其它向量线性表示.

注意, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关 $\not\Rightarrow$ 其中任一向量可以由其它向量线性表示.

练习. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 是 m 个 n 维向量, 则下列结论正确的有______个.

线性相关和线性无关的等价刻画

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关 $\Longleftrightarrow$ 其中任一向量不可以由其它向量线性表示.

注意, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关 $\not\Rightarrow$ 其中任一向量可以由其它向量线性表示.

练习. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 是 m 个 n 维向量, 则下列结论正确的有______个.

线性相关和线性无关的等价刻画

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关 $\iff$ 其中任一向量不可以由其它向量线性表示.

注意, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关 $\not\Rightarrow$ 其中任一向量可以由其它向量线性表示.

练习. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 是 m 个 n 维向量, 则下列结论正确的有______个.

(1) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关, 则其中任一向量均可由其余向量线性表示

线性相关和线性无关的等价刻画

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关 $\iff$ 其中任一向量不可以由其它向量线性表示.

注意, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关 $\not\Rightarrow$ 其中任一向量可以由其它向量线性表示.

练习. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 是 m 个 n 维向量, 则下列结论正确的有______个.

(1) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关, 则其中任一向量均可由其余向量线性表示

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha}_m$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示, 则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关 $\Longleftrightarrow$ 其中任一向量不可以由其它向量线性表示.

注意, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关 $\not\Rightarrow$ 其中任一向量可以由其它向量线性表示.

练习. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 是 m 个 n 维向量, 则下列结论正确的有______个.

(1) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关, 则其中任一向量均可由其余向量线性表示

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha}_m$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示, 则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关

(3) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关, 且存在不全为零的 $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}$ 使得 $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_{m-1}\boldsymbol{\alpha}_{m-1} = \mathbf{0}$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_m$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示

线性相关和线性无关的等价刻画

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关 $\iff$ 其中任一向量不可以由其它向量线性表示.

注意, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关 $\not\Rightarrow$ 其中任一向量可以由其它向量线性表示.

练习. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 是 m 个 n 维向量, 则下列结论正确的有______个.

(1) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关, 则其中任一向量均可由其余向量线性表示

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha}_m$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示, 则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关

(3) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关, 且存在不全为零的 $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}$ 使得 $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_{m-1}\boldsymbol{\alpha}_{m-1} = \mathbf{0}$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_m$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示

(4) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关, 且 $\boldsymbol{\alpha}_m$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性相关

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关 $\Longleftrightarrow$ 其中任一向量不可以由其它向量线性表示.

注意, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关 $\not\Rightarrow$ 其中任一向量可以由其它向量线性表示.

练习. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 是 m 个 n 维向量, 则下列结论正确的有 <u>1</u> 个.

(1) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关, 则其中任一向量均可由其余向量线性表示

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha}_m$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示, 则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关

(3) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关, 且存在不全为零的 $\lambda_1,\ldots,\lambda_{m-1}$ 使得 $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_{m-1}\boldsymbol{\alpha}_{m-1}=\mathbf{0}$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_m$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示

(4) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关, 且 $\boldsymbol{\alpha}_m$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性相关

线性相关和线性无关的性质

定理. 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m, \beta$ 线性相关，则 β 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，且表达形式唯一.

线性相关和线性无关的性质

定理. 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，且表达形式唯一.

证明. 由于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}$ 线性相关，因此存在不全为零的数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, k$ 使得

$$\lambda_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_m \boldsymbol{\alpha}_m + k\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}.$$

定理. 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，且表达形式唯一.

证明. 由于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，因此存在不全为零的数 $\lambda_1,\ldots,\lambda_m,k$ 使得

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m+k\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}.$$

若 $k=0$，则由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关可知 $\lambda_1=\cdots=\lambda_k=0$.

定理. 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m, \beta$ 线性相关，则 β 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，且表达形式唯一.

证明. 由于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m, \beta$ 线性相关，因此存在不全为零的数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, k$ 使得

$$\lambda_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_m \boldsymbol{\alpha}_m + k\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}.$$

若 $k = 0$，则由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关可知 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$. 这与 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, k$ 不全为零矛盾.

定理. 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，且表达形式唯一.

证明. 由于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，因此存在不全为零的数 $\lambda_1,\dots,\lambda_m,k$ 使得

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m+k\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}.$$

若 $k=0$，则由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关可知 $\lambda_1=\cdots=\lambda_k=0$. 这与 $\lambda_1,\dots,\lambda_m,k$ 不全为零矛盾. 因此 $k\neq 0$,

$$\boldsymbol{\beta}=-\frac{1}{k}(\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m).$$

定理. 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m,\beta$ 线性相关，则 β 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，且表达形式唯一.

证明. 由于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，因此存在不全为零的数 $\lambda_1,\dots,\lambda_m,k$ 使得

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m+k\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}.$$

若 $k=0$，则由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关可知 $\lambda_1=\cdots=\lambda_k=0$. 这与 $\lambda_1,\dots,\lambda_m,k$ 不全为零矛盾. 因此 $k\neq 0$,

$$\beta=-\frac{1}{k}(\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m).$$

由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关可知线性组合表达方式唯一. □

定理. 设向量组 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m\}, T=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_{m+1},\dots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$.

定理. 设向量组 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m\}, T=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_{m+1},\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$.

(1) 若向量组 S 线性相关, 则 T 也线性相关.

线性相关和线性无关的性质

定理. 设向量组 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m\}, T=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_{m+1},\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$.

(1) 若向量组 S 线性相关, 则 T 也线性相关.

(2) 若向量组 T 线性无关, 则 S 也线性无关.

线性相关和线性无关的性质

定理. 设向量组 $S = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m\}, T = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_s\}$.

(1) 若向量组 S 线性相关，则 T 也线性相关.

(2) 若向量组 T 线性无关，则 S 也线性无关.

即部分相关 $\Longrightarrow$ 整体相关，整体无关 $\Longrightarrow$ 部分无关.

定理. 设向量组 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m\}, T=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_{m+1},\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$.

(1) 若向量组 S 线性相关，则 T 也线性相关.

(2) 若向量组 T 线性无关，则 S 也线性无关.

即部分相关 $\Longrightarrow$ 整体相关，整体无关 $\Longrightarrow$ 部分无关.

例. n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s(3\leqslant s\leqslant n)$ 线性无关 $\Longleftrightarrow$ (　　).

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中存在一个向量不能由其余向量线性表示

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任两个向量都线性无关

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中不含零向量

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任一个向量都不能由其余向量线性表示

定理. 设向量组 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m\}, T=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_{m+1},\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$.

(1) 若向量组 S 线性相关，则 T 也线性相关.

(2) 若向量组 T 线性无关，则 S 也线性无关.

即部分相关 $\Longrightarrow$ 整体相关，整体无关 $\Longrightarrow$ 部分无关.

例. n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s(3\leqslant s\leqslant n)$ 线性无关 $\Longleftrightarrow$ (D).

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中存在一个向量不能由其余向量线性表示 **必要**

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任两个向量都线性无关 **必要**

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中不含零向量 **必要**

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任一个向量都不能由其余向量线性表示

练习. 若向量组 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\delta}$ 线性相关，则(　　).

(A) $\boldsymbol{\alpha}$ 一定能由 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}$ 线性表示

(B) $\boldsymbol{\beta}$ 一定不能由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}$ 线性表示

(C) $\boldsymbol{\delta}$ 一定能由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性表示

(D) $\boldsymbol{\delta}$ 一定不能由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性表示

例：线性相关和线性无关

练习. 若向量组 α, β, γ 线性无关，α, β, δ 线性相关，则(C).

(A) α 一定能由 β, γ, δ 线性表示

(B) β 一定不能由 α, γ, δ 线性表示

(C) δ 一定能由 α, β, γ 线性表示

(D) δ 一定不能由 α, β, γ 线性表示

练习. 若向量组 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性无关, $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\delta}$ 线性相关, 则(C).

(A) $\boldsymbol{\alpha}$ 一定能由 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}$ 线性表示

(B) $\boldsymbol{\beta}$ 一定不能由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}$ 线性表示

(C) $\boldsymbol{\delta}$ 一定能由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性表示

(D) $\boldsymbol{\delta}$ 一定不能由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性表示

例. 设向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示, 但不能由向量组 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}\}$ 线性表示. 记 $T=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1},\boldsymbol{\beta}\}$, 则(　　).

(A) $\boldsymbol{\alpha}_m$ 不能由 S 线性表示, 也不能由 T 线性表示

(B) $\boldsymbol{\alpha}_m$ 不能由 S 线性表示, 但能由 T 线性表示

(C) $\boldsymbol{\alpha}_m$ 能由 S 线性表示, 也能由 T 线性表示

(D) $\boldsymbol{\alpha}_m$ 能由 S 线性表示, 但不能由 T 线性表示

例：线性相关和线性无关

练习. 若向量组 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\delta}$ 线性相关，则(C).

(A) $\boldsymbol{\alpha}$ 一定能由 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}$ 线性表示

(B) $\boldsymbol{\beta}$ 一定不能由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}$ 线性表示

(C) $\boldsymbol{\delta}$ 一定能由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性表示

(D) $\boldsymbol{\delta}$ 一定不能由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性表示

例. 设向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，但不能由向量组 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}\}$ 线性表示. 记 $T=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1},\boldsymbol{\beta}\}$，则(B). $\beta=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m,\lambda_m\neq 0$

(A) $\boldsymbol{\alpha}_m$ 不能由 S 线性表示，也不能由 T 线性表示

(B) $\boldsymbol{\alpha}_m$ 不能由 S 线性表示，但能由 T 线性表示

(C) $\boldsymbol{\alpha}_m$ 能由 S 线性表示，也能由 T 线性表示

(D) $\boldsymbol{\alpha}_m$ 能由 S 线性表示，但不能由 T 线性表示

例. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，$\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，证明

例. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，证明

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示；

例：线性相关和线性无关

例. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，$\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，证明

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示；

(2) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

例：线性相关和线性无关

例. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，$\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，证明

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示；

(2) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

证明.

例. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，$\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，证明

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示;

(2) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

证明.

(1) 由 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关可知 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

例. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，$\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，证明

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示;

(2) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

证明.

(1) 由 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关可知 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.但是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

例. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，$\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，证明

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示；

(2) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

证明.

(1) 由 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关可知 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.但是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，由于 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，于是 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 也能由 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

例. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，证明

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示；

(2) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

证明.

(1) 由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关可知 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.但是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，由于 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，于是 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 也能由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示. 这与 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关矛盾. □

定理. 设 $\boldsymbol{\alpha}_j = (a_{1j}, \ldots, a_{nj})^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_j = (a_{1j}, \ldots, a_{nj}, a_{n+1,j})^{\mathrm{T}}$.

定理. 设 $\boldsymbol{\alpha}_j = (a_{1j}, \dots, a_{nj})^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_j = (a_{1j}, \dots, a_{nj}, a_{n+1,j})^{\mathrm{T}}$.

(1) 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{\beta}_1, \dots, \boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关.

定理. 设 $\boldsymbol{\alpha}_j = (a_{1j}, \ldots, a_{nj})^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_j = (a_{1j}, \ldots, a_{nj}, a_{n+1,j})^{\mathrm{T}}$.

(1) 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，则 $\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关.

(2) 若向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_m$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关.

定理. 设 $\boldsymbol{\alpha}_j = (a_{1j}, \dots, a_{nj})^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_j = (a_{1j}, \dots, a_{nj}, a_{n+1,j})^{\mathrm{T}}$.

(1) 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{\beta}_1, \dots, \boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关.

(2) 若向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \dots, \boldsymbol{\beta}_m$ 线性相关, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关.

证明. 设 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_m), \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\beta}_1, \dots, \boldsymbol{\beta}_m)$, 则存在 m 维向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 使得 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$.

定理. 设 $\boldsymbol{\alpha}_j = (a_{1j}, \dots, a_{nj})^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_j = (a_{1j}, \dots, a_{nj}, a_{n+1,j})^{\mathrm{T}}$.

(1) 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{\beta}_1, \dots, \boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关.

(2) 若向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \dots, \boldsymbol{\beta}_m$ 线性相关, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关.

证明. 设 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_m), \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\beta}_1, \dots, \boldsymbol{\beta}_m)$, 则存在 m 维向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 使得 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$. 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 只有零解.

定理. 设 $\boldsymbol{\alpha}_j=(a_{1j},\dots,a_{nj})^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_j=(a_{1j},\dots,a_{nj},a_{n+1,j})^{\mathrm{T}}$.

(1) 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关.

(2) 若向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性相关, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关.

证明. 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_m)$, 则存在 m 维向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 使得 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$. 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解. 而

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\iff\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0,$$

因此 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解, $\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关. □

定理. 设 $\boldsymbol{\alpha}_j=(a_{1j},\dots,a_{nj})^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_j=(a_{1j},\dots,a_{nj},a_{n+1,j})^{\mathrm{T}}$.

(1) 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关.

(2) 若向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性相关, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关.

证明. 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m), \boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_m)$, 则存在 m 维向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 使得 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$. 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解. 而

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \iff \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0,$$

因此 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解, $\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关. $\square$

即**高维相关** $\Longrightarrow$ **低维相关, 低维无关** $\Longrightarrow$ **高维无关**.

例：线性相关和线性无关

练习.

练习.

(1) 判断下列向量组的线性相关性：

(i) $(1,2,3,4)^{\mathrm{T}},(2,3,4,5)^{\mathrm{T}},(0,0,0,0)^{\mathrm{T}}.$

(ii) $(a,b,1,0,0)^{\mathrm{T}},(c,d,0,6,0)^{\mathrm{T}},(a,c,0,5,6)^{\mathrm{T}}.$

(iii) $(a,1,0,b,0)^{\mathrm{T}},(c,0,6,d,0)^{\mathrm{T}},(a,0,5,c,6)^{\mathrm{T}}.$

练习.

(1) 判断下列向量组的线性相关性:

(i) $(1,2,3,4)^{\mathrm{T}},(2,3,4,5)^{\mathrm{T}},(0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$. 相关

(ii) $(a,b,1,0,0)^{\mathrm{T}},(c,d,0,6,0)^{\mathrm{T}},(a,c,0,5,6)^{\mathrm{T}}$.

(iii) $(a,1,0,b,0)^{\mathrm{T}},(c,0,6,d,0)^{\mathrm{T}},(a,0,5,c,6)^{\mathrm{T}}$.

练习.

(1) 判断下列向量组的线性相关性:

(i) $(1,2,3,4)^{\mathrm{T}},(2,3,4,5)^{\mathrm{T}},(0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$. 相关

(ii) $(a,b,1,0,0)^{\mathrm{T}},(c,d,0,6,0)^{\mathrm{T}},(a,c,0,5,6)^{\mathrm{T}}$. 无关

(iii) $(a,1,0,b,0)^{\mathrm{T}},(c,0,6,d,0)^{\mathrm{T}},(a,0,5,c,6)^{\mathrm{T}}$.

练习.

(1) 判断下列向量组的线性相关性：

(i) $(1,2,3,4)^{\mathrm{T}},(2,3,4,5)^{\mathrm{T}},(0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$. 相关

(ii) $(a,b,1,0,0)^{\mathrm{T}},(c,d,0,6,0)^{\mathrm{T}},(a,c,0,5,6)^{\mathrm{T}}$. 无关

(iii) $(a,1,0,b,0)^{\mathrm{T}},(c,0,6,d,0)^{\mathrm{T}},(a,0,5,c,6)^{\mathrm{T}}$. 无关

练习.

(1) 判断下列向量组的线性相关性:

(i) $(1,2,3,4)^{\mathrm{T}},(2,3,4,5)^{\mathrm{T}},(0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$. 相关

(ii) $(a,b,1,0,0)^{\mathrm{T}},(c,d,0,6,0)^{\mathrm{T}},(a,c,0,5,6)^{\mathrm{T}}$. 无关

(iii) $(a,1,0,b,0)^{\mathrm{T}},(c,0,6,d,0)^{\mathrm{T}},(a,0,5,c,6)^{\mathrm{T}}$. 无关

(2) 若 $(1,0,0,2)^{\mathrm{T}},(0,1,5,0)^{\mathrm{T}},(2,1,t+2,4)^{\mathrm{T}}$ 线性相关, 则 $t=$______.

练习.

(1) 判断下列向量组的线性相关性:

(i) $(1,2,3,4)^{\mathrm{T}},(2,3,4,5)^{\mathrm{T}},(0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$. 相关

(ii) $(a,b,1,0,0)^{\mathrm{T}},(c,d,0,6,0)^{\mathrm{T}},(a,c,0,5,6)^{\mathrm{T}}$. 无关

(iii) $(a,1,0,b,0)^{\mathrm{T}},(c,0,6,d,0)^{\mathrm{T}},(a,0,5,c,6)^{\mathrm{T}}$. 无关

(2) 若 $(1,0,0,2)^{\mathrm{T}},(0,1,5,0)^{\mathrm{T}},(2,1,t+2,4)^{\mathrm{T}}$ 线性相关, 则 $t=$ ___3___.

向量组大小与线性无关的关系

定理. 设向量组 $S = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_s\}$ 可由 $T = \{\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_t\}$ 线性表示.

(1) 若 $s > t$, 则 S 线性相关.

(2) 若 S 线性无关, 则 $s \leqslant t$.

定理. 设向量组 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$ 可由 $T=\{\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_t\}$ 线性表示.

(1) 若 $s>t$, 则 S 线性相关. (2) 若 S 线性无关, 则 $s\leqslant t$.

即多的由少的表示，多的一定线性相关.

定理. 设向量组 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$ 可由 $T=\{\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_t\}$ 线性表示.

(1) 若 $s>t$, 则 S 线性相关.

(2) 若 S 线性无关, 则 $s\leqslant t$.

即多的由少的表示, 多的一定线性相关.

证明. 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_s),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_t)$. 则存在矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}$.

向量组大小与线性无关的关系

定理. 设向量组 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$ 可由 $T=\{\boldsymbol{\beta}_1,\ldots,\boldsymbol{\beta}_t\}$ 线性表示.

(1) 若 $s>t$, 则 S 线性相关.

(2) 若 S 线性无关, 则 $s\leqslant t$.

即多的由少的表示, 多的一定线性相关.

证明. 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\ldots,\boldsymbol{\beta}_t)$. 则存在矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}$. 由于 $\boldsymbol{P}$ 行数小于列数, 因此 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解 $\boldsymbol{x}$.

向量组大小与线性无关的关系

定理. 设向量组 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$ 可由 $T=\{\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_t\}$ 线性表示.

(1) 若 $s>t$, 则 S 线性相关.

(2) 若 S 线性无关, 则 $s\leqslant t$.

即多的由少的表示, 多的一定线性相关.

证明. 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_s),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_t)$. 则存在矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}$. 由于 $\boldsymbol{P}$ 行数小于列数, 因此 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解 $\boldsymbol{x}$. 从而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, S 线性相关. □

定理. 设向量组 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$ 可由 $T=\{\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_t\}$ 线性表示.

(1) 若 $s>t$, 则 S 线性相关.

(2) 若 S 线性无关, 则 $s\leqslant t$.

即多的由少的表示, 多的一定线性相关.

证明. 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_s), \boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_t)$. 则存在矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}$. 由于 $\boldsymbol{P}$ 行数小于列数, 因此 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解 $\boldsymbol{x}$. 从而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, S 线性相关. □

推论.

定理. 设向量组 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$ 可由 $T=\{\boldsymbol{\beta}_1,\ldots,\boldsymbol{\beta}_t\}$ 线性表示.

(1) 若 $s>t$, 则 S 线性相关.

(2) 若 S 线性无关, 则 $s\leqslant t$.

即**多的由少的表示, 多的一定线性相关**.

证明. 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\ldots,\boldsymbol{\beta}_t)$. 则存在矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}$. 由于 $\boldsymbol{P}$ 行数小于列数, 因此 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解 $\boldsymbol{x}$. 从而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, S 线性相关. □

推论.

(1) $m>n$ 个 n 维向量一定线性相关.

向量组大小与线性无关的关系

定理. 设向量组 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$ 可由 $T=\{\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_t\}$ 线性表示.

(1) 若 $s>t$, 则 S 线性相关.

(2) 若 S 线性无关, 则 $s\leqslant t$.

即多的由少的表示, 多的一定线性相关.

证明. 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_s),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_t)$. 则存在矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}$. 由于 $\boldsymbol{P}$ 行数小于列数, 因此 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解 $\boldsymbol{x}$. 从而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, S 线性相关. □

推论.

(1) $m>n$ 个 n 维向量一定线性相关.

(2) 任意两个等价的线性无关向量组所含向量的个数相同.

推论和总结

(1) 向量组线性相关 $\Longleftrightarrow$ 其中至少有一个向量可以由其它向量线性表示.

(1) 向量组线性相关 $\iff$ 其中至少有一个向量可以由其它向量线性表示.

(2) 若 S 线性无关, $S \cup \{\beta\}$ 线性相关, 则 β 可以由 S 唯一线性表示.

推论和总结

(1) 向量组线性相关 $\iff$ 其中至少有一个向量可以由其它向量线性表示.

(2) 若 S 线性无关, $S \cup \{\beta\}$ 线性相关, 则 β 可以由 S 唯一线性表示.

(3) 整体无关 $\Longrightarrow$ 部分无关.

(1) 向量组线性相关 $\Longleftrightarrow$ 其中至少有一个向量可以由其它向量线性表示.

(2) 若 S 线性无关, $S \cup \{\beta\}$ 线性相关, 则 β 可以由 S 唯一线性表示.

(3) 整体无关 $\Longrightarrow$ 部分无关.

(4) 低维无关 $\Longrightarrow$ 高维无关.

推论和总结

(1) 向量组线性相关 $\Longleftrightarrow$ 其中至少有一个向量可以由其它向量线性表示.

(2) 若 S 线性无关, $S \cup \{\beta\}$ 线性相关, 则 β 可以由 S 唯一线性表示.

(3) 整体无关 $\Longrightarrow$ 部分无关.

(4) 低维无关 $\Longrightarrow$ 高维无关.

(5) 多的由少的表示, 多的一定线性相关.

维数和秩

定义.

定义.

(1) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 是向量空间 V 的一组基，则称 m 为 V 的**维数**，记作 $\dim V$.

维数和秩

定义.

(1) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 是向量空间 V 的一组基，则称 m 为 V 的**维数**，记作 $\dim V$.

(2) 设向量组 S 生成空间 V. 称 V 的维数为该向量组的**秩(Rank)**，记作 $\mathrm{R}(S)$.

定义.

(1) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 是向量空间 V 的一组基，则称 m 为 V 的**维数**，记作 $\dim V$.

(2) 设向量组 S 生成空间 V. 称 V 的维数为该向量组的**秩(Rank)**，记作 $\mathrm{R}(S)$.

由前面的结论可知，V 不同的基向量组的个数总是相同的，即维数是唯一的.

定义.

(1) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 是向量空间 V 的一组基，则称 m 为 V 的**维数**，记作 $\dim V$.

(2) 设向量组 S 生成空间 V. 称 V 的维数为该向量组的**秩(Rank)**，记作 $\mathrm{R}(S)$.

由前面的结论可知，V 不同的基向量组的个数总是相同的，即维数是唯一的.

设 $S = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$ 生成 V,

定义.

(1) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 是向量空间 V 的一组基, 则称 m 为 V 的**维数**, 记作 $\dim V$.

(2) 设向量组 S 生成空间 V. 称 V 的维数为该向量组的**秩(Rank)**, 记作 $\mathrm{R}(S)$.

由前面的结论可知, V 不同的基向量组的个数总是相同的, 即维数是唯一的.

设 $S = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$ 生成 V, T 是 V 的一组基.

定义.

(1) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 是向量空间 V 的一组基, 则称 m 为 V 的**维数**, 记作 $\dim V$.

(2) 设向量组 S 生成空间 V. 称 V 的维数为该向量组的**秩(Rank)**, 记作 $\mathrm{R}(S)$.

由前面的结论可知, V 不同的基向量组的个数总是相同的, 即维数是唯一的.

设 $S = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$ 生成 V, T 是 V 的一组基. 由于向量组等价 $\iff$ 生成同一个空间, 因此 S, T 是等价向量组.

定义.

(1) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 是向量空间 V 的一组基, 则称 m 为 V 的**维数**, 记作 $\dim V$.

(2) 设向量组 S 生成空间 V. 称 V 的维数为该向量组的**秩(Rank)**, 记作 $\mathrm{R}(S)$.

由前面的结论可知, V 不同的基向量组的个数总是相同的, 即维数是唯一的.

设 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$ 生成 V, T 是 V 的一组基. 由于向量组等价 $\iff$ 生成同一个空间, 因此 S,T 是等价向量组. 由 T 线性无关可知 $\mathrm{R}(S)\leqslant m$.

定义.

(1) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 是向量空间 V 的一组基, 则称 m 为 V 的**维数**, 记作 $\dim V$.

(2) 设向量组 S 生成空间 V. 称 V 的维数为该向量组的**秩(Rank)**, 记作 $\mathrm{R}(S)$.

由前面的结论可知, V 不同的基向量组的个数总是相同的, 即维数是唯一的.

设 $S = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$ 生成 V, T 是 V 的一组基. 由于向量组等价 $\iff$ 生成同一个空间, 因此 S, T 是等价向量组. 由 T 线性无关可知 $\mathrm{R}(S) \leqslant m$.

定理. 设 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m)$ 的列向量组为 S.

定义.

(1) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 是向量空间 V 的一组基, 则称 m 为 V 的**维数**, 记作 $\dim V$.

(2) 设向量组 S 生成空间 V. 称 V 的维数为该向量组的**秩(Rank)**, 记作 $\mathrm{R}(S)$.

由前面的结论可知, V 不同的基向量组的个数总是相同的, 即维数是唯一的.

设 $S = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$ 生成 V, T 是 V 的一组基. 由于向量组等价 $\iff$ 生成同一个空间, 因此 S, T 是等价向量组. 由 T 线性无关可知 $\mathrm{R}(S) \leqslant m$.

定理. 设 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m)$ 的列向量组为 S.

(1) S 线性无关 $\iff$ $\mathrm{R}(S) = m$ $\iff$ $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 只有零解.

定义.

(1) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 是向量空间 V 的一组基, 则称 m 为 V 的**维数**, 记作 $\dim V$.

(2) 设向量组 S 生成空间 V. 称 V 的维数为该向量组的**秩**(Rank), 记作 $\mathrm{R}(S)$.

由前面的结论可知, V 不同的基向量组的个数总是相同的, 即维数是唯一的.

设 $S = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$ 生成 V, T 是 V 的一组基. 由于向量组等价 $\iff$ 生成同一个空间, 因此 S, T 是等价向量组. 由 T 线性无关可知 $\mathrm{R}(S) \leqslant m$.

定理. 设 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m)$ 的列向量组为 S.

(1) S 线性无关 $\iff$ $\mathrm{R}(S) = m$ $\iff$ $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 只有零解.

(2) S 线性相关 $\iff$ $\mathrm{R}(S) < m$ $\iff$ $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 有非零解.

例：方阵的列向量组

推论. 设方阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n)$ 的列向量组为 S.

例：方阵的列向量组

推论. 设方阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 的列向量组为 S.

(1) S 线性无关 $\iff \mathrm{R}(S)=n \iff \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解 $\iff |\boldsymbol{A}|\neq 0$.

例：方阵的列向量组

推论. 设方阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 的列向量组为 S.

(1) S 线性无关 $\iff \mathrm{R}(S)=n \iff \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解 $\iff |\boldsymbol{A}|\neq 0$.

(2) S 线性相关 $\iff \mathrm{R}(S)<n \iff \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解 $\iff |\boldsymbol{A}|=0$.

例：方阵的列向量组

推论. 设方阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 的列向量组为 S.

(1) S 线性无关 $\iff \mathrm{R}(S)=n \iff \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解 $\iff |\boldsymbol{A}|\neq 0$.

(2) S 线性相关 $\iff \mathrm{R}(S)<n \iff \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解 $\iff |\boldsymbol{A}|=0$.

练习. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，且其行列式 $|\boldsymbol{A}|=0$. 下列说法正确的是(　　).

(A) $\boldsymbol{A}$ 必有一列元素全为零

(B) $\boldsymbol{A}$ 必有两列元素对应成比例

(C) $\boldsymbol{A}$ 必有一个列向量可由其余列向量线性表示

(D) $\boldsymbol{A}$ 中任意列向量均可由其余列向量线性表示

例：方阵的列向量组

推论. 设方阵 $A = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ 的列向量组为 S.

(1) S 线性无关 $\iff \mathrm{R}(S) = n \iff Ax = 0$ 只有零解 $\iff |A| \neq 0$.

(2) S 线性相关 $\iff \mathrm{R}(S) < n \iff Ax = 0$ 有非零解 $\iff |A| = 0$.

练习. 设 A 是 n 阶方阵，且其行列式 $|A| = 0$. 下列说法正确的是(C).

(A) A 必有一列元素全为零

(B) A 必有两列元素对应成比例

(C) A 必有一个列向量可由其余列向量线性表示

(D) A 中任意列向量均可由其余列向量线性表示

维数和秩

定理.

定理.

(1) 设向量组 S 可由向量组 T 线性表示, 则 $\mathrm{R}(S) \leqslant \mathrm{R}(T)$.

定理.

(1) 设向量组 S 可由向量组 T 线性表示, 则 $\mathrm{R}(S) \leqslant \mathrm{R}(T)$.

(2) 若向量空间 $V \subseteq W$, 则 $\dim V \leqslant \dim W$.

维数和秩

定理.

(1) 设向量组 S 可由向量组 T 线性表示，则 $\mathrm{R}(S) \leqslant \mathrm{R}(T)$.

(2) 若向量空间 $V \subseteq W$，则 $\dim V \leqslant \dim W$.

(3) 设向量组 S 可由向量组 T 线性表示，且 $\mathrm{R}(S) = \mathrm{R}(T)$，则 S, T 向量组等价.

定理.

(1) 设向量组 S 可由向量组 T 线性表示，则 $\mathrm{R}(S) \leqslant \mathrm{R}(T)$.

(2) 若向量空间 $V \subseteq W$，则 $\dim V \leqslant \dim W$.

(3) 设向量组 S 可由向量组 T 线性表示，且 $\mathrm{R}(S) = \mathrm{R}(T)$，则 S, T 向量组等价.

(4) 若向量空间 $V \subseteq W$ 且 $\dim V = \dim W$，则 $V = W$.

定理.

(1) 设向量组 S 可由向量组 T 线性表示，则 $\mathrm{R}(S) \leqslant \mathrm{R}(T)$.

(2) 若向量空间 $V \subseteq W$，则 $\dim V \leqslant \dim W$.

(3) 设向量组 S 可由向量组 T 线性表示，且 $\mathrm{R}(S) = \mathrm{R}(T)$，则 S, T 向量组等价.

(4) 若向量空间 $V \subseteq W$ 且 $\dim V = \dim W$，则 $V = W$.

我们来证明(4).

定理.

(1) 设向量组 S 可由向量组 T 线性表示, 则 $\mathrm{R}(S) \leqslant \mathrm{R}(T)$.

(2) 若向量空间 $V \subseteq W$, 则 $\dim V \leqslant \dim W$.

(3) 设向量组 S 可由向量组 T 线性表示, 且 $\mathrm{R}(S) = \mathrm{R}(T)$, 则 S, T 向量组等价.

(4) 若向量空间 $V \subseteq W$ 且 $\dim V = \dim W$, 则 $V = W$.

我们来证明(4). 设 S, T 是 V, W 的一组基.

定理.

(1) 设向量组 S 可由向量组 T 线性表示，则 $\mathrm{R}(S) \leqslant \mathrm{R}(T)$.

(2) 若向量空间 $V \subseteq W$，则 $\dim V \leqslant \dim W$.

(3) 设向量组 S 可由向量组 T 线性表示，且 $\mathrm{R}(S) = \mathrm{R}(T)$，则 S, T 向量组等价.

(4) 若向量空间 $V \subseteq W$ 且 $\dim V = \dim W$，则 $V = W$.

我们来证明(4). 设 S, T 是 V, W 的一组基. 那么 S, T 大小相同, 且 S 可由 T 线性表示.

定理.

(1) 设向量组 S 可由向量组 T 线性表示, 则 $\mathrm{R}(S) \leqslant \mathrm{R}(T)$.

(2) 若向量空间 $V \subseteq W$, 则 $\dim V \leqslant \dim W$.

(3) 设向量组 S 可由向量组 T 线性表示, 且 $\mathrm{R}(S) = \mathrm{R}(T)$, 则 S, T 向量组等价.

(4) 若向量空间 $V \subseteq W$ 且 $\dim V = \dim W$, 则 $V = W$.

我们来证明(4). 设 S, T 是 V, W 的一组基. 那么 S, T 大小相同, 且 S 可由 T 线性表示. 设 S, T 分别是 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的列向量组,

定理.

(1) **设向量组 S 可由向量组 T 线性表示, 则 $\mathrm{R}(S) \leqslant \mathrm{R}(T)$.**

(2) **若向量空间 $V \subseteq W$, 则 $\dim V \leqslant \dim W$.**

(3) **设向量组 S 可由向量组 T 线性表示, 且 $\mathrm{R}(S) = \mathrm{R}(T)$, 则 S, T 向量组等价.**

(4) **若向量空间 $V \subseteq W$ 且 $\dim V = \dim W$, 则 $V = W$.**

我们来证明(4). 设 S, T 是 V, W 的一组基. 那么 S, T 大小相同, 且 S 可由 T 线性表示. 设 S, T 分别是 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的列向量组, 那么存在方阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{P}$.

定理.

(1) 设向量组 S 可由向量组 T 线性表示，则 $\mathrm{R}(S) \leqslant \mathrm{R}(T)$.

(2) 若向量空间 $V \subseteq W$，则 $\dim V \leqslant \dim W$.

(3) 设向量组 S 可由向量组 T 线性表示，且 $\mathrm{R}(S) = \mathrm{R}(T)$，则 S, T 向量组等价.

(4) 若向量空间 $V \subseteq W$ 且 $\dim V = \dim W$，则 $V = W$.

我们来证明(4). 设 S, T 是 V, W 的一组基. 那么 S, T 大小相同, 且 S 可由 T 线性表示. 设 S, T 分别是 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的列向量组, 那么存在方阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{P}$. 若 $\boldsymbol{P}$ 不可逆, 存在非零向量 $\boldsymbol{x}$ 使得 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

定理.

(1) 设向量组 S 可由向量组 T 线性表示, 则 $\mathrm{R}(S) \leqslant \mathrm{R}(T)$.

(2) 若向量空间 $V \subseteq W$, 则 $\dim V \leqslant \dim W$.

(3) 设向量组 S 可由向量组 T 线性表示, 且 $\mathrm{R}(S) = \mathrm{R}(T)$, 则 S, T 向量组等价.

(4) 若向量空间 $V \subseteq W$ 且 $\dim V = \dim W$, 则 $V = W$.

我们来证明(4). 设 S, T 是 V, W 的一组基. 那么 S, T 大小相同, 且 S 可由 T 线性表示. 设 S, T 分别是 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的列向量组, 那么存在方阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{P}$. 若 $\boldsymbol{P}$ 不可逆, 存在非零向量 $\boldsymbol{x}$ 使得 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. 于是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, S 线性相关, 矛盾!

例. 若

$$S_1 = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\}, \quad S_2 = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4\}, \quad S_3 = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_5\}$$

满足 $\mathrm{R}(S_1) = \mathrm{R}(S_2) = 3, \mathrm{R}(S_3) = 4$. 证明向量组 $S = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_5 - \boldsymbol{\alpha}_4\}$ 线性无关.

例：向量组的秩

例. 若

$$S_1 = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\}, \quad S_2 = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4\}, \quad S_3 = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_5\}$$

满足 $\mathrm{R}(S_1) = \mathrm{R}(S_2) = 3, \mathrm{R}(S_3) = 4$. 证明向量组 $S = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_5 - \boldsymbol{\alpha}_4\}$ 线性无关.

证明. 由 $\mathrm{R}(S_1) = 3$ 可知 S_1 线性无关.

例. 若

$$S_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\},\quad S_2=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\},\quad S_3=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5\}$$

满足 $\mathrm{R}(S_1)=\mathrm{R}(S_2)=3, \mathrm{R}(S_3)=4$. 证明向量组 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4\}$ 线性无关.

证明. 由 $\mathrm{R}(S_1)=3$ 可知 S_1 线性无关. 由 $\mathrm{R}(S_2)=3$ 可知 S_2 线性相关.

例. 若

$$S_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\},\quad S_2=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\},\quad S_3=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5\}$$

满足 $\mathrm{R}(S_1)=\mathrm{R}(S_2)=3,\mathrm{R}(S_3)=4$. 证明向量组 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4\}$ 线性无关.

证明. 由 $\mathrm{R}(S_1)=3$ 可知 S_1 线性无关. 由 $\mathrm{R}(S_2)=3$ 可知 S_2 线性相关. 从而 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 S_1 线性表示.

例. 若

$$S_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\},\quad S_2=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\},\quad S_3=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5\}$$

满足 $\mathrm{R}(S_1)=\mathrm{R}(S_2)=3,\mathrm{R}(S_3)=4$. 证明向量组 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4\}$ 线性无关.

证明. 由 $\mathrm{R}(S_1)=3$ 可知 S_1 线性无关. 由 $\mathrm{R}(S_2)=3$ 可知 S_2 线性相关. 从而 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 S_1 线性表示. 于是 S_3 可由 S 线性表示.

例：向量组的秩

例. 若

$$S_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\},\quad S_2=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\},\quad S_3=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5\}$$

满足 $\mathrm{R}(S_1)=\mathrm{R}(S_2)=3,\mathrm{R}(S_3)=4$. 证明向量组 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4\}$ 线性无关.

证明. 由 $\mathrm{R}(S_1)=3$ 可知 S_1 线性无关. 由 $\mathrm{R}(S_2)=3$ 可知 S_2 线性相关. 从而 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 S_1 线性表示. 于是 S_3 可由 S 线性表示. 显然 S 可由 S_3 线性表示, 因此二者等价, $\mathrm{R}(S)=\mathrm{R}(S_3)=4$. □

例. 若

$$S_1 = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\}, \quad S_2 = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4\}, \quad S_3 = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_5\}$$

满足 $\mathrm{R}(S_1) = \mathrm{R}(S_2) = 3, \mathrm{R}(S_3) = 4$. 证明向量组 $S = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_5 - \boldsymbol{\alpha}_4\}$ 线性无关.

证明. 由 $\mathrm{R}(S_1) = 3$ 可知 S_1 线性无关. 由 $\mathrm{R}(S_2) = 3$ 可知 S_2 线性相关. 从而 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 S_1 线性表示. 于是 S_3 可由 S 线性表示. 显然 S 可由 S_3 线性表示, 因此二者等价, $\mathrm{R}(S) = \mathrm{R}(S_3) = 4$. □

练习. 判断题: 设 S 和 T 为两个 n 维向量组, 且 $\mathrm{R}(S) = \mathrm{R}(T)$, 则 S 和 T 等价.

例：向量组的秩

例. 若

$$S_1 = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\}, \quad S_2 = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4\}, \quad S_3 = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_5\}$$

满足 $\mathrm{R}(S_1) = \mathrm{R}(S_2) = 3, \mathrm{R}(S_3) = 4$. 证明向量组 $S = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_5 - \boldsymbol{\alpha}_4\}$ 线性无关.

证明. 由 $\mathrm{R}(S_1) = 3$ 可知 S_1 线性无关. 由 $\mathrm{R}(S_2) = 3$ 可知 S_2 线性相关. 从而 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 S_1 线性表示. 于是 S_3 可由 S 线性表示. 显然 S 可由 S_3 线性表示, 因此二者等价, $\mathrm{R}(S) = \mathrm{R}(S_3) = 4$. □

练习. 判断题: 设 S 和 T 为两个 n 维向量组, 且 $\mathrm{R}(S) = \mathrm{R}(T)$, 则 S 和 T 等价. ✗

如何从一组能生成空间 V 的向量找到 V 的一组基?

极大线性无关组的定义

如何从一组能生成空间 V 的向量找到 V 的一组基？我们只需要取极大线性无关组.

极大线性无关组的定义

如何从一组能生成空间 V 的向量找到 V 的一组基？我们只需要取极大线性无关组.

定义. 设 S 为一个向量组. 若 S 的部分组 $S_0 = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$ 满足

(1) S_0 线性无关;

(2) S_0 添加 S 中的若干向量得到的向量组均线性相关.

则称 S_0 是 S 的一个**极大线性无关组**.

极大线性无关组的定义

如何从一组能生成空间 V 的向量找到 V 的一组基? 我们只需要取极大线性无关组.

定义. 设 S 为一个向量组. 若 S 的部分组 $S_0=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$ 满足

(1) S_0 线性无关;

(2) S_0 添加 S 中的若干向量得到的向量组均线性相关.

则称 S_0 是 S 的一个极大线性无关组.

定理. 以下等价:

极大线性无关组的定义

如何从一组能生成空间 V 的向量找到 V 的一组基？我们只需要取极大线性无关组.

定义. 设 S 为一个向量组. 若 S 的部分组 $S_0 = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$ 满足

(1) S_0 线性无关;

(2) S_0 添加 S 中的若干向量得到的向量组均线性相关.

则称 S_0 是 S 的一个极大线性无关组.

定理. 以下等价:

(1) S_0 是 S 的极大线性无关组;

极大线性无关组的定义

如何从一组能生成空间 V 的向量找到 V 的一组基? 我们只需要取极大线性无关组.

定义. 设 S 为一个向量组. 若 S 的部分组 $S_0 = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$ 满足

(1) S_0 线性无关;

(2) S_0 添加 S 中的若干向量得到的向量组均线性相关.

则称 S_0 是 S 的一个极大线性无关组.

定理. 以下等价:

(1) S_0 是 S 的极大线性无关组;

(2) S_0 线性无关且 S_0 大小等于 $\mathrm{R}(S)$;

极大线性无关组的定义

如何从一组能生成空间 V 的向量找到 V 的一组基？我们只需要取极大线性无关组.

定义. 设 S 为一个向量组. 若 S 的部分组 $S_0 = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$ 满足

(1) S_0 线性无关;

(2) S_0 添加 S 中的若干向量得到的向量组均线性相关.

则称 S_0 是 S 的一个极大线性无关组.

定理. 以下等价:

(1) S_0 是 S 的极大线性无关组;

(2) S_0 线性无关且 S_0 大小等于 $\mathrm{R}(S)$;

(3) S_0 线性无关且 $S_0 \sim S$;

极大线性无关组的定义

如何从一组能生成空间 V 的向量找到 V 的一组基? 我们只需要取极大线性无关组.

定义. 设 S 为一个向量组. 若 S 的部分组 $S_0=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$ 满足

(1) S_0 线性无关;

(2) S_0 添加 S 中的若干向量得到的向量组均线性相关.

则称 S_0 是 S 的一个**极大线性无关组**.

定理. 以下等价:

(1) S_0 是 S 的极大线性无关组;

(2) S_0 线性无关且 S_0 大小等于 $\mathrm{R}(S)$;

(3) S_0 线性无关且 $S_0 \sim S$;

(4) $S_0 \sim S$ 且 S_0 大小等于 $\mathrm{R}(S)$.

(1) 只含有零向量的向量组没有极大线性无关组 (空集), 它的秩为 0 (空集生成 0 维空间 $\{\mathbf{0}\}$).

(1) 只含有零向量的向量组没有极大线性无关组 (空集), 它的秩为 0 (空集生成 0 维空间 $\{\mathbf{0}\}$).

(2) 极大线性无关组一般不是唯一的.

(1) 只含有零向量的向量组没有极大线性无关组 (空集), 它的秩为 0 (空集生成 0 维空间 $\{\mathbf{0}\}$).

(2) 极大线性无关组一般不是唯一的. 例如

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,0)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = (0,1)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = (1,1)^{\mathrm{T}}.$$

(1) 只含有零向量的向量组没有极大线性无关组 (空集), 它的秩为 0 (空集生成 0 维空间 $\{\mathbf{0}\}$).

(2) 极大线性无关组一般不是唯一的. 例如

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,0)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = (0,1)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = (1,1)^{\mathrm{T}}.$$

$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 是一个极大线性无关组, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3$ 也是一个极大线性无关组.

极大线性无关组的性质

(1) 只含有零向量的向量组没有极大线性无关组 (空集), 它的秩为 0 (空集生成 0 维空间 $\{\mathbf{0}\}$).

(2) 极大线性无关组一般不是唯一的. 例如

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,0)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = (0,1)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = (1,1)^{\mathrm{T}}.$$

$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 是一个极大线性无关组, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3$ 也是一个极大线性无关组.

(3) 向量组和它的一个极大线性无关组是等价的, 于是同一向量组的任意两个极大线性无关组等价.

设 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r), \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_r)$ 的列向量组是等价的线性无关组.

设 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r), \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_r)$ 的列向量组是等价的线性无关组. 我们之前证明过若 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 则 $\boldsymbol{P}$ 可逆.

设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_r),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\ldots,\boldsymbol{\beta}_r)$ 的列向量组是等价的线性无关组. 我们之前证明过若 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 则 $\boldsymbol{P}$ 可逆.

若 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\ldots,\boldsymbol{\beta}_m)$ 的列向量组是等价的向量组, 秩为 r.

设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_r),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\ldots,\boldsymbol{\beta}_r)$ 的列向量组是等价的线性无关组. 我们之前证明过若 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 则 $\boldsymbol{P}$ 可逆.

若 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\ldots,\boldsymbol{\beta}_m)$ 的列向量组是等价的向量组, 秩为 r. 通过适当的列变换, 可以让 $\boldsymbol{A}$ 的前 r 列是极大无关组, 后面全是零向量. 对 $\boldsymbol{B}$ 作类似操作.

向量组等价与矩阵列等价

设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_r),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\ldots,\boldsymbol{\beta}_r)$ 的列向量组是等价的线性无关组. 我们之前证明过若 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 则 $\boldsymbol{P}$ 可逆.

若 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\ldots,\boldsymbol{\beta}_m)$ 的列向量组是等价的向量组, 秩为 r. 通过适当的列变换, 可以让 $\boldsymbol{A}$ 的前 r 列是极大无关组, 后面全是零向量. 对 $\boldsymbol{B}$ 作类似操作. 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_r',\boldsymbol{O})$, $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{B}_r',\boldsymbol{O})$, 那么 $\boldsymbol{A}'\overset{c}{\sim}\boldsymbol{B}'$, 从而存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}\in M_r$ 使得 $\boldsymbol{B}'=\boldsymbol{A}'\boldsymbol{P}$.

设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_r),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\ldots,\boldsymbol{\beta}_r)$ 的列向量组是等价的线性无关组. 我们之前证明过若 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AP}$, 则 $\boldsymbol{P}$ 可逆.

若 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\ldots,\boldsymbol{\beta}_m)$ 的列向量组是等价的向量组, 秩为 r. 通过适当的列变换, 可以让 $\boldsymbol{A}$ 的前 r 列是极大无关组, 后面全是零向量. 对 $\boldsymbol{B}$ 作类似操作. 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_r',\boldsymbol{O})$, $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{B}_r',\boldsymbol{O})$, 那么 $\boldsymbol{A}'\overset{c}{\sim}\boldsymbol{B}'$, 从而存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}\in M_r$ 使得 $\boldsymbol{B}'=\boldsymbol{A}'\boldsymbol{P}$. 于是

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}\boldsymbol{P} & \\ & \boldsymbol{E}\end{pmatrix}\overset{c}{\sim}\boldsymbol{A}.$$

向量组等价与矩阵列等价

设 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r), \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_r)$ 的列向量组是等价的线性无关组. 我们之前证明过若 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 则 $\boldsymbol{P}$ 可逆.

若 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m), \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_m)$ 的列向量组是等价的向量组, 秩为 r. 通过适当的列变换, 可以让 $\boldsymbol{A}$ 的前 r 列是极大无关组, 后面全是零向量. 对 $\boldsymbol{B}$ 作类似操作. 设 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}_r', \boldsymbol{O})$, $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{B}_r', \boldsymbol{O})$, 那么 $\boldsymbol{A}' \overset{c}{\sim} \boldsymbol{B}'$, 从而存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P} \in M_r$ 使得 $\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{A}'\boldsymbol{P}$. 于是

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} \boldsymbol{P} & \\ & \boldsymbol{E} \end{pmatrix} \overset{c}{\sim} \boldsymbol{A}.$$

因此同型矩阵列向量组等价 $\Longleftrightarrow$ 列等价.

例. 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&3&1\\0&1&-1&4\\0&0&0&5\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ 的行向量组为

$$\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}=(1,1,3,1),\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}=(0,1,-1,4),\ \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}=(0,0,0,5),\ \boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}}=(0,0,0,0).$$

例. 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&3&1\\0&1&-1&4\\0&0&0&5\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ 的行向量组为

$$\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}=(1,1,3,1),\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}=(0,1,-1,4),\ \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}=(0,0,0,5),\ \boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}}=(0,0,0,0).$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}$ 的第 $1,2,4$ 个分量形成可逆矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&4\\0&0&5\end{pmatrix}$，因此它们线性无关.

例. 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&3&1\\0&1&-1&4\\0&0&0&5\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ 的行向量组为

$$\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}=(1,1,3,1),\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}=(0,1,-1,4),\ \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}=(0,0,0,5),\ \boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}}=(0,0,0,0).$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}$ 的第 $1,2,4$ 个分量形成可逆矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&4\\0&0&5\end{pmatrix}$，因此它们线性无关．它们构成一个极大线性无关组，$\boldsymbol{A}$ 的行向量组的秩是 3．

例. 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&3&1\\0&1&-1&4\\0&0&0&5\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ 的行向量组为

$$\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}=(1,1,3,1),\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}=(0,1,-1,4),\ \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}=(0,0,0,5),\ \boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}}=(0,0,0,0).$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}$ 的第 $1,2,4$ 个分量形成可逆矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&4\\0&0&5\end{pmatrix}$，因此它们线性无关．它们构成一个极大线性无关组，$\boldsymbol{A}$ 的行向量组的秩是 3．类似可知，$\boldsymbol{A}$ 的列向量组的秩也是 3．

例. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的行向量组为

$$\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} = (1,1,3,1),\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} = (0,1,-1,4),\ \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}} = (0,0,0,5),\ \boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}} = (0,0,0,0).$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}$ 的第 1, 2, 4 个分量形成可逆矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$，因此它们线性无关. 它们构成一个极大线性无关组，A 的行向量组的秩是 3. 类似可知，A 的列向量组的秩也是 3.

实际上，任意矩阵的行向量组的秩等于列向量组的秩.

例. 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&3&1\\0&1&-1&4\\0&0&0&5\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ 的行向量组为

$$\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}=(1,1,3,1),\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}=(0,1,-1,4),\ \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}=(0,0,0,5),\ \boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}}=(0,0,0,0).$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}$ 的第 $1,2,4$ 个分量形成可逆矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&4\\0&0&5\end{pmatrix}$, 因此它们线性无关. 它们构成一个极大线性无关组, $\boldsymbol{A}$ 的行向量组的秩是 3. 类似可知, $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的秩也是 3.

实际上, 任意矩阵的行向量组的秩等于列向量组的秩. 为了说明这一点, 我们考虑矩阵的秩.

第三节　矩阵的秩

- 矩阵秩的定义
- 矩阵秩的性质
- 极大线性无关组的计算方法

我们知道，每个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都等价于某个标准形 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$.

我们知道, 每个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都等价于某个标准形 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$. 称 r 为 $\boldsymbol{A}$ 的**秩**, 记作 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$.

我们知道, 每个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都等价于某个标准形 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$. 称 r 为 $\boldsymbol{A}$ 的秩, 记作 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$. 称 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组的秩为行秩, 列向量组的秩为列秩.

我们知道，每个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都等价于某个标准形 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$. 称 r 为 $\boldsymbol{A}$ 的秩，记作 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$. 称 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组的秩为行秩，列向量组的秩为列秩.

定理 (行秩等于列秩等于秩). $\boldsymbol{A}$ 的行秩和列秩均等于秩 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$.

我们知道, 每个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都等价于某个标准形 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$. 称 r 为 $\boldsymbol{A}$ 的**秩**, 记作 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$. 称 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组的秩为**行秩**, 列向量组的秩为**列秩**.

定理 (行秩等于列秩等于秩). $\boldsymbol{A}$ 的行秩和列秩均等于秩 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$.

由此可知矩阵的秩是唯一确定的.

我们知道, 每个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都等价于某个标准形 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$. 称 r 为 $\boldsymbol{A}$ 的秩, 记作 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$. 称 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组的秩为行秩, 列向量组的秩为列秩.

定理 (行秩等于列秩等于秩). $\boldsymbol{A}$ 的行秩和列秩均等于秩 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$.

由此可知矩阵的秩是唯一确定的.

对于行阶梯形矩阵, 再实施初等变换使其变为行最简形矩阵或标准形矩阵, 并不会改变它的非零行的个数.

我们知道, 每个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都等价于某个标准形 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$. 称 r 为 $\boldsymbol{A}$ 的秩, 记作 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$. 称 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组的秩为行秩, 列向量组的秩为列秩.

定理 (行秩等于列秩等于秩). $\boldsymbol{A}$ 的行秩和列秩均等于秩 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$.

由此可知矩阵的秩是唯一确定的.

对于行阶梯形矩阵, 再实施初等变换使其变为行最简形矩阵或标准形矩阵, 并不会改变它的非零行的个数. 换言之, 行阶梯形矩阵的秩就是非零行的个数.

我们知道, 每个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都等价于某个标准形 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$. 称 r 为 $\boldsymbol{A}$ 的秩, 记作 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$. 称 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组的秩为行秩, 列向量组的秩为列秩.

定理 (行秩等于列秩等于秩). $\boldsymbol{A}$ 的行秩和列秩均等于秩 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$.

由此可知矩阵的秩是唯一确定的.

对于行阶梯形矩阵, 再实施初等变换使其变为行最简形矩阵或标准形矩阵, 并不会改变它的非零行的个数. 换言之, 行阶梯形矩阵的秩就是非零行的个数.

设 $\boldsymbol{A}$ 通过初等行变换变为行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$, 则二者秩相等, 二者的行向量组等价, 从而行秩也相等.

我们知道, 每个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都等价于某个标准形 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$. 称 r 为 $\boldsymbol{A}$ 的秩, 记作 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$. 称 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组的秩为行秩, 列向量组的秩为列秩.

定理 (行秩等于列秩等于秩). $\boldsymbol{A}$ 的行秩和列秩均等于秩 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$.

由此可知矩阵的秩是唯一确定的.

对于行阶梯形矩阵, 再实施初等变换使其变为行最简形矩阵或标准形矩阵, 并不会改变它的非零行的个数. 换言之, 行阶梯形矩阵的秩就是非零行的个数.

设 $\boldsymbol{A}$ 通过初等行变换变为行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$, 则二者秩相等, 二者的行向量组等价, 从而行秩也相等. 对于 $\boldsymbol{B}$, 它的行秩就是非零行的个数, 也就是 $\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$.

我们知道，每个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都等价于某个标准形 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$. 称 r 为 $\boldsymbol{A}$ 的秩，记作 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$. 称 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组的秩为行秩，列向量组的秩为列秩.

定理 (行秩等于列秩等于秩). $\boldsymbol{A}$ 的行秩和列秩均等于秩 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$.

由此可知矩阵的秩是唯一确定的.

对于行阶梯形矩阵，再实施初等变换使其变为行最简形矩阵或标准形矩阵，并不会改变它的非零行的个数. 换言之，行阶梯形矩阵的秩就是非零行的个数.

设 $\boldsymbol{A}$ 通过初等行变换变为行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$，则二者秩相等，二者的行向量组等价，从而行秩也相等. 对于 $\boldsymbol{B}$，它的行秩就是非零行的个数，也就是 $\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$. 因此 $\boldsymbol{A}$ 的行秩等于秩.

我们知道, 每个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都等价于某个标准形 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$. 称 r 为 $\boldsymbol{A}$ 的秩, 记作 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$. 称 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组的秩为行秩, 列向量组的秩为列秩.

定理 (行秩等于列秩等于秩). $\boldsymbol{A}$ 的行秩和列秩均等于秩 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$.

由此可知矩阵的秩是唯一确定的.

对于行阶梯形矩阵, 再实施初等变换使其变为行最简形矩阵或标准形矩阵, 并不会改变它的非零行的个数. 换言之, 行阶梯形矩阵的秩就是非零行的个数.

设 $\boldsymbol{A}$ 通过初等行变换变为行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$, 则二者秩相等, 二者的行向量组等价, 从而行秩也相等. 对于 $\boldsymbol{B}$, 它的行秩就是非零行的个数, 也就是 $\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$. 因此 $\boldsymbol{A}$ 的行秩等于秩. 不难知道 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$, 从而 $\boldsymbol{A}$ 的列秩 $= \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的行秩 $= \mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A})$.

设 S, T 分别为 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 列向量组, 分别生成空间 V, W.

设 S, T 分别为 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 列向量组, 分别生成空间 V, W. 那么

$$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B} \iff \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{B}) \iff \mathrm{R}(S) \sim \mathrm{R}(T) \iff \dim V = \dim W,$$

$$\Uparrow$$

$$\boldsymbol{A} \overset{c}{\sim} \boldsymbol{B} \iff S \sim T \iff V = W,$$

例. 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&0&3&-2\\0&3&1&-2&5\\0&0&0&4&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&-5\\4&7&1\end{pmatrix}$ 的秩.

行阶梯形矩阵的秩

例. 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & 3 & -2\\ 0 & 3 & 1 & -2 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & -5\\ 4 & 7 & 1\end{pmatrix}$ 的秩.

解. $\boldsymbol{A}$ 是行阶梯形矩阵, 因此 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=3$.

例. 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&0&3&-2\\0&3&1&-2&5\\0&0&0&4&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&-5\\4&7&1\end{pmatrix}$ 的秩.

解. $\boldsymbol{A}$ 是行阶梯形矩阵, 因此 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=3$.

$$\boldsymbol{B}\ \underset{r_3-4r_1}{\overset{r_2-2r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-1&-11\\0&-1&-11\end{pmatrix}\ \underset{-r_2}{\overset{r_3-r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&11\\0&0&0\end{pmatrix}$$

例. 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & 3 & -2\\ 0 & 3 & 1 & -2 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & -5\\ 4 & 7 & 1\end{pmatrix}$ 的秩.

解. $\boldsymbol{A}$ 是行阶梯形矩阵, 因此 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=3$.

$$\boldsymbol{B}\underset{r_3-4r_1}{\overset{r_2-2r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & -11\\ 0 & -1 & -11\end{pmatrix}\underset{-r_2}{\overset{r_3-r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 11\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\implies\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=2.$$

例：计算矩阵的秩

例. 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ -1 & a-1 & 1-a \\ 1 & 1 & a^2 \\ 1 & 1 & 2a+1 \end{pmatrix}$ 的秩.

例：计算矩阵的秩

例. 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ -1 & a-1 & 1-a\\ 1 & 1 & a^2\\ 1 & 1 & 2a+1\end{pmatrix}$ 的秩.

解.

$$\boldsymbol{A}\underset{r_4-r_1}{\overset{\substack{r_2+r_1\\ r_3-r_1}}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 0 & a & 1\\ 0 & 0 & a^2-a\\ 0 & 0 & a+1\end{pmatrix}$$

例：计算矩阵的秩

例. 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ -1 & a-1 & 1-a\\ 1 & 1 & a^2\\ 1 & 1 & 2a+1\end{pmatrix}$ 的秩.

解.

$$\boldsymbol{A}\underset{r_4-r_1}{\overset{\substack{r_2+r_1\\ r_3-r_1}}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 0 & a & 1\\ 0 & 0 & a^2-a\\ 0 & 0 & a+1\end{pmatrix}\underset{-\frac{1}{2}r_3}{\overset{r_3-ar_4}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 0 & a & 1\\ 0 & 0 & a\\ 0 & 0 & a+1\end{pmatrix}$$

例. 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ -1 & a-1 & 1-a\\ 1 & 1 & a^2\\ 1 & 1 & 2a+1\end{pmatrix}$ 的秩.

解.

$$\boldsymbol{A}\underset{r_4-r_1}{\overset{\substack{r_2+r_1\\ r_3-r_1}}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 0 & a & 1\\ 0 & 0 & a^2-a\\ 0 & 0 & a+1\end{pmatrix}\underset{-\frac{1}{2}r_3}{\overset{r_3-ar_4}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 0 & a & 1\\ 0 & 0 & a\\ 0 & 0 & a+1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 0 & a & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

例. 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ -1 & a-1 & 1-a\\ 1 & 1 & a^2\\ 1 & 1 & 2a+1\end{pmatrix}$ 的秩.

解.

$$\boldsymbol{A}\ \underset{r_4-r_1}{\overset{r_2+r_1}{\underset{\sim}{r_3-r_1}}}\ \begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 0 & a & 1\\ 0 & 0 & a^2-a\\ 0 & 0 & a+1\end{pmatrix}\ \underset{-\frac{1}{2}r_3}{\overset{r_3-ar_4}{\sim}}\ \begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 0 & a & 1\\ 0 & 0 & a\\ 0 & 0 & a+1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 0 & a & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

因此 $a\neq 0$ 时，$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=3$；$a=0$ 时，$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=2$.

注意处理带未知数的矩阵时，不宜实施 $\dfrac{1}{a+1}r_2, (a-2)r_3$ 等类似操作，因为其分母或系数可能为零.

注意处理带未知数的矩阵时，不宜实施 $\frac{1}{a+1}r_2, (a-2)r_3$ 等类似操作，因为其分母或系数可能为零.

练习. 求矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -6 & 4 \\ 3 & 2 & m & 7 \end{pmatrix}$ 的秩.

注意处理带未知数的矩阵时，不宜实施 $\dfrac{1}{a+1}r_2, (a-2)r_3$ 等类似操作，因为其分母或系数可能为零.

练习. 求矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -6 & 4 \\ 3 & 2 & m & 7 \end{pmatrix}$ 的秩.

答案. $m \neq -8$ 时，$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = 3$; $m = -8$ 时，$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = 2$.

例. 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ 的秩.

例. 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ 的秩.

解.

$$\boldsymbol{A} \underset{\substack{r_3 - r_1 \\ r_4 - ar_1}}{\overset{\substack{r_1 \leftrightarrow r_4 \\ r_2 - r_1}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix}$$

例. 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ 的秩.

解.

$$\boldsymbol{A} \underbrace{\overset{\substack{r_1 \leftrightarrow r_4 \\ r_2 - r_1}}{}}_{\substack{r_3 - r_1 \\ r_4 - ar_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix} \underbrace{\overset{r_4 + r_2}{}}_{r_4 + r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & -(a+3)(a-1) \end{pmatrix}$$

例. 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1\\ 1 & a & 1 & 1\\ 1 & 1 & a & 1\\ 1 & 1 & 1 & a\end{pmatrix}$ 的秩.

解.

$$\boldsymbol{A}\underbrace{\overset{\substack{r_1\leftrightarrow r_4\\ r_2-r_1}}{}}_{\substack{r_3-r_1\\ r_4-ar_1}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a\\ 0 & a-1 & 0 & 1-a\\ 0 & 0 & a-1 & 1-a\\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a^2\end{pmatrix}\underbrace{\overset{r_4+r_2}{}}_{r_4+r_3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a\\ 0 & a-1 & 0 & 1-a\\ 0 & 0 & a-1 & 1-a\\ 0 & 0 & 0 & -(a+3)(a-1)\end{pmatrix}$$

因此 $a\neq 1,-3$ 时，$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=4$;

例：计算矩阵的秩

例. 求矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ 的秩.

解.

$$\boldsymbol{A} \underset{\substack{r_3 - r_1 \\ r_4 - ar_1}}{\overset{\substack{r_1 \leftrightarrow r_4 \\ r_2 - r_1}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix} \underset{r_4 + r_3}{\overset{r_4 + r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & -(a+3)(a-1) \end{pmatrix}$$

因此 $a \neq 1, -3$ 时，$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = 4$; $a = -3$ 时，$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = 3$;

例：计算矩阵的秩

例. 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ 的秩.

解.

$$\boldsymbol{A} \underset{\substack{r_3-r_1\\ r_4-ar_1}}{\overset{\substack{r_1\leftrightarrow r_4\\ r_2-r_1}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix} \underset{r_4+r_3}{\overset{r_4+r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & -(a+3)(a-1) \end{pmatrix}$$

因此 $a\neq 1,-3$ 时，$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=4$; $a=-3$ 时，$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=3$; $a=1$ 时，$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=1$.

矩阵秩有另一种刻画方式.

矩阵秩有另一种刻画方式. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 任取 k 行 k 列交叉得到的 k^2 个元素 (不改变位置次序) 形成的 k 阶方阵的行列式,

矩阵秩有另一种刻画方式. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 任取 k 行 k 列交叉得到的 k^2 个元素 (不改变位置次序) 形成的 k 阶方阵的行列式, 称为 $\boldsymbol{A}$ 的 k **阶子式**.

矩阵秩有另一种刻画方式. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 任取 k 行 k 列交叉得到的 k^2 个元素 (不改变位置次序) 形成的 k 阶方阵的行列式, 称为 $\boldsymbol{A}$ 的 k **阶子式**. 例如 n 阶方阵的余子式是 $n-1$ 阶子式.

矩阵秩有另一种刻画方式. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 任取 k 行 k 列交叉得到的 k^2 个元素 (不改变位置次序) 形成的 k 阶方阵的行列式, 称为 $\boldsymbol{A}$ 的 k **阶子式**. 例如 n 阶方阵的余子式是 $n-1$ 阶子式.

定理. 设 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=r$, 则存在非零的 r 阶子式, 但所有的 $r+1$ 阶子式都是零.

矩阵秩与子式

矩阵秩有另一种刻画方式. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 任取 k 行 k 列交叉得到的 k^2 个元素 (不改变位置次序) 形成的 k 阶方阵的行列式, 称为 $\boldsymbol{A}$ 的 k **阶子式**. 例如 n 阶方阵的余子式是 $n-1$ 阶子式.

定理. **设 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=r$, 则存在非零的 r 阶子式, 但所有的 $r+1$ 阶子式都是零.**

根据行列式的拉普拉斯展开, 若 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶子式均为零, 则 $k+1$ 阶子式也都是零.

矩阵秩与子式

矩阵秩有另一种刻画方式. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 任取 k 行 k 列交叉得到的 k^2 个元素 (不改变位置次序) 形成的 k 阶方阵的行列式, 称为 $\boldsymbol{A}$ 的 k **阶子式**. 例如 n 阶方阵的余子式是 $n-1$ 阶子式.

定理. 设 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=r$, 则存在非零的 r 阶子式, 但所有的 $r+1$ 阶子式都是零.

根据行列式的拉普拉斯展开, 若 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶子式均为零, 则 $k+1$ 阶子式也都是零. 因此 $\boldsymbol{A}$ 的任意 $s>r$ 阶子式都是零.

矩阵秩有另一种刻画方式. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 任取 k 行 k 列交叉得到的 k^2 个元素 (不改变位置次序) 形成的 k 阶方阵的行列式, 称为 $\boldsymbol{A}$ 的 k **阶子式**. 例如 n 阶方阵的余子式是 $n-1$ 阶子式.

定理. 设 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=r$, 则存在非零的 r 阶子式, 但所有的 $r+1$ 阶子式都是零.

根据行列式的拉普拉斯展开, 若 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶子式均为零, 则 $k+1$ 阶子式也都是零. 因此 $\boldsymbol{A}$ 的任意 $s>r$ 阶子式都是零.

推论.

矩阵秩有另一种刻画方式. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 任取 k 行 k 列交叉得到的 k^2 个元素 (不改变位置次序) 形成的 k 阶方阵的行列式, 称为 $\boldsymbol{A}$ 的 k **阶子式**. 例如 n 阶方阵的余子式是 $n-1$ 阶子式.

定理. **设** $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=r$**, 则存在非零的** r **阶子式, 但所有的** $r+1$ **阶子式都是零.**

根据行列式的拉普拉斯展开, 若 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶子式均为零, 则 $k+1$ 阶子式也都是零. 因此 $\boldsymbol{A}$ 的任意 $s>r$ 阶子式都是零.

推论.

(1) $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})\geqslant r \iff \boldsymbol{A}$ **存在非零** r **阶子式.**

矩阵秩与子式

矩阵秩有另一种刻画方式. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 任取 k 行 k 列交叉得到的 k^2 个元素 (不改变位置次序) 形成的 k 阶方阵的行列式, 称为 $\boldsymbol{A}$ 的 k **阶子式**. 例如 n 阶方阵的余子式是 $n-1$ 阶子式.

定理. 设 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=r$, 则存在非零的 r 阶子式, 但所有的 $r+1$ 阶子式都是零.

根据行列式的拉普拉斯展开, 若 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶子式均为零, 则 $k+1$ 阶子式也都是零. 因此 $\boldsymbol{A}$ 的任意 $s>r$ 阶子式都是零.

推论.

(1) $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})\geqslant r \iff \boldsymbol{A}$ 存在非零 r 阶子式.

(2) $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})\leqslant r \iff \boldsymbol{A}$ 所有 $r+1$ 阶子式均为零.

矩阵秩与子式

矩阵秩有另一种刻画方式. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 任取 k 行 k 列交叉得到的 k^2 个元素 (不改变位置次序) 形成的 k 阶方阵的行列式, 称为 $\boldsymbol{A}$ 的 k **阶子式**. 例如 n 阶方阵的余子式是 $n-1$ 阶子式.

定理. 设 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=r$, 则存在非零的 r 阶子式, 但所有的 $r+1$ 阶子式都是零.

根据行列式的拉普拉斯展开, 若 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶子式均为零, 则 $k+1$ 阶子式也都是零. 因此 $\boldsymbol{A}$ 的任意 $s>r$ 阶子式都是零.

推论.

(1) $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})\geqslant r \iff \boldsymbol{A}$ 存在非零 r 阶子式.

(2) $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})\leqslant r \iff \boldsymbol{A}$ 所有 $r+1$ 阶子式均为零.

(3) $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=r \implies \boldsymbol{A}$ 存在 $1,2,\ldots,r$ 阶非零子式.

矩阵秩的性质

证明. 设 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}$, 其中 $\boldsymbol{P}$ 是初等矩阵.

证明. 设 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}$, 其中 $\boldsymbol{P}$ 是初等矩阵.

(1) 若 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}(i,j)$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的 k 阶子式总等于 $\boldsymbol{A}$ 的某个 k 阶子式, 最多相差 -1.

证明. 设 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}$, 其中 $\boldsymbol{P}$ 是初等矩阵.

(1) 若 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}(i,j)$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的 k 阶子式总等于 $\boldsymbol{A}$ 的某个 k 阶子式, 最多相差 -1.

(2) 若 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}(i(a))$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的 k 阶子式总等于 $\boldsymbol{A}$ 的某个 k 阶子式或 a 倍.

证明. 设 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}$, 其中 $\boldsymbol{P}$ 是初等矩阵.

(1) 若 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}(i,j)$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的 k 阶子式总等于 $\boldsymbol{A}$ 的某个 k 阶子式, 最多相差 -1.

(2) 若 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}(i(a))$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的 k 阶子式总等于 $\boldsymbol{A}$ 的某个 k 阶子式或 a 倍.

(3) 若 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}(i,j(a))$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的 k 阶子式总等于 $\boldsymbol{A}$ 的某个 k 阶子式 (不含 i 行, 或含 i,j 行); 或等于 $\boldsymbol{A}$ 的两个 k 阶子式的组合 (含 i 行且不含 j 行).

证明. 设 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}$, 其中 $\boldsymbol{P}$ 是初等矩阵.

(1) 若 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}(i,j)$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的 k 阶子式总等于 $\boldsymbol{A}$ 的某个 k 阶子式, 最多相差 -1.

(2) 若 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}(i(a))$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的 k 阶子式总等于 $\boldsymbol{A}$ 的某个 k 阶子式或 a 倍.

(3) 若 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}(i,j(a))$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的 k 阶子式总等于 $\boldsymbol{A}$ 的某个 k 阶子式 (不含 i 行, 或含 i,j 行); 或等于 $\boldsymbol{A}$ 的两个 k 阶子式的组合 (含 i 行且不含 j 行).

因此若 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶子式都是零, 则 $\boldsymbol{B}$ 的 k 阶子式也都是零.

矩阵秩的性质

证明. 设 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}$, 其中 $\boldsymbol{P}$ 是初等矩阵.

(1) 若 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}(i,j)$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的 k 阶子式总等于 $\boldsymbol{A}$ 的某个 k 阶子式, 最多相差 -1.

(2) 若 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}(i(a))$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的 k 阶子式总等于 $\boldsymbol{A}$ 的某个 k 阶子式或 a 倍.

(3) 若 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}(i,j(a))$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的 k 阶子式总等于 $\boldsymbol{A}$ 的某个 k 阶子式 (不含 i 行, 或含 i,j 行); 或等于 $\boldsymbol{A}$ 的两个 k 阶子式的组合 (含 i 行且不含 j 行).

因此若 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶子式都是零, 则 $\boldsymbol{B}$ 的 k 阶子式也都是零.

由于 $\boldsymbol{P}^{-1}$ 也是初等矩阵, 因此反过来也成立.

证明. 设 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}$, 其中 $\boldsymbol{P}$ 是初等矩阵.

(1) 若 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}(i,j)$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的 k 阶子式总等于 $\boldsymbol{A}$ 的某个 k 阶子式, 最多相差 -1.

(2) 若 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}(i(a))$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的 k 阶子式总等于 $\boldsymbol{A}$ 的某个 k 阶子式或 a 倍.

(3) 若 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}(i,j(a))$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的 k 阶子式总等于 $\boldsymbol{A}$ 的某个 k 阶子式 (不含 i 行, 或含 i,j 行); 或等于 $\boldsymbol{A}$ 的两个 k 阶子式的组合 (含 i 行且不含 j 行).

因此若 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶子式都是零, 则 $\boldsymbol{B}$ 的 k 阶子式也都是零.

由于 $\boldsymbol{P}^{-1}$ 也是初等矩阵, 因此反过来也成立. 对于 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 情形同理.

证明. 设 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}$, 其中 $\boldsymbol{P}$ 是初等矩阵.

(1) 若 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}(i,j)$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的 k 阶子式总等于 $\boldsymbol{A}$ 的某个 k 阶子式, 最多相差 -1.

(2) 若 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}(i(a))$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的 k 阶子式总等于 $\boldsymbol{A}$ 的某个 k 阶子式或 a 倍.

(3) 若 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}(i,j(a))$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的 k 阶子式总等于 $\boldsymbol{A}$ 的某个 k 阶子式 (不含 i 行, 或含 i,j 行); 或等于 $\boldsymbol{A}$ 的两个 k 阶子式的组合 (含 i 行且不含 j 行).

因此若 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶子式都是零, 则 $\boldsymbol{B}$ 的 k 阶子式也都是零.

由于 $\boldsymbol{P}^{-1}$ 也是初等矩阵, 因此反过来也成立. 对于 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 情形同理. 因此, 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶子式都是零 $\iff$ $\boldsymbol{B}$ 的 k 阶子式都是零.

证明. 设 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}$, 其中 $\boldsymbol{P}$ 是初等矩阵.

(1) 若 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}(i,j)$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的 k 阶子式总等于 $\boldsymbol{A}$ 的某个 k 阶子式, 最多相差 -1.

(2) 若 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}(i(a))$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的 k 阶子式总等于 $\boldsymbol{A}$ 的某个 k 阶子式或 a 倍.

(3) 若 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}(i,j(a))$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的 k 阶子式总等于 $\boldsymbol{A}$ 的某个 k 阶子式 (不含 i 行, 或含 i,j 行); 或等于 $\boldsymbol{A}$ 的两个 k 阶子式的组合 (含 i 行且不含 j 行).

因此若 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶子式都是零, 则 $\boldsymbol{B}$ 的 k 阶子式也都是零.

由于 $\boldsymbol{P}^{-1}$ 也是初等矩阵, 因此反过来也成立. 对于 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 情形同理. 因此, 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶子式都是零 $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{B}$ 的 k 阶子式都是零.

对于标准形矩阵, 该定理显然成立.

证明. 设 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}$, 其中 $\boldsymbol{P}$ 是初等矩阵.

(1) 若 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}(i,j)$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的 k 阶子式总等于 $\boldsymbol{A}$ 的某个 k 阶子式, 最多相差 -1.

(2) 若 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}(i(a))$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的 k 阶子式总等于 $\boldsymbol{A}$ 的某个 k 阶子式或 a 倍.

(3) 若 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}(i,j(a))$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的 k 阶子式总等于 $\boldsymbol{A}$ 的某个 k 阶子式 (不含 i 行, 或含 i,j 行); 或等于 $\boldsymbol{A}$ 的两个 k 阶子式的组合 (含 i 行且不含 j 行).

因此若 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶子式都是零, 则 $\boldsymbol{B}$ 的 k 阶子式也都是零.

由于 $\boldsymbol{P}^{-1}$ 也是初等矩阵, 因此反过来也成立. 对于 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 情形同理. 因此, 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶子式都是零 $\iff$ $\boldsymbol{B}$ 的 k 阶子式都是零.

对于标准形矩阵, 该定理显然成立. 因此该定理对任意矩阵都成立. □

矩阵秩的性质

命题. 设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}$，则 $0 \leqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) \leqslant \min(m,n)$.

矩阵秩的性质

命题. 设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}$，则 $0 \leqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) \leqslant \min(m,n)$.

定义.

命题. 设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}$，则 $0 \leqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) \leqslant \min(m,n)$.

定义.

(1) 若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = m$，称 $\boldsymbol{A}$ **行满秩**;

矩阵秩的性质

命题. 设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}$, 则 $0 \leqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) \leqslant \min(m,n)$.

定义.

(1) 若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = m$, 称 $\boldsymbol{A}$ **行满秩**;

(2) 若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n$, 称 $\boldsymbol{A}$ **列满秩**;

矩阵秩的性质

命题. 设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}$，则 $0 \leqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) \leqslant \min(m, n)$.

定义.

(1) 若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = m$，称 $\boldsymbol{A}$ **行满秩**;

(2) 若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n$，称 $\boldsymbol{A}$ **列满秩**;

(3) 若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = m = n$，称 $\boldsymbol{A}$ **满秩**.

命题. 设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}$，则 $0 \leqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) \leqslant \min(m, n)$.

定义.

(1) 若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = m$，称 $\boldsymbol{A}$ **行满秩**；

(2) 若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n$，称 $\boldsymbol{A}$ **列满秩**；

(3) 若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = m = n$，称 $\boldsymbol{A}$ **满秩**.

$$\boldsymbol{A} \text{ 列满秩} \iff \boldsymbol{A} \text{ 列向量组线性无关} \iff \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \text{ 只有零解}.$$

矩阵秩的性质

命题.

命题.

(1) $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = 0 \iff \boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$;

命题.

(1) $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=0 \iff \boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$;

(2) n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆 $\iff \mathrm{R}(\boldsymbol{A})=n$;

命题.

(1) $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=0 \iff \boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$;

(2) n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆 $\iff \mathrm{R}(\boldsymbol{A})=n$;

(3) $\mathrm{R}(k\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}), k\neq 0$;

命题.

(1) $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=0 \iff \boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$;

(2) n **阶方阵** $\boldsymbol{A}$ **可逆** $\iff \mathrm{R}(\boldsymbol{A})=n$;

(3) $\mathrm{R}(k\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}), k\neq 0$;

(4) $\mathrm{R}(\boldsymbol{AB})\leqslant \min(\mathrm{R}(\boldsymbol{A}),\mathrm{R}(\boldsymbol{B}))$;

命题.

(1) $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=0 \iff \boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$;

(2) n **阶方阵** $\boldsymbol{A}$ **可逆** $\iff \mathrm{R}(\boldsymbol{A})=n$;

(3) $\mathrm{R}(k\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}), k\neq 0$;

(4) $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\leqslant \min(\mathrm{R}(\boldsymbol{A}),\mathrm{R}(\boldsymbol{B}))$;

(5) **若** $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times \ell}=\boldsymbol{O}$, **则** $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{B})\leqslant n$;

命题.

(1) $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=0 \iff \boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$;

(2) n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆 $\iff \mathrm{R}(\boldsymbol{A})=n$;

(3) $\mathrm{R}(k\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}), k\neq 0$;

(4) $\mathrm{R}(\boldsymbol{AB})\leqslant \min(\mathrm{R}(\boldsymbol{A}),\mathrm{R}(\boldsymbol{B}))$;

(5) 若 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times \ell}=\boldsymbol{O}$, 则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{B})\leqslant n$;

(6) $\mathrm{R}(a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B})\leqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\leqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$.
特别地, $\max(\mathrm{R}(\boldsymbol{A}),\mathrm{R}(\boldsymbol{B}))\leqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$.

矩阵秩的性质

命题.

命题.

(4) $\mathrm{R}(\boldsymbol{AB}) \leqslant \min\big(\mathrm{R}(\boldsymbol{A}), \mathrm{R}(\boldsymbol{B})\big)$.

命题.

(4) $\mathrm{R}(\boldsymbol{AB}) \leqslant \min(\mathrm{R}(\boldsymbol{A}), \mathrm{R}(\boldsymbol{B}))$.

证明. $\boldsymbol{AB}$ 的列向量组为 $\boldsymbol{A}$ 列向量组的线性组合，从而 $\boldsymbol{AB}$ 的列秩 $\leqslant$ $\boldsymbol{A}$ 的列秩，即 $\mathrm{R}(\boldsymbol{AB}) \leqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{A})$.

矩阵秩的性质

命题.

(4) $\mathrm{R}(\boldsymbol{AB}) \leqslant \min\big(\mathrm{R}(\boldsymbol{A}), \mathrm{R}(\boldsymbol{B})\big)$.

证明. $\boldsymbol{AB}$ 的列向量组为 $\boldsymbol{A}$ 列向量组的线性组合，从而 $\boldsymbol{AB}$ 的列秩 $\leqslant$ $\boldsymbol{A}$ 的列秩，即 $\mathrm{R}(\boldsymbol{AB}) \leqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{A})$. 于是

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{AB}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) \leqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{B}).$$

□

命题.

(4) $\mathrm{R}(\boldsymbol{AB}) \leqslant \min(\mathrm{R}(\boldsymbol{A}), \mathrm{R}(\boldsymbol{B}))$.

证明. $\boldsymbol{AB}$ 的列向量组为 $\boldsymbol{A}$ 列向量组的线性组合, 从而 $\boldsymbol{AB}$ 的列秩 $\leqslant$ $\boldsymbol{A}$ 的列秩, 即 $\mathrm{R}(\boldsymbol{AB}) \leqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{A})$. 于是

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{AB}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) \leqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{B}).$$ □

若 $\boldsymbol{B}$ 行满秩, 则 $\boldsymbol{B}$ 有 $\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$ 阶子式非零, 它对应的方阵右乘 $\boldsymbol{A}$ 得到的列向量组和 $\boldsymbol{A}$ 列向量组等价, 从而 $\mathrm{R}(\boldsymbol{AB}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A})$;

命题.

(4) $\mathrm{R}(\boldsymbol{AB}) \leqslant \min\big(\mathrm{R}(\boldsymbol{A}), \mathrm{R}(\boldsymbol{B})\big)$.

证明. $\boldsymbol{AB}$ 的列向量组为 $\boldsymbol{A}$ 列向量组的线性组合，从而 $\boldsymbol{AB}$ 的列秩 $\leqslant$ $\boldsymbol{A}$ 的列秩，即 $\mathrm{R}(\boldsymbol{AB}) \leqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{A})$. 于是

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{AB}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) \leqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{B}).$$

□

若 $\boldsymbol{B}$ 行满秩，则 $\boldsymbol{B}$ 有 $\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$ 阶子式非零，它对应的方阵右乘 $\boldsymbol{A}$ 得到的列向量组和 $\boldsymbol{A}$ 列向量组等价，从而 $\mathrm{R}(\boldsymbol{AB}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A})$; 若 $\boldsymbol{B}$ 列满秩，则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{BA}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A})$;

命题.

命题.

(5) 若 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times \ell}=\boldsymbol{O}$, 则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{B})\leqslant n$.

命题.

(5) 若 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times \ell}=\boldsymbol{O}$, 则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{B})\leqslant n$.

证明. 我们将会 §2.4 证明空间

$$V=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$$

的维数是 $n-\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$.

命题.

(5) 若 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times \ell}=\boldsymbol{O}$, 则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{B})\leqslant n$.

证明. 我们将会 §2.4 证明空间

$$V=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}\}$$

的维数是 $n-\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$. 设

$$W=\{\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}\mid \boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^\ell\}$$

是 $\boldsymbol{B}$ 列向量生成的空间,

命题.

(5) 若 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times \ell}=\boldsymbol{O}$, 则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{B})\leqslant n$.

证明. 我们将会 §2.4 证明空间

$$V=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$$

的维数是 $n-\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$. 设

$$W=\{\boldsymbol{B}\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^{\ell}\}$$

是 $\boldsymbol{B}$ 列向量生成的空间, 则 W 的维数是 $\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$. 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$ 可知 $W\subseteq V$, 因此 $\mathrm{R}(\boldsymbol{B})\leqslant n-\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$. □

命题.

矩阵秩的性质

命题.

(6) $\mathrm{R}(a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B}) \leqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \leqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$.

特别地, $\max\big(\mathrm{R}(\boldsymbol{A}),\mathrm{R}(\boldsymbol{B})\big) \leqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$.

矩阵秩的性质

命题.

(6) $\mathrm{R}(a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B}) \leqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \leqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$.
特别地, $\max\big(\mathrm{R}(\boldsymbol{A}),\mathrm{R}(\boldsymbol{B})\big) \leqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$.

证明. 设 S, T 分别为 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 列向量组的极大线性无关组,

命题.

(6) $\mathrm{R}(a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B}) \leqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \leqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$.
特别地, $\max(\mathrm{R}(\boldsymbol{A}),\mathrm{R}(\boldsymbol{B})) \leqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$.

证明. 设 S, T 分别为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 列向量组的极大线性无关组, 则 S, T 的大小分别是 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$, $\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$.

命题.

(6) $\mathrm{R}(a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B}) \leqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \leqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$.
特别地, $\max(\mathrm{R}(\boldsymbol{A}),\mathrm{R}(\boldsymbol{B})) \leqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$.

证明. 设 S, T 分别为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 列向量组的极大线性无关组, 则 S, T 的大小分别是 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$, $\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$. 由于 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 的列向量组和 $S\cup T$ 向量组等价, 因此

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = \mathrm{R}(S\cup T) \leqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{B}).$$

命题.

(6) $\mathrm{R}(a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B})\leqslant\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\leqslant\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$.
特别地, $\max\big(\mathrm{R}(\boldsymbol{A}),\mathrm{R}(\boldsymbol{B})\big)\leqslant\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$.

证明. 设 S, T 分别为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 列向量组的极大线性无关组, 则 S, T 的大小分别是 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$, $\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$. 由于 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 的列向量组和 $S\cup T$ 向量组等价, 因此

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\mathrm{R}(S\cup T)\leqslant\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{B}).$$

由于 $a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B}$ 的列向量组可以由 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 的列向量组线性表示, 因此

$$\mathrm{R}(a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B})\leqslant\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}).$$

□

另证. 由于添加零行或零列不改变秩，因此不妨设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是方阵. □

矩阵秩的性质

另证. 由于添加零行或零列不改变秩, 因此不妨设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是方阵. 由于

$$a\boldsymbol{A} + b\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})\begin{pmatrix} a\boldsymbol{E} \\ b\boldsymbol{E} \end{pmatrix}, \quad (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E})\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \\ & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}.$$

□

另证. 由于添加零行或零列不改变秩, 因此不妨设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是方阵. 由于

$$a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\begin{pmatrix}a\boldsymbol{E}\\ b\boldsymbol{E}\end{pmatrix},\quad (\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{E},\boldsymbol{E})\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \\ & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}.$$

因此 $\mathrm{R}(a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B})\leqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\leqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$. □

另证. 由于添加零行或零列不改变秩，因此不妨设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是方阵. 由于

$$a\boldsymbol{A} + b\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \begin{pmatrix} a\boldsymbol{E} \\ b\boldsymbol{E} \end{pmatrix}, \quad (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}) \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \\ & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}.$$

因此 $\mathrm{R}(a\boldsymbol{A} + b\boldsymbol{B}) \leqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \leqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{R}(\boldsymbol{B})$. □

一般地有 Frobenius 不等式:

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{ABC}) \geqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{AB}) + \mathrm{R}(\boldsymbol{BC}) - \mathrm{R}(\boldsymbol{B}).$$

另证. 由于添加零行或零列不改变秩, 因此不妨设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是方阵. 由于

$$a\boldsymbol{A} + b\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \begin{pmatrix} a\boldsymbol{E} \\ b\boldsymbol{E} \end{pmatrix}, \quad (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}) \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \\ & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}.$$

因此 $\mathrm{R}(a\boldsymbol{A} + b\boldsymbol{B}) \leqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \leqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{R}(\boldsymbol{B})$. □

一般地有 Frobenius 不等式:

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{ABC}) \geqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{AB}) + \mathrm{R}(\boldsymbol{BC}) - \mathrm{R}(\boldsymbol{B}).$$

$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{O}$ 可得 $\mathrm{R}(\boldsymbol{AB}) \leqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{B})$;

另证. 由于添加零行或零列不改变秩，因此不妨设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是方阵．由于

$$a\boldsymbol{A} + b\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})\begin{pmatrix} a\boldsymbol{E} \\ b\boldsymbol{E} \end{pmatrix}, \quad (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E})\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \\ & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}.$$

因此 $\mathrm{R}(a\boldsymbol{A} + b\boldsymbol{B}) \leqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \leqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{R}(\boldsymbol{B})$. □

一般地有 Frobenius 不等式:

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{ABC}) \geqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{AB}) + \mathrm{R}(\boldsymbol{BC}) - \mathrm{R}(\boldsymbol{B}).$$

$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{O}$ 可得 $\mathrm{R}(\boldsymbol{AB}) \leqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{B})$; $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}$ 可得 Sylvester 不等式:

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{AB}) \geqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{R}(\boldsymbol{B}) - n.$$

练习.

矩阵秩性质的应用

练习.

(1) 设 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=2, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{AB})=$______.

矩阵秩性质的应用

练习.

(1) 设 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=2, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{AB})=$ ___2___.

练习.

(1) 设 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=2, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{AB})=$___2___.

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵且 $\mathrm{R}(\boldsymbol{AB})<\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$, 则 $|\boldsymbol{A}|=$______.

练习.

(1) 设 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=2, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{AB})=$ __2__.

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵且 $\mathrm{R}(\boldsymbol{AB})<\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$, 则 $|\boldsymbol{A}|=$ __0__.

练习.

(1) 设 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = 2, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{AB}) =$ __2__.

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵且 $\mathrm{R}(\boldsymbol{AB}) < \mathrm{R}(\boldsymbol{B})$, 则 $|\boldsymbol{A}| =$ __0__.

(3) 若 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & t \end{pmatrix}, \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ 且 $\mathrm{R}(\boldsymbol{X}) = 2$, 则 $t =$ ______.

练习.

(1) 设 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=2, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\-1&0&3\end{pmatrix}$, 则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{AB})=$ __2__.

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵且 $\mathrm{R}(\boldsymbol{AB})<\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$, 则 $|\boldsymbol{A}|=$ __0__.

(3) 若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\2&0&5\end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&4&1\\1&2&1\\4&6&t\end{pmatrix}, \boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 且 $\mathrm{R}(\boldsymbol{X})=2$, 则 $t=$ __2__.

练习.

(1) 设 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=2, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{AB})=\underline{\quad 2 \quad}$.

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵且 $\mathrm{R}(\boldsymbol{AB})<\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$, 则 $|\boldsymbol{A}|=\underline{\quad 0 \quad}$.

(3) 若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & t \end{pmatrix}, \boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 且 $\mathrm{R}(\boldsymbol{X})=2$, 则 $t=\underline{\quad 2 \quad}$.

(4) 若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} t & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ 且存在非零矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$, 则 $t=\underline{\qquad}$.

练习.

(1) 设 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=2, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{AB})=$ <u>2</u>.

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵且 $\mathrm{R}(\boldsymbol{AB})<\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$, 则 $|\boldsymbol{A}|=$ <u>0</u>.

(3) 若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & t \end{pmatrix}, \boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 且 $\mathrm{R}(\boldsymbol{X})=2$, 则 $t=$ <u>2</u>.

(4) 若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} t & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ 且存在非零矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$, 则 $t=$ <u>4</u>.

例：矩阵秩性质的应用

例. 证明：若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$.

例：矩阵秩性质的应用

例. 证明：若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$，则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{R}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}) = n$.

证明. 由于 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}) = \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$，因此

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{R}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}) \leqslant n.$$

例. 证明：若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$, 则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$.

证明. 由于 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$, 因此

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\leqslant n.$$

由于 $\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{E}$, 因此

$$n=\mathrm{R}(\boldsymbol{E})\leqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}).$$

例：矩阵秩性质的应用

例. 证明：若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$.

证明. 由于 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，因此

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\leqslant n.$$

由于 $\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{E}$，因此

$$n=\mathrm{R}(\boldsymbol{E})\leqslant\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}).$$

故 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$. □

例：矩阵秩性质的应用

定理 (伴随矩阵的秩). 设 A 是 n 阶方阵，则

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^*) = \begin{cases} n, & \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n; \\ 1, & \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n-1; \\ 0, & \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) \leqslant n-2. \end{cases}$$

定理 (伴随矩阵的秩). 设 A 是 n 阶方阵，则

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^*) = \begin{cases} n, & \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n; \\ 1, & \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n-1; \\ 0, & \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) \leqslant n-2. \end{cases}$$

证明.

例：矩阵秩性质的应用

定理 (伴随矩阵的秩). 设 A 是 n 阶方阵，则

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^*) = \begin{cases} n, & \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n; \\ 1, & \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n-1; \\ 0, & \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) \leqslant n-2. \end{cases}$$

证明.

(1) 若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n$, $\boldsymbol{A}$ 可逆, 从而 $\boldsymbol{A}^*$ 可逆, $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^*) = n$.

例：矩阵秩性质的应用

定理 (伴随矩阵的秩). 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，则

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^*) = \begin{cases} n, & \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n; \\ 1, & \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n-1; \\ 0, & \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) \leqslant n-2. \end{cases}$$

证明.

(1) 若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n$，$\boldsymbol{A}$ 可逆，从而 $\boldsymbol{A}^*$ 可逆，$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^*) = n$.

(2) 若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n-1$，由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$ 可知 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^*) \leqslant 1$.

例：矩阵秩性质的应用

定理 (伴随矩阵的秩). 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，则

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^*) = \begin{cases} n, & \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n; \\ 1, & \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n-1; \\ 0, & \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) \leqslant n-2. \end{cases}$$

证明.

(1) 若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n$，$\boldsymbol{A}$ 可逆，从而 $\boldsymbol{A}^*$ 可逆，$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^*) = n$.

(2) 若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n-1$，由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$ 可知 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^*) \leqslant 1$. 由于 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n-1$，$\boldsymbol{A}$ 存在非零的 $n-1$ 子式，从而 $\boldsymbol{A}^* \neq \boldsymbol{O}$.

例：矩阵秩性质的应用

定理 (伴随矩阵的秩). 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，则

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^*) = \begin{cases} n, & \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n; \\ 1, & \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n-1; \\ 0, & \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) \leqslant n-2. \end{cases}$$

证明.

(1) 若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n$, $\boldsymbol{A}$ 可逆，从而 $\boldsymbol{A}^*$ 可逆，$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^*) = n$.

(2) 若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n-1$, 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$ 可知 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^*) \leqslant 1$. 由于 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n-1$, $\boldsymbol{A}$ 存在非零的 $n-1$ 子式，从而 $\boldsymbol{A}^* \neq \boldsymbol{O}$. 故 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^*) = 1$.

定理 (伴随矩阵的秩). 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，则

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^*) = \begin{cases} n, & \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n; \\ 1, & \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n-1; \\ 0, & \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) \leqslant n-2. \end{cases}$$

证明.

(1) 若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n$, $\boldsymbol{A}$ 可逆，从而 $\boldsymbol{A}^*$ 可逆，$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^*) = n$.

(2) 若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n-1$, 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$ 可知 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^*) \leqslant 1$. 由于 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n-1$, $\boldsymbol{A}$ 存在非零的 $n-1$ 子式，从而 $\boldsymbol{A}^* \neq \boldsymbol{O}$. 故 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^*) = 1$.

(3) 若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) \leqslant n-2$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-1$ 子式均为零，从而 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{O}$. □

练习.

练习.

(1) 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,-1,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(0,1,0,2)^{\mathrm{T}}$, 则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})=$______.

练习.

(1) 设 $\boldsymbol{\alpha} = (1, 0, -1, 2)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta} = (0, 1, 0, 2)^{\mathrm{T}}$, 则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}) = \underline{\quad 1 \quad}$.

练习.

(1) 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,-1,2)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}=(0,1,0,2)^{\mathrm{T}}$，则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})=$___1___.

(2) 若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ 且 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^*)=1$，则(　　).

(A) $a\neq b, a+2b\neq 0$　　(B) $a\neq b, a+2b=0$

(C) $a=b, a\neq 0$　　(D) $a=b=0$

练习.

(1) 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,-1,2)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}=(0,1,0,2)^{\mathrm{T}}$, 则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})=$ __1__.

(2) 若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ 且 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^*)=1$, 则(B).

(A) $a\neq b, a+2b\neq 0$

(B) $a\neq b, a+2b=0$

(C) $a=b, a\neq 0$

(D) $a=b=0$

例：矩阵秩性质的应用

练习.

(1) 设 $\boldsymbol{\alpha} = (1, 0, -1, 2)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta} = (0, 1, 0, 2)^{\mathrm{T}}$，则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}) =$ __1__.

(2) 若 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ 且 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^*) = 1$，则(B).

(A) $a \neq b, a + 2b \neq 0$　　(B) $a \neq b, a + 2b = 0$

(C) $a = b, a \neq 0$　　(D) $a = b = 0$

(3) 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 n 阶非零矩阵，且 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$，则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$ 与 $\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$(　　).

(A) 必有一个等于 0　　(B) 都小于 n

(C) 都等于 n　　(D) 一个小于 n，一个等于 n

例：矩阵秩性质的应用

练习.

(1) 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,-1,2)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}=(0,1,0,2)^{\mathrm{T}}$，则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})=$ __1__.

(2) 若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ 且 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^*)=1$，则(B).

(A) $a\neq b, a+2b\neq 0$　　(B) $a\neq b, a+2b=0$

(C) $a=b, a\neq 0$　　(D) $a=b=0$

(3) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶非零矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$ 与 $\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$(B).

(A) 必有一个等于 0　　(B) 都小于 n

(C) 都等于 n　　(D) 一个小于 n，一个等于 n

练习.

练习.

(4) 设 $\boldsymbol{P}$ 为 3 阶非零矩阵, $\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & t \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ 且 $\boldsymbol{PQ} = \boldsymbol{O}$, 则(　　).

(A) $t \neq 6$ 时, $\mathrm{R}(\boldsymbol{P}) = 1$

(B) $t \neq 6$ 时, $\mathrm{R}(\boldsymbol{P}) = 2$

(C) $t = 6$ 时, $\mathrm{R}(\boldsymbol{P}) = 1$

(D) $t = 6$ 时, $\mathrm{R}(\boldsymbol{P}) = 2$

练习.

(4) 设 $\boldsymbol{P}$ 为 3 阶非零矩阵, $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&t\\3&6&9\end{pmatrix}$ 且 $\boldsymbol{PQ}=\boldsymbol{O}$, 则(A).

(A) $t\neq 6$ 时, $\mathrm{R}(\boldsymbol{P})=1$

(B) $t\neq 6$ 时, $\mathrm{R}(\boldsymbol{P})=2$

(C) $t=6$ 时, $\mathrm{R}(\boldsymbol{P})=1$

(D) $t=6$ 时, $\mathrm{R}(\boldsymbol{P})=2$

例：矩阵秩性质的应用

练习.

(4) 设 $\boldsymbol{P}$ 为 3 阶非零矩阵, $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&t\\3&6&9\end{pmatrix}$ 且 $\boldsymbol{PQ}=\boldsymbol{O}$, 则(A).

(A) $t\neq 6$ 时, $\mathrm{R}(\boldsymbol{P})=1$　　(B) $t\neq 6$ 时, $\mathrm{R}(\boldsymbol{P})=2$

(C) $t=6$ 时, $\mathrm{R}(\boldsymbol{P})=1$　　(D) $t=6$ 时, $\mathrm{R}(\boldsymbol{P})=2$

(5) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵, 则(　　).

(A) $\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{AB})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$　　(B) $\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{BA})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$

(C) $\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{AB})=\max\big(\mathrm{R}(\boldsymbol{A}),\mathrm{R}(\boldsymbol{B})\big)$　　(D) $\mathrm{R}(\boldsymbol{AB})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})$

练习.

(4) 设 $\boldsymbol{P}$ 为 3 阶非零矩阵, $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&t\\3&6&9\end{pmatrix}$ 且 $\boldsymbol{PQ}=\boldsymbol{O}$, 则(A).

(A) $t\neq 6$ 时, $\mathrm{R}(\boldsymbol{P})=1$　　(B) $t\neq 6$ 时, $\mathrm{R}(\boldsymbol{P})=2$

(C) $t=6$ 时, $\mathrm{R}(\boldsymbol{P})=1$　　(D) $t=6$ 时, $\mathrm{R}(\boldsymbol{P})=2$

(5) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵, 则(A).

(A) $\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{AB})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$　　(B) $\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{BA})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$

(C) $\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{AB})=\max\big(\mathrm{R}(\boldsymbol{A}),\mathrm{R}(\boldsymbol{B})\big)$　　(D) $\mathrm{R}(\boldsymbol{AB})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})$

例：矩阵秩性质的应用

练习.

(4) 设 $\boldsymbol{P}$ 为 3 阶非零矩阵, $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&t\\3&6&9\end{pmatrix}$ 且 $\boldsymbol{PQ}=\boldsymbol{O}$, 则(A).

(A) $t\neq 6$ 时, $\mathrm{R}(\boldsymbol{P})=1$　　(B) $t\neq 6$ 时, $\mathrm{R}(\boldsymbol{P})=2$

(C) $t=6$ 时, $\mathrm{R}(\boldsymbol{P})=1$　　(D) $t=6$ 时, $\mathrm{R}(\boldsymbol{P})=2$

(5) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵, 则(A).

(A) $\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{AB})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$　　(B) $\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{BA})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$

(C) $\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{AB})=\max\big(\mathrm{R}(\boldsymbol{A}),\mathrm{R}(\boldsymbol{B})\big)$　　(D) $\mathrm{R}(\boldsymbol{AB})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})$

答案. 存在 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O},\boldsymbol{BA}\neq\boldsymbol{O}$, D 错误. 令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$, C 错误. $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{B})$ 行满秩, 选 A.

例：矩阵秩性质的应用

练习.

(6) 设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}, \boldsymbol{B} \in M_{n\times m}$, 则(　　).

(A) 当 $m > n$ 时, 必有 $|\boldsymbol{AB}| = 0$

(B) 当 $m > n$ 时, 必有 $|\boldsymbol{AB}| \neq 0$

(C) 当 $m < n$ 时, 必有 $|\boldsymbol{AB}| = 0$

(D) 当 $m < n$ 时, 必有 $|\boldsymbol{AB}| \neq 0$

练习.

(6) 设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}, \boldsymbol{B} \in M_{n\times m}$, 则(A).

(A) 当 $m > n$ 时，必有 $|\boldsymbol{AB}| = 0$

(B) 当 $m > n$ 时，必有 $|\boldsymbol{AB}| \neq 0$

(C) 当 $m < n$ 时，必有 $|\boldsymbol{AB}| = 0$

(D) 当 $m < n$ 时，必有 $|\boldsymbol{AB}| \neq 0$

例：矩阵秩性质的应用

练习.

(6) 设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}, \boldsymbol{B} \in M_{n\times m}$, 则(A).

(A) 当 $m > n$ 时, 必有 $|\boldsymbol{AB}| = 0$ (B) 当 $m > n$ 时, 必有 $|\boldsymbol{AB}| \neq 0$

(C) 当 $m < n$ 时, 必有 $|\boldsymbol{AB}| = 0$ (D) 当 $m < n$ 时, 必有 $|\boldsymbol{AB}| \neq 0$

(7) 设 $\boldsymbol{A} \in M_{n\times m}, \boldsymbol{B} \in M_{m\times n}, n < m$. 若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$, 则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{B}) =$______.

例：矩阵秩性质的应用

练习.

(6) 设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}, \boldsymbol{B} \in M_{n\times m}$, 则(A).

(A) 当 $m > n$ 时, 必有 $|\boldsymbol{AB}| = 0$　　(B) 当 $m > n$ 时, 必有 $|\boldsymbol{AB}| \neq 0$

(C) 当 $m < n$ 时, 必有 $|\boldsymbol{AB}| = 0$　　(D) 当 $m < n$ 时, 必有 $|\boldsymbol{AB}| \neq 0$

(7) 设 $\boldsymbol{A} \in M_{n\times m}, \boldsymbol{B} \in M_{m\times n}, n < m$. 若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$, 则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{B}) = \underline{\quad n \quad}$.

例：矩阵秩性质的应用

练习.

(6) 设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}, \boldsymbol{B} \in M_{n\times m}$, 则(A).

(A) 当 $m > n$ 时，必有 $|\boldsymbol{AB}| = 0$　　(B) 当 $m > n$ 时，必有 $|\boldsymbol{AB}| \neq 0$

(C) 当 $m < n$ 时，必有 $|\boldsymbol{AB}| = 0$　　(D) 当 $m < n$ 时，必有 $|\boldsymbol{AB}| \neq 0$

(7) 设 $\boldsymbol{A} \in M_{n\times m}, \boldsymbol{B} \in M_{m\times n}, n < m$. 若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$, 则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{B}) = \underline{\quad n \quad}$.

(8) 若 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a+2 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ a+3 & a+6 & a+4 \end{pmatrix}$ 等价，则(　　).

(A) $a = -1$　　(B) $a \neq -1$　　(C) $a \neq 1$　　(D) $a = 1$

例：矩阵秩性质的应用

练习.

(6) 设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}, \boldsymbol{B} \in M_{n\times m}$, 则(A).

(A) 当 $m > n$ 时，必有 $|\boldsymbol{AB}| = 0$　　(B) 当 $m > n$ 时，必有 $|\boldsymbol{AB}| \neq 0$

(C) 当 $m < n$ 时，必有 $|\boldsymbol{AB}| = 0$　　(D) 当 $m < n$ 时，必有 $|\boldsymbol{AB}| \neq 0$

(7) 设 $\boldsymbol{A} \in M_{n\times m}, \boldsymbol{B} \in M_{m\times n}, n < m$. 若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$, 则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{B}) = \underline{\quad n \quad}$.

(8) 若 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a+2 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ a+3 & a+6 & a+4 \end{pmatrix}$ 等价，则(B).

(A) $a = -1$　　(B) $a \neq -1$　　(C) $a \neq 1$　　(D) $a = 1$

练习.

(6) 设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}, \boldsymbol{B} \in M_{n\times m}$, 则(A).

(A) 当 $m > n$ 时, 必有 $|\boldsymbol{AB}| = 0$　　(B) 当 $m > n$ 时, 必有 $|\boldsymbol{AB}| \neq 0$

(C) 当 $m < n$ 时, 必有 $|\boldsymbol{AB}| = 0$　　(D) 当 $m < n$ 时, 必有 $|\boldsymbol{AB}| \neq 0$

(7) 设 $\boldsymbol{A} \in M_{n\times m}, \boldsymbol{B} \in M_{m\times n}, n < m$. 若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$, 则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{B}) = \underline{\quad n \quad}$.

(8) 若 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a+2 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ a+3 & a+6 & a+4 \end{pmatrix}$ 等价, 则(B).

(A) $a = -1$　　(B) $a \neq -1$　　(C) $a \neq 1$　　(D) $a = 1$

(9) 设四阶方阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)$ 满足 $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 - 2\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{\alpha}_2 + 5\boldsymbol{\alpha}_4 = \boldsymbol{0}$, 则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^*) = \underline{\qquad}$.

练习.

(6) 设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}, \boldsymbol{B} \in M_{n\times m}$, 则(A).

(A) 当 $m > n$ 时, 必有 $|\boldsymbol{AB}| = 0$ (B) 当 $m > n$ 时, 必有 $|\boldsymbol{AB}| \neq 0$

(C) 当 $m < n$ 时, 必有 $|\boldsymbol{AB}| = 0$ (D) 当 $m < n$ 时, 必有 $|\boldsymbol{AB}| \neq 0$

(7) 设 $\boldsymbol{A} \in M_{n\times m}, \boldsymbol{B} \in M_{m\times n}, n < m$. 若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$, 则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{B}) = \underline{\quad n \quad}$.

(8) 若 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a+2 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ a+3 & a+6 & a+4 \end{pmatrix}$ 等价, 则(B).

(A) $a = -1$ (B) $a \neq -1$ (C) $a \neq 1$ (D) $a = 1$

(9) 设四阶方阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)$ 满足 $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 - 2\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}, \boldsymbol{\alpha}_2 + 5\boldsymbol{\alpha}_4 = \mathbf{0}$, 则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^*) = \underline{\quad 0 \quad}$.

线性相关的不变性

定理. 若 A 经过初等行变换变为 B, 则

线性相关的不变性

定理. 若 A 经过初等行变换变为 B, 则

(1) A 的行向量组与 B 的行向量组等价;

线性相关的不变性

定理. 若 A 经过初等行变换变为 B, 则

(1) A 的行向量组与 B 的行向量组等价;

(2) A 任意 k 列和 B 对应的 k 列具有相同的线性相关性.

定理. 若 A 经过初等行变换变为 B, 则

(1) A 的行向量组与 B 的行向量组等价;

(2) A 任意 k 列和 B 对应的 k 列具有相同的线性相关性.

即初等行变换保持行向量组的等价性, 列向量组的线性组合关系.

定理. 若 A 经过初等行变换变为 B, 则

(1) A 的行向量组与 B 的行向量组等价;

(2) A 任意 k 列和 B 对应的 k 列具有相同的线性相关性.

即初等行变换保持行向量组的等价性, 列向量组的线性组合关系.

证明. (1)我们已经证明过.

线性相关的不变性

定理. 若 A 经过初等行变换变为 B, 则

(1) A 的行向量组与 B 的行向量组等价;

(2) A 任意 k 列和 B 对应的 k 列具有相同的线性相关性.

即初等行变换保持行向量组的等价性, 列向量组的线性组合关系.

证明. (1)我们已经证明过. 设 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}$, 其中 $\boldsymbol{P}$ 是可逆矩阵.

线性相关的不变性

定理. 若 A 经过初等行变换变为 B, 则

(1) A 的行向量组与 B 的行向量组等价;

(2) A 任意 k 列和 B 对应的 k 列具有相同的线性相关性.

即**初等行变换保持行向量组的等价性, 列向量组的线性组合关系**.

证明. (1)我们已经证明过. 设 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}$, 其中 $\boldsymbol{P}$ 是可逆矩阵. 若 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, 则 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. 反之亦然, 即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \iff \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

定理. 若 A 经过初等行变换变为 B, 则
(1) A 的行向量组与 B 的行向量组等价;
(2) A 任意 k 列和 B 对应的 k 列具有相同的线性相关性.

即初等行变换保持行向量组的等价性, 列向量组的线性组合关系.

证明. (1)我们已经证明过. 设 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}$, 其中 $\boldsymbol{P}$ 是可逆矩阵. 若 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 反之亦然, 即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \iff \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 设

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m), \qquad \boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_m).$$

定理. 若 A 经过初等行变换变为 B, 则
(1) A 的行向量组与 B 的行向量组等价;
(2) A 任意 k 列和 B 对应的 k 列具有相同的线性相关性.

即**初等行变换保持行向量组的等价性, 列向量组的线性组合关系**.

证明. (1)我们已经证明过. 设 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}$, 其中 $\boldsymbol{P}$ 是可逆矩阵. 若 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. 反之亦然, 即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \iff \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. 设

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m), \qquad \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_m).$$

则对于 $\boldsymbol{x} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)^{\mathrm{T}}$,

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m = \boldsymbol{0} \iff \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \lambda_1\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + \lambda_m\boldsymbol{\beta}_m = \boldsymbol{0}.$$

□

极大线性无关组和秩的计算方法.

极大线性无关组和秩的计算方法.

(1) 将向量组以列向量形式组成矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m)$.

极大线性无关组和秩的计算方法

极大线性无关组和秩的计算方法.

(1) 将向量组以列向量形式组成矩阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_m)$.

(2) 通过初等行变换将 $\boldsymbol{A}$ 变为行阶梯形矩阵.

极大线性无关组和秩的计算方法.

(1) 将向量组以列向量形式组成矩阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m)$.

(2) 通过初等行变换将 $\boldsymbol{A}$ 变为行阶梯形矩阵.

- 行阶梯形矩阵非零行的行数就是秩 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$;

极大线性无关组和秩的计算方法.

(1) 将向量组以列向量形式组成矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m)$.

(2) 通过初等行变换将 $\boldsymbol{A}$ 变为行阶梯形矩阵.

- 行阶梯形矩阵非零行的行数就是秩 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$;
- 行阶梯形矩阵每个非零行的首个非零元对应的 $\boldsymbol{A}$ 的列向量, 就是极大线性无关组.

极大线性无关组和秩的计算方法.

(1) 将向量组以列向量形式组成矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m)$.

(2) 通过初等行变换将 $\boldsymbol{A}$ 变为行阶梯形矩阵.

- 行阶梯形矩阵非零行的行数就是秩 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$;
- 行阶梯形矩阵每个非零行的首个非零元对应的 $\boldsymbol{A}$ 的列向量, 就是极大线性无关组.

(3) 继续化简为行最简形矩阵, 则可将其余向量表示为极大线性无关组的线性组合.

例. 求下述向量组的秩和一个极大无关组，并把其余向量用这个极大无关组线性表示:

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 1 \\ -11 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{\alpha}_5 = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \\ -11 \end{pmatrix}.$$

典型例题：求极大线性无关组

例. 求下述向量组的秩和一个极大无关组，并把其余向量用这个极大无关组线性表示:

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-7\\-2\\1\\-11\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\5\\8\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\4\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}5\\3\\-7\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}-4\\-2\\1\\-11\end{pmatrix}.$$

解.

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)=\begin{pmatrix}-7&1&3&5&-4\\-2&-1&1&3&-2\\1&5&-1&-7&1\\-11&8&4&0&-11\end{pmatrix}$$

续解.

$$\underset{\sim}{r_1 \leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -7 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 3 & -2 \\ -7 & 1 & 3 & 5 & -4 \\ -11 & 8 & 4 & 0 & -11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -7 & 1 \\ 0 & 9 & -1 & -11 & 0 \\ 0 & 36 & -4 & -44 & 3 \\ 0 & 63 & -7 & -77 & 0 \end{pmatrix}$$

典型例题：求极大线性无关组

续解.

$$
r_1 \leftrightarrow r_3 \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -7 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 3 & -2 \\ -7 & 1 & 3 & 5 & -4 \\ -11 & 8 & 4 & 0 & -11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -7 & 1 \\ 0 & 9 & -1 & -11 & 0 \\ 0 & 36 & -4 & -44 & 3 \\ 0 & 63 & -7 & -77 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -7 & 1 \\ 0 & 9 & -1 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -4/9 & -8/9 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1/9 & -11/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

续解.

$$\underset{\smile}{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -7 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 3 & -2 \\ -7 & 1 & 3 & 5 & -4 \\ -11 & 8 & 4 & 0 & -11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -7 & 1 \\ 0 & 9 & -1 & -11 & 0 \\ 0 & 36 & -4 & -44 & 3 \\ 0 & 63 & -7 & -77 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -7 & 1 \\ 0 & 9 & -1 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -4/9 & -8/9 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1/9 & -11/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因此 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = 3, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_5$ 是一个极大线性无关组，且

$$\boldsymbol{\alpha}_3 = -\frac{4}{9}\boldsymbol{\alpha}_1 - \frac{1}{9}\boldsymbol{\alpha}_2, \quad \boldsymbol{\alpha}_4 = -\frac{8}{9}\boldsymbol{\alpha}_1 - \frac{11}{9}\boldsymbol{\alpha}_2.$$

练习. 求下述矩阵列向量的一个极大无关组，并把其余向量用这个极大无关组线性表示：

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

练习. 求下述矩阵列向量的一个极大无关组，并把其余向量用这个极大无关组线性表示：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4\\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4\\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

典型例题：求极大线性无关组

练习. 求下述矩阵列向量的一个极大无关组，并把其余向量用这个极大无关组线性表示：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4\\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4\\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

答案. 设 $\boldsymbol{\alpha}_j$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是一个极大线性无关组，且

$$\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\quad \boldsymbol{\alpha}_5=4\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_4.$$

例. 假设下述向量组线性相关

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,1,1,2),\ \boldsymbol{\alpha}_2 = (2,1,3,2,3),\ \boldsymbol{\alpha}_3 = (2,3,3,2,3),\ \boldsymbol{\alpha}_4 = (1,3,-1,1,a).$$

求 a，并求它的秩和一个极大无关组，并把其余向量用这个极大无关组线性表示.

例. 假设下述向量组线性相关

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,1,2),\ \boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,3,2,3),\ \boldsymbol{\alpha}_3=(2,3,3,2,3),\ \boldsymbol{\alpha}_4=(1,3,-1,1,a).$$

求 a, 并求它的秩和一个极大无关组, 并把其余向量用这个极大无关组线性表示.

解.

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}})\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&5\\0&1&0&-2\\0&0&1&0\\0&0&0&a-4\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

例. 假设下述向量组线性相关

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,1,1,2),\ \boldsymbol{\alpha}_2 = (2,1,3,2,3),\ \boldsymbol{\alpha}_3 = (2,3,3,2,3),\ \boldsymbol{\alpha}_4 = (1,3,-1,1,a).$$

求 a，并求它的秩和一个极大无关组，并把其余向量用这个极大无关组线性表示.

解.

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}}) \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此 $a=4$，秩为 3，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是一个极大线性无关组，且 $\boldsymbol{\alpha}_4 = 5\boldsymbol{\alpha}_1 - 2\boldsymbol{\alpha}_2$.

例：线性相关与线性无关

练习.

例：线性相关与线性无关

练习.

(1) 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经初等行变换化为 $\boldsymbol{B}$, 则二者的(　　).

(A) 行向量组等价, 列向量组同相关性

(B) 行向量组同相关性, 列向量组等价

(C) 行向量组未必等价, 列向量组同相关性

(D) 行向量组等价, 列向量组未必同相关性

练习.

(1) 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经初等行变换化为 $\boldsymbol{B}$, 则二者的(A).

(A) 行向量组等价, 列向量组同相关性

(B) 行向量组同相关性, 列向量组等价

(C) 行向量组未必等价, 列向量组同相关性

(D) 行向量组等价, 列向量组未必同相关性

练习.

(1) 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经初等行变换化为 $\boldsymbol{B}$, 则二者的(A).

(A) 行向量组等价, 列向量组同相关性

(B) 行向量组同相关性, 列向量组等价

(C) 行向量组未必等价, 列向量组同相关性

(D) 行向量组等价, 列向量组未必同相关性

(2) 设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}, \boldsymbol{B} \in M_{n\times k}, \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}, \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{O}$, 则(   ).

(A) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关

(B) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关

(C) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关

(D) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关

练习.

(1) 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经初等行变换化为 $\boldsymbol{B}$, 则二者的(A).

(A) 行向量组等价, 列向量组同相关性

(B) 行向量组同相关性, 列向量组等价

(C) 行向量组未必等价, 列向量组同相关性

(D) 行向量组等价, 列向量组未必同相关性

(2) 设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}, \boldsymbol{B} \in M_{n\times k}, \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}, \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{O}$, 则(A).

(A) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关

(B) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关

(C) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关

(D) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关

练习. 多选题：设 $\boldsymbol{A}^*$ 是 $n > 1$ 阶方阵，以下说法正确的是(　　　　).

(A) 若 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关，则 $\boldsymbol{A}^*$ 的列向量组线性相关

(B) 若 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关，则 $\boldsymbol{A}^*$ 的列向量组线性无关

(C) 若 $\boldsymbol{A}^*$ 的某两列向量线性相关，则 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关

(D) 若 $\boldsymbol{A}^*$ 的某两列向量线性无关，则 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关

例：线性相关与线性无关

练习. 多选题：设 A^* 是 $n>1$ 阶方阵，以下说法正确的是(ABCD).

(A) 若 A 的列向量组线性相关，则 A^* 的列向量组线性相关

(B) 若 A 的列向量组线性无关，则 A^* 的列向量组线性无关

(C) 若 A^* 的某两列向量线性相关，则 A 的列向量组线性相关

(D) 若 A^* 的某两列向量线性无关，则 A 的列向量组线性无关

第四节　标准正交基

- 向量的内积
- 正交向量组与格拉姆-施密特正交化

引例：更好的基

本节考虑的向量都是实向量.

本节考虑的向量都是实向量.

设向量组 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$ 的秩为 r, 则它们生成的向量空间 V 的维数就是 r.

引例：更好的基

本节考虑的向量都是实向量.

设向量组 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$ 的秩为 r, 则它们生成的向量空间 V 的维数就是 r. S 的极大无关组 S_0 的大小就是 r, 且 S_0 是 V 的一组基.

本节考虑的向量都是实向量.

设向量组 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$ 的秩为 r, 则它们生成的向量空间 V 的维数就是 r. S 的极大无关组 S_0 的大小就是 r, 且 S_0 是 V 的一组基.

有时候我们想更进一步, 就像 $\mathbb{R}^n$ 的基本向量组 $\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n$ 一样, 我们希望找到 V 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 使得

本节考虑的向量都是实向量.

设向量组 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$ 的秩为 r, 则它们生成的向量空间 V 的维数就是 r. S 的极大无关组 S_0 的大小就是 r, 且 S_0 是 V 的一组基.

有时候我们想更进一步, 就像 $\mathbb{R}^n$ 的基本向量组 $\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n$ 一样, 我们希望找到 V 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 使得

(1) $\boldsymbol{\alpha}_i$ 长度都是 1;

本节考虑的向量都是实向量.

设向量组 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$ 的秩为 r, 则它们生成的向量空间 V 的维数就是 r. S 的极大无关组 S_0 的大小就是 r, 且 S_0 是 V 的一组基.

有时候我们想更进一步, 就像 $\mathbb{R}^n$ 的基本向量组 $\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n$ 一样, 我们希望找到 V 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 使得

(1) $\boldsymbol{\alpha}_i$ 长度都是 1;

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 两两垂直.

定义. 设 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, \ldots, a_n)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta} = (b_1, \ldots, b_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$, 定义**内积**

$$[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}] = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \in \mathbb{R}.$$

定义. 设 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, \dots, a_n)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta} = (b_1, \dots, b_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$, 定义**内积**

$$[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}] = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\alpha} = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \in \mathbb{R}.$$

内积是数量积的推广, 它满足

定义. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,\ldots,a_n)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(b_1,\ldots,b_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$, 定义**内积**

$$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=a_1b_1+\cdots+a_nb_n\in\mathbb{R}.$$

内积是数量积的推广, 它满足

(1) $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}]$;

定义. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,\ldots,a_n)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(b_1,\ldots,b_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$, 定义**内积**

$$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=a_1b_1+\cdots+a_nb_n\in\mathbb{R}.$$

内积是数量积的推广, 它满足

(1) $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}]$;

(2) $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}]\geqslant 0$. 当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 时, $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}]=0$;

定义. 设 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, \ldots, a_n)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta} = (b_1, \ldots, b_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$, 定义**内积**

$$[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}] = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\alpha} = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \in \mathbb{R}.$$

内积是数量积的推广, 它满足

(1) $[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}] = [\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}]$;

(2) $[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}] \geqslant 0$. 当且仅当 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ 时, $[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}] = 0$;

(3) $[\lambda \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}] = [\boldsymbol{\alpha}, \lambda \boldsymbol{\beta}] = \lambda [\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$;

定义. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,\ldots,a_n)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(b_1,\ldots,b_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$, 定义**内积**

$$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=a_1b_1+\cdots+a_nb_n\in\mathbb{R}.$$

内积是数量积的推广，它满足

(1) $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}]$;

(2) $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}]\geqslant 0$. 当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 时, $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}]=0$;

(3) $[\lambda\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=[\boldsymbol{\alpha},\lambda\boldsymbol{\beta}]=\lambda[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]$;

(4) $[\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}]=[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}]+[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}]$.

定义. 设 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, \ldots, a_n)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta} = (b_1, \ldots, b_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$，定义**内积**

$$[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}] = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \in \mathbb{R}.$$

内积是数量积的推广，它满足

(1) $[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}] = [\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}]$;

(2) $[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}] \geqslant 0$. 当且仅当 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ 时，$[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}] = 0$;

(3) $[\lambda\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}] = [\boldsymbol{\alpha}, \lambda\boldsymbol{\beta}] = \lambda[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$;

(4) $[\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}] = [\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}] + [\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}]$.

这说明内积是一个对称正定双线性型.

长度

定义. 设 $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, 定义 $\boldsymbol{x}$ 的**长度**或**模**为

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}]} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

当 $\|\boldsymbol{x}\| = 1$ 时, 称 $\boldsymbol{x}$ 为**单位向量**. 对于非零向量 $\boldsymbol{x}$, $\dfrac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}$ 为 $\boldsymbol{x}$ 的**单位化向量**.

长度

定义. 设 $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, 定义 $\boldsymbol{x}$ 的**长度**或**模**为

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}]} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

当 $\|\boldsymbol{x}\| = 1$ 时, 称 $\boldsymbol{x}$ 为**单位向量**. 对于非零向量 $\boldsymbol{x}$, $\dfrac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}$ 为 $\boldsymbol{x}$ 的**单位化向量**.

我们有 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \iff \|\boldsymbol{x}\| = 0 \iff [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}] = 0.$

长度

定义. 设 $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, 定义 $\boldsymbol{x}$ 的**长度**或**模**为

$$\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{[\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}]}=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}.$$

当 $\|\boldsymbol{x}\|=1$ 时, 称 $\boldsymbol{x}$ 为**单位向量**. 对于非零向量 $\boldsymbol{x}$, $\dfrac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}$ 为 $\boldsymbol{x}$ 的**单位化向量**.

我们有 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0} \iff \|\boldsymbol{x}\|=0 \iff [\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}]=0.$

定义. 若 $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=0$, 称 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ **正交**(垂直).

设 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$.

设 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$. 那么 X 的二次多项式

$$\|X\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|^2=[X\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},X\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}]=[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}]X^2+2[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]X+[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}]\geqslant 0$$

恒成立.

设 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$. 那么 X 的二次多项式

$$\|X\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|^2=[X\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},X\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}]=[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}]X^2+2[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]X+[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}]\geqslant 0$$

恒成立. 因此其判别式

$$\Delta=4([\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]^2-\|\boldsymbol{\alpha}\|^2\cdot\|\boldsymbol{\beta}\|^2)\leqslant 0,$$

设 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$. 那么 X 的二次多项式

$$\|X\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|^2 = [X\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}, X\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}] = [\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}]X^2 + 2[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]X + [\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}] \geqslant 0$$

恒成立. 因此其判别式

$$\Delta = 4([\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]^2 - \|\boldsymbol{\alpha}\|^2 \cdot \|\boldsymbol{\beta}\|^2) \leqslant 0,$$

于是我们得到**柯西-施瓦兹不等式**

$$\pm[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}] \leqslant \|\boldsymbol{\alpha}\| \cdot \|\boldsymbol{\beta}\|.$$

柯西-施瓦兹不等式

设 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$. 那么 X 的二次多项式

$$\|X\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|^2 = [X\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}, X\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}] = [\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}]X^2 + 2[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]X + [\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}] \geqslant 0$$

恒成立. 因此其判别式

$$\Delta = 4([\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]^2 - \|\boldsymbol{\alpha}\|^2 \cdot \|\boldsymbol{\beta}\|^2) \leqslant 0,$$

于是我们得到**柯西-施瓦兹不等式**

$$\pm[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}] \leqslant \|\boldsymbol{\alpha}\| \cdot \|\boldsymbol{\beta}\|.$$

显然 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ 时它也成立.

夹角

定义. 设非零向量 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, \ldots, a_n)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta} = (b_1, \ldots, b_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$，定义 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 的夹角为

$$\theta = \arccos \frac{[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]}{\|\boldsymbol{\alpha}\| \cdot \|\boldsymbol{\beta}\|} \in [0, \pi].$$

夹角

定义. 设非零向量 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, \ldots, a_n)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta} = (b_1, \ldots, b_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$，定义 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 的夹角为

$$\theta = \arccos \frac{[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]}{\|\boldsymbol{\alpha}\| \cdot \|\boldsymbol{\beta}\|} \in [0, \pi].$$

注意正交比夹角为 $\frac{\pi}{2}$ 略微广泛点，因为零向量与任意向量正交.

夹角

定义. **设非零向量** $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, \ldots, a_n)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta} = (b_1, \ldots, b_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$**, 定义** $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ **的夹角为**

$$\theta = \arccos \frac{[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]}{\|\boldsymbol{\alpha}\| \cdot \|\boldsymbol{\beta}\|} \in [0, \pi].$$

注意正交比夹角为 $\frac{\pi}{2}$ 略微广泛点, 因为零向量与任意向量正交.

若 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交, 则

$$\|\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}\|^2 = \|\boldsymbol{\alpha}\|^2 + \|\boldsymbol{\beta}\|^2 + 2[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}] = \|\boldsymbol{\alpha}\|^2 + \|\boldsymbol{\beta}\|^2,$$

定义. **设非零向量** $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, \ldots, a_n)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta} = (b_1, \ldots, b_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$**, 定义** $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ **的夹角为**

$$\theta = \arccos \frac{[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]}{\|\boldsymbol{\alpha}\| \cdot \|\boldsymbol{\beta}\|} \in [0, \pi].$$

注意正交比夹角为 $\frac{\pi}{2}$ 略微广泛点, 因为零向量与任意向量正交.

若 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交, 则

$$\|\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}\|^2 = \|\boldsymbol{\alpha}\|^2 + \|\boldsymbol{\beta}\|^2 + 2[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}] = \|\boldsymbol{\alpha}\|^2 + \|\boldsymbol{\beta}\|^2,$$

此即**勾股定理**.

例：正交向量

定义.

例：正交向量

定义.

(1) 若向量组 S 中的向量两两正交且非零，则称 S 为**正交向量组**.

定义.

(1) 若向量组 S 中的向量两两正交且非零，则称 S 为**正交向量组**.

(2) 若向量组 S 中的向量两两正交且均为单位向量，则称 S 为**标准正交向量组**.

例：正交向量

定义.

(1) 若向量组 S 中的向量两两正交且非零，则称 S 为**正交向量组**.

(2) 若向量组 S 中的向量两两正交且均为单位向量，则称 S 为**标准正交向量组**.

例. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (1,-2,1)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3$. 求向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 使得 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是正交向量组.

例：正交向量

定义.

(1) 若向量组 S 中的向量两两正交且非零，则称 S 为**正交向量组**.

(2) 若向量组 S 中的向量两两正交且均为单位向量，则称 S 为**标准正交向量组**.

例. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (1,-2,1)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3$. 求向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 使得 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是正交向量组.

解. 显然 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 正交.

定义.

(1) 若向量组 S 中的向量两两正交且非零，则称 S 为**正交向量组**.

(2) 若向量组 S 中的向量两两正交且均为单位向量，则称 S 为**标准正交向量组**.

例. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (1,-2,1)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3$. 求向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 使得 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是正交向量组.

解. 显然 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 正交. 设 $\boldsymbol{\alpha}_3 = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$, 则

$$[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3] = x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$
$$[\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3] = x_1 - 2x_2 + x_3 = 0.$$

定义.

(1) 若向量组 S 中的向量两两正交且非零，则称 S 为**正交向量组**.

(2) 若向量组 S 中的向量两两正交且均为单位向量，则称 S 为**标准正交向量组**.

例. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (1,-2,1)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3$. 求向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 使得 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是正交向量组.

解. 显然 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 正交. 设 $\boldsymbol{\alpha}_3 = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$，则

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3] &= x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ [\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3] &= x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{aligned}$$

解得 $(x_1, x_2, x_3) = (k, 0, -k)$.

例：正交向量

定义.

(1) 若向量组 S 中的向量两两正交且非零，则称 S 为**正交向量组**.

(2) 若向量组 S 中的向量两两正交且均为单位向量，则称 S 为**标准正交向量组**.

例. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (1,-2,1)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3$. 求向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 使得 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是正交向量组.

解. 显然 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 正交. 设 $\boldsymbol{\alpha}_3 = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$, 则

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3] &= x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\
[\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3] &= x_1 - 2x_2 + x_3 = 0.
\end{aligned}$$

解得 $(x_1, x_2, x_3) = (k, 0, -k)$. 故可取 $\boldsymbol{\alpha}_3 = (1, 0, -1)^{\mathrm{T}}$.

定理. 正交向量组必线性无关.

正交向量组必线性无关

定理. 正交向量组必线性无关.

证明. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是正交向量组, $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_r\boldsymbol{\alpha}_r = \mathbf{0}$.

正交向量组必线性无关

定理. 正交向量组必线性无关.

证明. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是正交向量组, $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_r\boldsymbol{\alpha}_r = \mathbf{0}$. 对任意 $1 \leqslant i \leqslant r$,

$$0 = [\mathbf{0}, \boldsymbol{\alpha}_i] = [\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_r\boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\alpha}_i]$$

定理. 正交向量组必线性无关.

证明. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是正交向量组, $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_r\boldsymbol{\alpha}_r = \mathbf{0}$. 对任意 $1 \leqslant i \leqslant r$,

$$\begin{aligned} 0 &= [\mathbf{0}, \boldsymbol{\alpha}_i] = [\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_r\boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\alpha}_i] \\ &= \lambda_1[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_i] + \cdots + \lambda_r[\boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\alpha}_i] = \lambda_i[\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_i]. \end{aligned}$$

定理. 正交向量组必线性无关.

证明. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是正交向量组, $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_r\boldsymbol{\alpha}_r = \mathbf{0}$. 对任意 $1 \leqslant i \leqslant r$,

$$\begin{aligned} 0 &= [\mathbf{0}, \boldsymbol{\alpha}_i] = [\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_r\boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\alpha}_i] \\ &= \lambda_1[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_i] + \cdots + \lambda_r[\boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\alpha}_i] = \lambda_i[\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_i]. \end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 非零, $[\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_i] \neq 0, \lambda_i = 0$.

正交向量组必线性无关

定理. 正交向量组必线性无关.

证明. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是正交向量组, $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_r\boldsymbol{\alpha}_r = \mathbf{0}$. 对任意 $1 \leqslant i \leqslant r$,

$$\begin{aligned} 0 = [\mathbf{0}, \boldsymbol{\alpha}_i] &= [\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_r\boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\alpha}_i] \\ &= \lambda_1[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_i] + \cdots + \lambda_r[\boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\alpha}_i] = \lambda_i[\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_i]. \end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 非零, $[\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_i] \neq 0, \lambda_i = 0$. 故 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关. □

定理. 正交向量组必线性无关.

证明. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是正交向量组, $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_r\boldsymbol{\alpha}_r = \mathbf{0}$. 对任意 $1 \leqslant i \leqslant r$,

$$\begin{aligned} 0 = [\mathbf{0}, \boldsymbol{\alpha}_i] &= [\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_r\boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\alpha}_i] \\ &= \lambda_1[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_i] + \cdots + \lambda_r[\boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\alpha}_i] = \lambda_i[\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_i]. \end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 非零, $[\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_i] \neq 0, \lambda_i = 0$. 故 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关. □

如果 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是向量空间 V 的一组标准正交基, 则对任意 $\boldsymbol{v} \in V$, 有

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{r} [\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\alpha}_i]\boldsymbol{\alpha}_i.$$

定义. 若实方阵 A 满足 $A^{\mathrm{T}}A=E$, 则称 A 为**正交阵**.

定义. 若实方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为正交阵.

正交阵满足如下性质:

定义. 若实方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为正交阵.

正交阵满足如下性质:

(1) $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 是正交阵 $\iff$ $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是标准正交向量组.

定义. 若实方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为**正交阵**.

正交阵满足如下性质:

(1) $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 是正交阵 $\iff$ $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是标准正交向量组.

(2) $\boldsymbol{A}$ 是正交阵 $\iff$ $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1}$.

定义. 若实方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为**正交阵**.

正交阵满足如下性质:

(1) $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n)$ 是正交阵 $\iff$ $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是标准正交向量组.

(2) $\boldsymbol{A}$ 是正交阵 $\iff$ $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{-1}$.

(3) $\boldsymbol{A}$ 是正交阵 $\implies$ $|\boldsymbol{A}| = \pm 1$ 且 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{A}^{-1}, \boldsymbol{A}^*$ 都是正交阵.

正交阵

定义. 若实方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为**正交阵**.

正交阵满足如下性质:

(1) $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 是正交阵 $\iff$ $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是标准正交向量组.

(2) $\boldsymbol{A}$ 是正交阵 $\iff$ $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1}$.

(3) $\boldsymbol{A}$ 是正交阵 $\implies$ $|\boldsymbol{A}|=\pm 1$ 且 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{A}^{-1},\boldsymbol{A}^{*}$ 都是正交阵.

定义. 若 $\boldsymbol{P}$ 为正交阵, 称线性变换 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$ 为**正交变换**.

正交阵

定义. 若实方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为**正交阵**.

正交阵满足如下性质:

(1) $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 是正交阵 $\iff$ $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是标准正交向量组.

(2) $\boldsymbol{A}$ 是正交阵 $\iff$ $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1}$.

(3) $\boldsymbol{A}$ 是正交阵 $\implies$ $|\boldsymbol{A}|=\pm 1$ 且 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{A}^{-1},\boldsymbol{A}^{*}$ 都是正交阵.

定义. 若 $\boldsymbol{P}$ 为正交阵, 称线性变换 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$ 为**正交变换**.

例如, $\mathbb{R}^2$ 上的正交变换就是绕原点的旋转、反射, 以及它们的复合.

定义. 若实方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为**正交阵**.

正交阵满足如下性质:

(1) $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 是正交阵 $\iff$ $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是标准正交向量组.

(2) $\boldsymbol{A}$ 是正交阵 $\iff$ $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1}$.

(3) $\boldsymbol{A}$ 是正交阵 $\implies$ $|\boldsymbol{A}|=\pm 1$ 且 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{A}^{-1},\boldsymbol{A}^{*}$ 都是正交阵.

定义. 若 $\boldsymbol{P}$ 为正交阵, 称线性变换 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$ 为**正交变换**.

例如, $\mathbb{R}^2$ 上的正交变换就是绕原点的旋转、反射, 以及它们的复合. 由于

$$[\boldsymbol{P}\boldsymbol{x},\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}]=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}],$$

因此**正交变换保持向量的长度和夹角**.

现在我们来看如何从空间 V 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 得到一组标准正交基.

现在我们来看如何从空间 V 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 得到一组标准正交基. 令 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \lambda \boldsymbol{\beta}_1$.

正交化

现在我们来看如何从空间 V 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 得到一组标准正交基. 令 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \lambda\boldsymbol{\beta}_1$. 若 $\boldsymbol{\beta}_1$ 和 $\boldsymbol{\beta}_2$ 正交, 则

$$0 = [\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_1] = [\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1] + \lambda[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1],$$

现在我们来看如何从空间 V 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 得到一组标准正交基. 令 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \lambda\boldsymbol{\beta}_1$. 若 $\boldsymbol{\beta}_1$ 和 $\boldsymbol{\beta}_2$ 正交, 则

$$0 = [\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_1] = [\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1] + \lambda[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1],$$

因此 $\lambda = -\dfrac{[\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1]}$.

现在我们来看如何从空间 V 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 得到一组标准正交基. 令 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \lambda\boldsymbol{\beta}_1$. 若 $\boldsymbol{\beta}_1$ 和 $\boldsymbol{\beta}_2$ 正交, 则

$$0 = [\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_1] = [\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1] + \lambda[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1],$$

因此 $\lambda = -\dfrac{[\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1]}$.

令 $\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 + \lambda_1\boldsymbol{\beta}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\beta}_2$,

现在我们来看如何从空间 V 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 得到一组标准正交基. 令 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \lambda\boldsymbol{\beta}_1$. 若 $\boldsymbol{\beta}_1$ 和 $\boldsymbol{\beta}_2$ 正交, 则

$$0 = [\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_1] = [\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1] + \lambda[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1],$$

因此 $\lambda = -\dfrac{[\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1]}$.

令 $\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 + \lambda_1\boldsymbol{\beta}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\beta}_2$, 类似地, 若 $\boldsymbol{\beta}_3$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$ 均正交, 则

$$\lambda_1 = -\frac{[\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1]}, \qquad \lambda_2 = -\frac{[\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2]},$$

正交化

现在我们来看如何从空间 V 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 得到一组标准正交基. 令 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \lambda\boldsymbol{\beta}_1$. 若 $\boldsymbol{\beta}_1$ 和 $\boldsymbol{\beta}_2$ 正交, 则

$$0 = [\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_1] = [\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1] + \lambda[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1],$$

因此 $\lambda = -\dfrac{[\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1]}$.

令 $\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 + \lambda_1\boldsymbol{\beta}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\beta}_2$, 类似地, 若 $\boldsymbol{\beta}_3$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$ 均正交, 则

$$\lambda_1 = -\frac{[\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1]}, \qquad \lambda_2 = -\frac{[\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2]},$$

$$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{[\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{[\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2.$$

现在我们来看如何从空间 V 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 得到一组标准正交基. 令 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \lambda\boldsymbol{\beta}_1$. 若 $\boldsymbol{\beta}_1$ 和 $\boldsymbol{\beta}_2$ 正交, 则

$$0 = [\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_1] = [\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1] + \lambda[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1],$$

因此 $\lambda = -\dfrac{[\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1]}$.

令 $\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 + \lambda_1\boldsymbol{\beta}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\beta}_2$, 类似地, 若 $\boldsymbol{\beta}_3$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$ 均正交, 则

$$\lambda_1 = -\frac{[\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1]}, \qquad \lambda_2 = -\frac{[\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2]},$$

$$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{[\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{[\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2.$$

依次递推下去可得一组正交基.

格拉姆-施密特正交单位化方法.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_1 &= \boldsymbol{\alpha}_1 \\
\boldsymbol{\beta}_2 &= \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{[\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1 \\
\boldsymbol{\beta}_3 &= \boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{[\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{[\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2 \\
&\vdots \\
\boldsymbol{\beta}_r &= \boldsymbol{\alpha}_r - \frac{[\boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1 - \cdots - \frac{[\boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\beta}_{r-1}]}{[\boldsymbol{\beta}_{r-1}, \boldsymbol{\beta}_{r-1}]}\boldsymbol{\beta}_{r-1}
\end{aligned}
$$

格拉姆-施密特正交单位化方法.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_1 &= \boldsymbol{\alpha}_1 \\
\boldsymbol{\beta}_2 &= \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{[\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1 \\
\boldsymbol{\beta}_3 &= \boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{[\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{[\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2 \\
&\vdots \\
\boldsymbol{\beta}_r &= \boldsymbol{\alpha}_r - \frac{[\boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1 - \cdots - \frac{[\boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\beta}_{r-1}]}{[\boldsymbol{\beta}_{r-1}, \boldsymbol{\beta}_{r-1}]}\boldsymbol{\beta}_{r-1}
\end{aligned}$$

则 $\boldsymbol{e}_1 = \dfrac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}, \ldots, \boldsymbol{e}_r = \dfrac{\boldsymbol{\beta}_r}{\|\boldsymbol{\beta}_r\|}$ **就是** V **的一组标准正交基.**

例. 将 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (1,0,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (1,1,2)^{\mathrm{T}}$ 正交单位化.

例. 将 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (1,0,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (1,1,2)^{\mathrm{T}}$ 正交单位化.

解.

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,0)^{\mathrm{T}}$$

例. 将 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 1, 0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (1, 0, 1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (1, 1, 2)^{\mathrm{T}}$ 正交单位化.

解.

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{[\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1 = (1, 0, 1)^{\mathrm{T}} - \frac{1}{2}(1, 1, 0)^{\mathrm{T}} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)^{\mathrm{T}}$$

典型例题：格拉姆-施密特正交化

例. 将 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,2)^{\mathrm{T}}$ 正交单位化.

解.

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}-\frac{1}{2}(1,1,0)^{\mathrm{T}}=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2$$

例. 将 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,2)^{\mathrm{T}}$ 正交单位化.

解.

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}-\frac{1}{2}(1,1,0)^{\mathrm{T}}=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2=(1,1,2)^{\mathrm{T}}-(1,1,0)^{\mathrm{T}}-\frac{2}{3/2}(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1)^{\mathrm{T}}=(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})^{\mathrm{T}}$$

例. 将 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (1,0,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (1,1,2)^{\mathrm{T}}$ 正交单位化.

解.

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,0)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{[\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1 = (1,0,1)^{\mathrm{T}} - \frac{1}{2}(1,1,0)^{\mathrm{T}} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{[\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{[\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2 = (1,1,2)^{\mathrm{T}} - (1,1,0)^{\mathrm{T}} - \frac{2}{3/2}(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)^{\mathrm{T}} = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \frac{\boldsymbol{\beta}_3}{\|\boldsymbol{\beta}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)^{\mathrm{T}}.$$

第五节　线性方程组

- 齐次线性方程组解的存在性
- 齐次线性方程组解的结构
- 非齐次线性方程组
- 向量组的线性表示

线性方程组是指

$$\begin{cases} a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + \cdots + a_{1n}\ x_n = b_1 \\ a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + \cdots + a_{2n}\ x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

线性方程组是指

$$\begin{cases} a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + \cdots + a_{1n}\ x_n = b_1 \\ a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + \cdots + a_{2n}\ x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

它的系数形成了一个 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$, 称为**系数矩阵**.

线性方程组是指

$$\begin{cases} a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + \cdots + a_{1n}\ x_n = b_1 \\ a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + \cdots + a_{2n}\ x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

它的系数形成了一个 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$, 称为**系数矩阵**.

线性方程组等价于

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$

其中

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}.$$

齐次线性方程组非零解的判定

当 $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$ 为零向量时, 称该线性方程组为齐次的; 否则称为非齐次的.

当 $\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$ 为零向量时, 称该线性方程组为齐次的; 否则称为非齐次的. 齐次线性方程组总有解 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$.

当 $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$ 为零向量时，称该线性方程组为齐次的；否则称为非齐次的. 齐次线性方程组总有解 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 有非零解 $\iff$ $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性相关

齐次线性方程组非零解的判定

当 $\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$ 为零向量时, 称该线性方程组为齐次的; 否则称为非齐次的. 齐次线性方程组总有解 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 有非零解 $\iff$ $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性相关 $\iff$ $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})<n$.

当 $\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$ 为零向量时, 称该线性方程组为齐次的; 否则称为非齐次的. 齐次线性方程组总有解 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 有非零解 $\iff$ $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性相关 $\iff$ $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})<n$.

定理.

齐次线性方程组非零解的判定

当 $\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$ 为零向量时, 称该线性方程组为齐次的; 否则称为非齐次的. 齐次线性方程组总有解 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 有非零解 $\iff$ $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性相关 $\iff$ $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})<n$.

定理.

(1) $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ **有 (无穷多) 非零解** $\iff$ $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})<n$;

齐次线性方程组非零解的判定

当 $\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$ 为零向量时, 称该线性方程组为齐次的; 否则称为非齐次的. 齐次线性方程组总有解 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 有非零解 $\iff$ $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性相关 $\iff$ $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})<n$.

定理.

(1) $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ **有 (无穷多) 非零解** $\iff$ $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})<n$;

(2) $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ **只有零解** $\iff$ $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=n$.

齐次线性方程组非零解的判定

当 $\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$ 为零向量时, 称该线性方程组为齐次的; 否则称为非齐次的. 齐次线性方程组总有解 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 有非零解 $\iff$ $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性相关 $\iff$ $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})<n$.

定理.

(1) $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ **有 (无穷多) 非零解** $\iff$ $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})<n$;

(2) $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ **只有零解** $\iff$ $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=n$.

推论. **设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵.**

齐次线性方程组非零解的判定

当 $\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$ 为零向量时, 称该线性方程组为齐次的; 否则称为非齐次的. 齐次线性方程组总有解 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 有非零解 $\iff$ $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性相关 $\iff$ $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})<n$.

定理.

(1) $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ **有 (无穷多) 非零解** $\iff$ $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})<n$;

(2) $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ **只有零解** $\iff$ $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=n$.

推论. **设** $\boldsymbol{A}$ **是** n **阶方阵.**

(1) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ **有 (无穷多) 非零解** $\iff$ $|\boldsymbol{A}|=0$;

齐次线性方程组非零解的判定

当 $\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$ 为零向量时, 称该线性方程组为齐次的; 否则称为非齐次的. 齐次线性方程组总有解 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 有非零解 $\iff$ $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性相关 $\iff$ $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})<n$.

定理.

(1) $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ **有 (无穷多) 非零解** $\iff$ $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})<n$;

(2) $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ **只有零解** $\iff$ $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=n$.

推论. **设** $\boldsymbol{A}$ **是** n **阶方阵.**

(1) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ **有 (无穷多) 非零解** $\iff$ $|\boldsymbol{A}|=0$;

(2) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ **只有零解** $\iff$ $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

齐次线性方程组非零解的判定

当 $\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$ 为零向量时，称该线性方程组为齐次的；否则称为非齐次的．齐次线性方程组总有解 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$． $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 有非零解 $\iff$ $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性相关 $\iff$ $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})<n$.

定理.

(1) $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 有 (无穷多) 非零解 $\iff$ $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})<n$;

(2) $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 只有零解 $\iff$ $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=n$.

推论. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵.

(1) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 有 (无穷多) 非零解 $\iff$ $|\boldsymbol{A}|=0$;

(2) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 只有零解 $\iff$ $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

推论. 若方程个数小于未知元个数，则齐次线性方程组有非零解.

例：齐次线性方程组非零解的判定

例. 假设

$$\begin{cases} \ \ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + ax_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - \ \ x_2 + \ \ x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解，求 a.

例. 假设

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + ax_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解，求 a.

解. 此时系数矩阵行列式为零:

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & a & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 7a + 21,$$

例：齐次线性方程组非零解的判定

例. 假设

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + ax_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解，求 a.

解. 此时系数矩阵行列式为零：

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & a & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 7a + 21, \quad a = -3.$$

例：齐次线性方程组非零解的判定

例. 若下述方程有非零解，求 a.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + a x_3 = 0 \\ -x_1 + (a-1)x_2 + (1-a)x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + a^2 x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + (2a+1)x_3 = 0 \end{cases}$$

例：齐次线性方程组非零解的判定

例. 若下述方程有非零解，求 a.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + ax_3 = 0 \\ -x_1 + (a-1)x_2 + (1-a)x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + a^2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + (2a+1)x_3 = 0 \end{cases}$$

解.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ -1 & a-1 & 1-a \\ 1 & 1 & a^2 \\ 1 & 1 & 2a+1 \end{pmatrix}$$

例. 若下述方程有非零解，求 a.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + ax_3 = 0 \\ -x_1 + (a-1)x_2 + (1-a)x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + a^2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + (2a+1)x_3 = 0 \end{cases}$$

解.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ -1 & a-1 & 1-a \\ 1 & 1 & a^2 \\ 1 & 1 & 2a+1 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例. 若下述方程有非零解，求 a.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + ax_3 = 0 \\ -x_1 + (a-1)x_2 + (1-a)x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + a^2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + (2a+1)x_3 = 0 \end{cases}$$

解.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ -1 & a-1 & 1-a \\ 1 & 1 & a^2 \\ 1 & 1 & 2a+1 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

的秩小于 3，因此 $a = 0$.

基础解系

定义. 称空间 $\{x \mid Ax = 0\}$ 的一组基为该齐次线性方程组的**基础解系**.

基础解系

定义. 称空间 $\{x \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ 的一组基为该齐次线性方程组的**基础解系**.

齐次线性方程组的解. 设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}, \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = r$. 线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系包含 $n - r$ 个向量.

定义. 称空间 $\{x \mid \boldsymbol{A}x = \mathbf{0}\}$ 的一组基为该齐次线性方程组的**基础解系**.

齐次线性方程组的解. 设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}, \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = r$. 线性方程组 $\boldsymbol{A}x = \mathbf{0}$ 的基础解系包含 $n-r$ 个向量.

证明. 通过交换未知元的位置 (相当于交换 $\boldsymbol{A}$ 列的位置), 不妨设 $\boldsymbol{A}$ 可化为行最简形

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & b_{r,1} & \cdots & b_{r,n-r} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}.$$

续证. 方程化为 $(\boldsymbol{E}_r, \boldsymbol{B})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$,

基础解系

续证. 方程化为 $(\boldsymbol{E}_r, \boldsymbol{B})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = -\boldsymbol{B} \begin{pmatrix} x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{E}_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

续证. 方程化为 $(\boldsymbol{E}_r, \boldsymbol{B})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = -\boldsymbol{B} \begin{pmatrix} x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{E}_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

于是 $\boldsymbol{C} := \begin{pmatrix} -\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{E}_{n-r} \end{pmatrix}$ 的 $n-r$ 个列向量生成了整个解空间.

续证. 方程化为 $(\boldsymbol{E}_r, \boldsymbol{B})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = -\boldsymbol{B} \begin{pmatrix} x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{E}_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

于是 $\boldsymbol{C} := \begin{pmatrix} -\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{E}_{n-r} \end{pmatrix}$ 的 $n-r$ 个列向量生成了整个解空间. 由于 $\mathrm{R}(\boldsymbol{C}) \geqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{E}_{n-r}) = n-r$, $\boldsymbol{C}$ 列满秩, 因此它的列向量就是一组基础解系. □

续证. 方程化为 $(\boldsymbol{E}_r, \boldsymbol{B})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = -\boldsymbol{B}\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{E}_{n-r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

于是 $\boldsymbol{C} := \begin{pmatrix} -\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{E}_{n-r} \end{pmatrix}$ 的 $n-r$ 个列向量生成了整个解空间. 由于 $\mathrm{R}(\boldsymbol{C}) \geqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{E}_{n-r}) = n-r$, $\boldsymbol{C}$ 列满秩, 因此它的列向量就是一组基础解系. □

推论. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 任意 $n-r$ 个线性无关的解都是一组基础解系.

求基础解系的步骤

齐次线性方程组的解法.

求基础解系的步骤

齐次线性方程组的解法.

(1) 将系数矩阵通过初等行变换化为行最简形.

求基础解系的步骤

齐次线性方程组的解法.

(1) 将系数矩阵通过初等行变换化为行最简形.

(2) 将矩阵重新写成方程形式 $x_i + \cdots = 0$.

齐次线性方程组的解法.

(1) 将系数矩阵通过初等行变换化为行最简形.

(2) 将矩阵重新写成方程形式 $x_i + \cdots = 0$.

(3) 移项, 使得等式左侧只有阶梯拐角列 i 对应的 $x_i = \cdots$.

求基础解系的步骤

齐次线性方程组的解法.

(1) 将系数矩阵通过初等行变换化为行最简形.

(2) 将矩阵重新写成方程形式 $x_i + \cdots = 0$.

(3) 移项, 使得等式左侧只有阶梯拐角列 i 对应的 $x_i = \cdots$.

(4) 添加 $n - r$ 项 $x_j = x_j$, 使得等式左边凑成 $\boldsymbol{x}$.

求基础解系的步骤

齐次线性方程组的解法.

(1) 将系数矩阵通过初等行变换化为行最简形.

(2) 将矩阵重新写成方程形式 $x_i + \cdots = 0$.

(3) 移项, 使得等式左侧只有阶梯拐角列 i 对应的 $x_i = \cdots$.

(4) 添加 $n-r$ 项 $x_j = x_j$, 使得等式左边凑成 $\boldsymbol{x}$.

(5) 等式右侧是非拐角列 j 对应的 x_j 的组合, 其系数形成的 $n-r$ 个向量就是基础解系.

典型例题：求基础解系

例. 解方程 $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3+x_4=0 \\ 2x_1+4x_2-2x_3-x_4=0 \\ 3x_1+6x_2+2x_3 \qquad =0 \end{cases}$.

例. 解方程 $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3+x_4=0 \\ 2x_1+4x_2-2x_3-x_4=0 \\ 3x_1+6x_2+2x_3 \qquad\quad =0 \end{cases}$.

解.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -1 \\ 3 & 6 & 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & 3 \\ 0 & 0 & -10 & 3 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 3/10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

典型例题：求基础解系

例. 解方程 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 \qquad = 0 \end{cases}$.

解.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -1 \\ 3 & 6 & 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & 3 \\ 0 & 0 & -10 & 3 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 3/10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 1/5x_4 = 0 \\ x_3 + 3/10x_4 = 0 \end{cases}$$

典型例题：求基础解系

续解. 将 x_1, x_3 保留在等式左侧，其它项移动到等式右边，并添加 $x_2 = x_2, x_4 = x_4$，得到

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 1/5x_4 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = -3/10x_4 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

续解. 将 x_1, x_3 保留在等式左侧，其它项移动到等式右边，并添加 $x_2 = x_2, x_4 = x_4$，得到

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 1/5x_4 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = -3/10x_4 \\ x_4 = x_4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1/5 \\ 0 \\ -3/10 \\ 1 \end{pmatrix},$$

续解. 将 x_1, x_3 保留在等式左侧，其它项移动到等式右边，并添加 $x_2 = x_2, x_4 = x_4$，得到

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 1/5x_4 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = -3/10x_4 \\ x_4 = x_4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1/5 \\ 0 \\ -3/10 \\ 1 \end{pmatrix},$$

通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1/5 \\ 0 \\ -3/10 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k_1, k_2 \text{为任意常数.}$$

典型例题：求基础解系

练习. 解方程 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

练习. 解方程 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 3 & 1 & 1\\ -1 & -2 & 1 & 3 & -3\\ 0 & 0 & 2 & 5 & -2\end{pmatrix}$.

答案.

$$\boldsymbol{A}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{cases}x_1=-2x_2-2x_5\\ x_2=x_2\\ x_3=x_5\\ x_4=x_4\\ x_5=x_5\end{cases}\Longrightarrow\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-2\\ 0\\ 1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

例. 设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}, \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n-3$, $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3$ 为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的三个线性无关的解. 则(　　)是该方程的一组基础解系.

(A) $\boldsymbol{\xi}_1, -\boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_2 - \boldsymbol{\xi}_3, \boldsymbol{\xi}_3 - \boldsymbol{\xi}_1$

(B) $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\xi}_2 + \boldsymbol{\xi}_3$

(C) $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$

(D) $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2 - \boldsymbol{\xi}_3, \boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\xi}_2 + \boldsymbol{\xi}_3$

例：基础解系

例. 设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}, \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n-3$, ξ_1, ξ_2, ξ_3 为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的三个线性无关的解. 则(B)是该方程的一组基础解系.

(A) $\xi_1, -\xi_2, \xi_2-\xi_3, \xi_3-\xi_1$

(B) $\xi_1, \xi_1+\xi_2, \xi_1+\xi_2+\xi_3$

(C) ξ_1, ξ_2

(D) $\xi_1, \xi_1-\xi_2-\xi_3, \xi_1+\xi_2+\xi_3$

例：基础解系

例. 设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}, \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n-3$, ξ_1,ξ_2,ξ_3 为 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的三个线性无关的解. 则(B)是该方程的一组基础解系.

(A) $\xi_1, -\xi_2, \xi_2-\xi_3, \xi_3-\xi_1$

(B) $\xi_1, \xi_1+\xi_2, \xi_1+\xi_2+\xi_3$

(C) ξ_1, ξ_2

(D) $\xi_1, \xi_1-\xi_2-\xi_3, \xi_1+\xi_2+\xi_3$

练习. 设 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的一组基础解系, 则(   )也是该方程的一组基础解系.

(A) 与 ξ_1,ξ_2,ξ_3 等价的一组向量

(B) 与 ξ_1,ξ_2,ξ_3 同秩的一组向量

(C) $\xi_1-\xi_2, \xi_2-\xi_3, \xi_3-\xi_1$

(D) $\xi_1+\xi_2, \xi_2+\xi_3, \xi_3+\xi_1$

例. 设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}, \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n-3$, ξ_1, ξ_2, ξ_3 为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的三个线性无关的解. 则(B)是该方程的一组基础解系.

(A) $\xi_1, -\xi_2, \xi_2 - \xi_3, \xi_3 - \xi_1$

(B) $\xi_1, \xi_1 + \xi_2, \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$

(C) ξ_1, ξ_2

(D) $\xi_1, \xi_1 - \xi_2 - \xi_3, \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$

练习. 设 ξ_1, ξ_2, ξ_3 是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的一组基础解系，则(D)也是该方程的一组基础解系.

(A) 与 ξ_1, ξ_2, ξ_3 等价的一组向量

(B) 与 ξ_1, ξ_2, ξ_3 同秩的一组向量

(C) $\xi_1 - \xi_2, \xi_2 - \xi_3, \xi_3 - \xi_1$

(D) $\xi_1 + \xi_2, \xi_2 + \xi_3, \xi_3 + \xi_1$

例：基础解系的应用

例. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=n-1$ 且每行元素之和为 0. 则齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解为______________________________.

例：基础解系的应用

例. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=n-1$ 且每行元素之和为 0. 则齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解为 $\underline{\quad k(1,1,\ldots,1)^{\mathrm{T}}, k \text{ 为任意常数} \quad}$.

例：基础解系的应用

例. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n - 1$ 且每行元素之和为 0. 则齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解为 $\underline{\quad k(1,1,\ldots,1)^{\mathrm{T}}, k \text{ 为任意常数} \quad}$.

例. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 列向量的一个极大线性无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{n-1}$. 则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解为______________________________.

例：基础解系的应用

例. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n-1$ 且每行元素之和为 0. 则齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解为 ___$k(1,1,\ldots,1)^{\mathrm{T}}, k$ 为任意常数___.

例. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 列向量的一个极大线性无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$. 则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解为 ___$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}, k_1,\ldots,k_{n-1}$ 为任意常数___.

例：基础解系的应用

例. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n-1$ 且每行元素之和为 0. 则齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解为 $\underline{\quad k(1,1,\ldots,1)^{\mathrm{T}}, k \text{ 为任意常数} \quad}$.

例. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 列向量的一个极大线性无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$. 则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解为 $\underline{\quad k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}, k_1,\ldots,k_{n-1} \text{ 为任意常数} \quad}$.

练习. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n-1$，代数余子式 $A_{11} \neq 0$. 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解为____________________.

例：基础解系的应用

例. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=n-1$ 且每行元素之和为 0. 则齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解为 $\underline{\quad k(1,1,\ldots,1)^{\mathrm{T}}, k \text{ 为任意常数} \quad}$.

例. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 列向量的一个极大线性无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$. 则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解为 $\underline{\quad k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}, k_1,\ldots,k_{n-1} \text{ 为任意常数} \quad}$.

练习. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=n-1$, 代数余子式 $A_{11}\neq 0$. 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解为 $\underline{\quad k(A_{11},\ldots,A_{1n})^{\mathrm{T}}, k \text{ 为任意常数} \quad}$.

例. 设 $A_{m\times n}B_{n\times s}=O$, 证明 $\mathrm{R}(A)+\mathrm{R}(B)\leqslant n$.

例. 设 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times s}=\boldsymbol{O}$，证明 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{B})\leqslant n$.

证明. 由于 $\boldsymbol{B}$ 的列向量都是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解，因此 $\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$ 不超过该方程解空间的维数，即 $n-\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$. □

例：基础解系

例. 设 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times s}=\boldsymbol{O}$，证明 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{B})\leqslant n$.

证明. 由于 $\boldsymbol{B}$ 的列向量都是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解，因此 $\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$ 不超过该方程解空间的维数，即 $n-\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$. □

例. 设 $\boldsymbol{A}$ 是实矩阵，证明 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$.

例：基础解系

例. 设 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times s}=\boldsymbol{O}$，证明 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{B})\leqslant n$.

证明. 由于 $\boldsymbol{B}$ 的列向量都是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解，因此 $\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$ 不超过该方程解空间的维数，即 $n-\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$. □

例. 设 $\boldsymbol{A}$ 是实矩阵，证明 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$.

证明. 若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，则 $0=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=[\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}]$.

□

例. 设 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times s}=\boldsymbol{O}$, 证明 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{B})\leqslant n$.

证明. 由于 $\boldsymbol{B}$ 的列向量都是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解, 因此 $\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$ 不超过该方程解空间的维数, 即 $n-\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$. □

例. 设 $\boldsymbol{A}$ 是实矩阵, 证明 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$.

证明. 若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 则 $0=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=[\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}]$. 由内积的正定性可知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. □

例：基础解系

例. 设 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times s}=\boldsymbol{O}$，证明 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{B})\leqslant n$.

证明. 由于 $\boldsymbol{B}$ 的列向量都是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解，因此 $\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$ 不超过该方程解空间的维数，即 $n-\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$. □

例. 设 $\boldsymbol{A}$ 是实矩阵，证明 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$.

证明. 若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，则 $0=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=[\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}]$. 由内积的正定性可知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\iff\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 二者解空间维数相等. □

例：基础解系

例. 设 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times s}=\boldsymbol{O}$，证明 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{B})\leqslant n$.

证明. 由于 $\boldsymbol{B}$ 的列向量都是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解，因此 $\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$ 不超过该方程解空间的维数，即 $n-\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$. □

例. 设 $\boldsymbol{A}$ 是实矩阵，证明 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$.

证明. 若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，则 $0=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=[\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}]$. 由内积的正定性可知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\iff\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 二者解空间维数相等. 由于二者列数相同，因此二者秩相同. □

由此可知

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}),$$

例：基础解系

由此可知

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}),$$

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}) = \cdots$$

例：基础解系

由此可知

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}),$$

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}) = \cdots$$

由于

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) \geqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}) \geqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}),$$

因此这些矩阵的秩都相等.

例：基础解系

由此可知

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}),$$

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}) = \cdots$$

由于

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) \geqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}) \geqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}),$$

因此这些矩阵的秩都相等. 类似地, 任意多个 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 交错相乘得到的矩阵秩也都等于 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$.

例：基础解系

由此可知

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}),$$

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}) = \cdots$$

由于

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) \geqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}) \geqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}),$$

因此这些矩阵的秩都相等. 类似地, 任意多个 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 交错相乘得到的矩阵秩也都等于 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$.

注意, 对于复矩阵这并不成立, 例如

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = 0.$$

由此可知

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}),$$

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=\cdots$$

由于

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})\geqslant\mathrm{R}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\geqslant\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}),$$

因此这些矩阵的秩都相等. 类似地, 任意多个 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 交错相乘得到的矩阵秩也都等于 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$.

注意, 对于复矩阵这并不成立, 例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=0.$$

此时有 $\mathrm{R}\left(\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right)=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$, 其中 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 表示所有元素取共轭.

例：基础解系

例. 若 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)$ 且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解为 $k_1(1,0,-1,0,1)^{\mathrm{T}}+k_2(1,0,0,1,-1)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{A}$ 列向量组的一个极大无关组是(　　).

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$　(C) $\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$　(D) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$

例. 若 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)$ 且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解为 $k_1(1,0,-1,0,1)^{\mathrm{T}}+k_2(1,0,0,1,-1)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{A}$ 列向量组的一个极大无关组是(D).

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$ (B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ (C) $\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ (D) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$

例：基础解系

例. 若 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)$ 且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解为 $k_1(1,0,-1,0,1)^{\mathrm{T}}+k_2(1,0,0,1,-1)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{A}$ 列向量组的一个极大无关组是(D).

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$　(C) $\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$　(D) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$

练习. 若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 1 & a^2 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ 且存在 3 阶非零矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，则(　　).

(A) $a=1, |\boldsymbol{B}|=0$　(B) $a=-2, |\boldsymbol{B}|=0$

(C) $a=1, |\boldsymbol{B}|\neq 0$　(D) $a=-2, |\boldsymbol{B}|\neq 0$

例：基础解系

例. 若 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)$ 且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解为 $k_1(1,0,-1,0,1)^{\mathrm{T}}+k_2(1,0,0,1,-1)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{A}$ 列向量组的一个极大无关组是(D).

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$　(C) $\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$　(D) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$

练习. 若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 1 & a^2 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ 且存在 3 阶非零矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，则(A).

(A) $a=1, |\boldsymbol{B}|=0$　(B) $a=-2, |\boldsymbol{B}|=0$

(C) $a=1, |\boldsymbol{B}|\neq 0$　(D) $a=-2, |\boldsymbol{B}|\neq 0$

设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}$.

设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}$. 对于非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$,

设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}$. 对于非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, 若方程有解, 则 $\boldsymbol{b}$ 可以由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性表示, 从而 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组和 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ 的列向量组等价.

非齐次线性方程组解的存在性

设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}$. 对于非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, 若方程有解, 则 $\boldsymbol{b}$ 可以由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性表示, 从而 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组和 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ 的列向量组等价. 因此 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$.

设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}$. 对于非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, 若方程有解, 则 $\boldsymbol{b}$ 可以由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性表示, 从而 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组和 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ 的列向量组等价. 因此 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$. 我们称 $m \times (n+1)$ 矩阵 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ 为**增广矩阵**.

非齐次线性方程组解的存在性

设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}$. 对于非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, 若方程有解, 则 $\boldsymbol{b}$ 可以由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性表示, 从而 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组和 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ 的列向量组等价. 因此 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$. 我们称 $m \times (n+1)$ 矩阵 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ 为**增广矩阵**.

注意到 $\boldsymbol{A}$ 列向量生成的空间 V 是 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ 列向量生成的空间 W 的子空间.

设 $\boldsymbol{A}\in M_{m\times n}$. 对于非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$, 若方程有解, 则 $\boldsymbol{b}$ 可以由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性表示, 从而 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组和 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ 的列向量组等价. 因此 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$. 我们称 $m\times(n+1)$ 矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ 为**增广矩阵**.

注意到 $\boldsymbol{A}$ 列向量生成的空间 V 是 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ 列向量生成的空间 W 的子空间. 若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$, 则 $V=W$, $\boldsymbol{A}$ 列向量组的一个极大无关组 S 也是 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ 的极大无关组.

非齐次线性方程组解的存在性

设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}$. 对于非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, 若方程有解, 则 $\boldsymbol{b}$ 可以由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性表示, 从而 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组和 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ 的列向量组等价. 因此 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$. 我们称 $m \times (n+1)$ 矩阵 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ 为**增广矩阵**.

注意到 $\boldsymbol{A}$ 列向量生成的空间 V 是 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ 列向量生成的空间 W 的子空间. 若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, 则 $V = W$, $\boldsymbol{A}$ 列向量组的一个极大无关组 S 也是 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ 的极大无关组. 从而 $\boldsymbol{b}$ 是 S 的线性组合, 也是 $\boldsymbol{A}$ 列向量的线性组合.

设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}$. 对于非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, 若方程有解, 则 $\boldsymbol{b}$ 可以由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性表示, 从而 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组和 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ 的列向量组等价. 因此 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$. 我们称 $m \times (n+1)$ 矩阵 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ 为**增广矩阵**.

注意到 $\boldsymbol{A}$ 列向量生成的空间 V 是 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ 列向量生成的空间 W 的子空间. 若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, 则 $V = W$, $\boldsymbol{A}$ 列向量组的一个极大无关组 S 也是 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ 的极大无关组. 从而 $\boldsymbol{b}$ 是 S 的线性组合, 也是 $\boldsymbol{A}$ 列向量的线性组合.

定理. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有解 $\iff \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$.

设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}$. 对于非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, 若方程有解, 则 $\boldsymbol{b}$ 可以由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性表示, 从而 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组和 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ 的列向量组等价. 因此 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$. 我们称 $m \times (n+1)$ 矩阵 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ 为**增广矩阵**.

注意到 $\boldsymbol{A}$ 列向量生成的空间 V 是 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ 列向量生成的空间 W 的子空间. 若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, 则 $V = W$, $\boldsymbol{A}$ 列向量组的一个极大无关组 S 也是 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ 的极大无关组. 从而 $\boldsymbol{b}$ 是 S 的线性组合, 也是 $\boldsymbol{A}$ 列向量的线性组合.

定理. $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有解 $\iff \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$.

推论. 若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}_{m\times n}) = m$, 则 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 总有解.

若非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0$, 则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)=\mathbf{0}$.

非齐次线性方程组解的结构

若非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0$, 则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)=\mathbf{0}$. 从而 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解.

若非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0$, 则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)=\mathbf{0}$. 从而 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解. 设 $\xi_1,\dots,\xi_{n-r}$ 为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的一组基础解系, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+k_1\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r},$$

$k_1,\dots,k_{n-r}$ 为任意常数.

非齐次线性方程组解的结构

若非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0$, 则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)=\mathbf{0}$. 从而 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解. 设 $\xi_1,\dots,\xi_{n-r}$ 为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的一组基础解系, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+k_1\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r},$$

$k_1,\dots,k_{n-r}$ 为任意常数.

线性方程组解的判定准则.

非齐次线性方程组解的结构

若非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0$, 则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)=\mathbf{0}$. 从而 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解. 设 $\xi_1,\dots,\xi_{n-r}$ 为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的一组基础解系, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+k_1\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r},$$

$k_1,\dots,k_{n-r}$ 为任意常数.

线性方程组解的判定准则.

(1) **若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})<\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 无解;**

非齐次线性方程组解的结构

若非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0$, 则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{0}$. 从而 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解. 设 $\xi_1,\dots,\xi_{n-r}$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一组基础解系, 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+k_1\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r},$$

$k_1,\dots,k_{n-r}$ 为任意常数.

线性方程组解的判定准则.

(1) **若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})<\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$, 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 无解;**

(2) **若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=n$, 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解;**

非齐次线性方程组解的结构

若非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0$, 则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{0}$. 从而 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解. 设 $\xi_1,\ldots,\xi_{n-r}$ 为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一组基础解系, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+k_1\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r},$$

$k_1,\ldots,k_{n-r}$ 为任意常数.

线性方程组解的判定准则.

(1) **若** $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})<\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$**, 则** $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ **无解;**

(2) **若** $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=n$**, 则** $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ **有唯一解;**

(3) **若** $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})<n$**, 则** $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ **有无穷多解.**

若非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0$, 则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{0}$. 从而 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解. 设 $\xi_1,\ldots,\xi_{n-r}$ 为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一组基础解系, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+k_1\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r},$$

$k_1,\ldots,k_{n-r}$ 为任意常数.

线性方程组解的判定准则.

(1) **若** $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})<\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$**, 则** $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ **无解;**

(2) **若** $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=n$**, 则** $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ **有唯一解;**

(3) **若** $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})<n$**, 则** $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ **有无穷多解.**

推论. **若** $\boldsymbol{A}$ **是** n **阶方阵, 则** $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ **有唯一解** $\iff |\boldsymbol{A}|\neq 0$.

非齐次线性方程组解的结构

若非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0$, 则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{0}$. 从而 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解. 设 $\xi_1,\ldots,\xi_{n-r}$ 为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一组基础解系, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+k_1\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r},$$

$k_1,\ldots,k_{n-r}$ 为任意常数.

线性方程组解的判定准则.

(1) **若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})<\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 无解;**

(2) **若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=n$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解;**

(3) **若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})<n$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解.**

推论. **若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解 $\iff$ $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.**

若 $|\boldsymbol{A}|=0$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 无解或有无穷多解.

求解非齐次线性方程组的步骤

非齐次线性方程组的解法.

求解非齐次线性方程组的步骤

非齐次线性方程组的解法.

(1) 写：写出方程组对应的增广矩阵 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$;

求解非齐次线性方程组的步骤

非齐次线性方程组的解法.

(1) 写：写出方程组对应的增广矩阵 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$；

(2) 变：通过初等行变换将其化为行最简形；

求解非齐次线性方程组的步骤

非齐次线性方程组的解法.

(1) 写：写出方程组对应的增广矩阵 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$；

(2) 变：通过初等行变换将其化为行最简形；

(3) 判：通过行最简形判定方程是否有解；

求解非齐次线性方程组的步骤

非齐次线性方程组的解法.

(1) 写：写出方程组对应的增广矩阵 (A, b)；

(2) 变：通过初等行变换将其化为行最简形；

(3) 判：通过行最简形判定方程是否有解；

(4) 解：若系数矩阵部分零行对应的常数项均为零，则方程有解.

求解非齐次线性方程组的步骤

非齐次线性方程组的解法.

(1) 写：写出方程组对应的增广矩阵 (A, b);

(2) 变：通过初等行变换将其化为行最简形;

(3) 判：通过行最简形判定方程是否有解;

(4) 解：若系数矩阵部分零行对应的常数项均为零，则方程有解.

(5) 类似于齐次情形，将矩阵重新写成方程形式、移项、添恒等式，使得等式左边凑成 x.

非齐次线性方程组的解法.

(1) 写: 写出方程组对应的增广矩阵 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$;

(2) 变: 通过初等行变换将其化为行最简形;

(3) 判: 通过行最简形判定方程是否有解;

(4) 解: 若系数矩阵部分零行对应的常数项均为零, 则方程有解.

(5) 类似于齐次情形, 将矩阵重新写成方程形式、移项、添恒等式, 使得等式左边凑成 x.

(6) 等式右侧的常数部分是特解，其余是非拐角列 j 对应的 x_j 的组合, 其系数形成的 $n-r$ 个向量就是基础解系.

例. 解方程 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$

例. 解方程 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$

解.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 2 \end{array}\right) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & -10 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & -10 & -1 \end{array}\right) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & -10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

例. 解方程
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$$

解.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 2 \end{array}\right) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & -10 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & -10 & -1 \end{array}\right) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & -10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

于是 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = 2 < \mathrm{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = 3$，无解.

典型例题：解非齐次线性方程组

例. 解方程 $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1/2 \end{cases}$

例. 解方程 $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1/2 \end{cases}$

解.

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -1/2 \end{array}\right) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

典型例题：解非齐次线性方程组

例. 解方程 $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1/2 \end{cases}$

解.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -1/2 \end{array}\right) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

于是 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = 2 = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = 2$，有解.

例. 解方程 $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1/2 \end{cases}$

解.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -1/2 \end{array}\right) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

于是 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = 2 = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = 2$, 有解.

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + 1/2 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 2x_4 + 1/2 \\ x_4 = x_4 \end{cases} \Longrightarrow$$

例. 解方程 $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1/2 \end{cases}$

解.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -1/2 \end{array}\right) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

于是 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = 2 = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = 2$，有解.

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + 1/2 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 2x_4 + 1/2 \\ x_4 = x_4 \end{cases} \Longrightarrow \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

例. 已知

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,4,0,2)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (2,7,1,3)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (0,1,-1,a)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta} = (3,10,b,4)^{\mathrm{T}}.$$

问 a, b 为何值时，

例. 已知

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 4, 0, 2)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (2, 7, 1, 3)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (0, 1, -1, a)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta} = (3, 10, b, 4)^{\mathrm{T}}.$$

问 a, b 为何值时,

(1) $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示;

例. 已知

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,4,0,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,7,1,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,-1,a)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(3,10,b,4)^{\mathrm{T}}.$$

问 a,b 为何值时,

(1) $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示;

(2) $\boldsymbol{\beta}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一线性表示;

例. 已知

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,4,0,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,7,1,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,-1,a)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(3,10,b,4)^{\mathrm{T}}.$$

问 a,b 为何值时，

(1) $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示；

(2) $\boldsymbol{\beta}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一线性表示；

(3) $\boldsymbol{\beta}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 不唯一线性表示.

典型例题：线性方程组的性质

解. 即问 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的解的情况，其中 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$.

解. 即问 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的解的情况，其中 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$.

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&3\\4&7&1&10\\0&1&-1&b\\2&3&a&4\end{array}\right)\overset{r}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&1&-1&b\\0&-1&a&-2\end{array}\right)\overset{r}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&3\\0&1&-1&2\\0&0&a-1&0\\0&0&0&b-2\end{array}\right)$$

解. 即问 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的解的情况，其中 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$.

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&3\\4&7&1&10\\0&1&-1&b\\2&3&a&4\end{array}\right)\overset{r}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&1&-1&b\\0&-1&a&-2\end{array}\right)\overset{r}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&3\\0&1&-1&2\\0&0&a-1&0\\0&0&0&b-2\end{array}\right)$$

于是可知 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$ 和 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})$，故

解. 即问 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的解的情况，其中 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$.

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&3\\4&7&1&10\\0&1&-1&b\\2&3&a&4\end{array}\right)\overset{r}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&1&-1&b\\0&-1&a&-2\end{array}\right)\overset{r}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&3\\0&1&-1&2\\0&0&a-1&0\\0&0&0&b-2\end{array}\right)$$

于是可知 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$ 和 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})$，故

(1) $b\neq 2$ 时，$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示；

解. 即问 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\beta}$ 的解的情况，其中 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$.

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\beta}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \end{array}\right) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & -1 & a & -2 \end{array}\right) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-2 \end{array}\right)$$

于是可知 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$ 和 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\beta})$，故

(1) $b \neq 2$ 时，$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示；

(2) $a \neq 1, b = 2$ 时，$\boldsymbol{\beta}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一线性表示；

解. 即问 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的解的情况，其中 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$.

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&3\\4&7&1&10\\0&1&-1&b\\2&3&a&4\end{array}\right)\overset{r}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&1&-1&b\\0&-1&a&-2\end{array}\right)\overset{r}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&3\\0&1&-1&2\\0&0&a-1&0\\0&0&0&b-2\end{array}\right)$$

于是可知 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$ 和 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})$，故

(1) $b\neq 2$ 时，$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示;

(2) $a\neq 1, b=2$ 时，$\boldsymbol{\beta}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一线性表示;

(3) $a=1, b=2$ 时，$\boldsymbol{\beta}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 不唯一线性表示.

例：线性方程组解的性质

例. 设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}$，则(　　).

(A) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解

(B) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解

(C) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解

(D) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解

例. 设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}$, 则(D).

(A) 若 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 仅有零解, 则 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有唯一解

(B) 若 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 有非零解, 则 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有无穷多解

(C) 若 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有无穷多解, 则 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 只有零解

(D) 若 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有无穷多解, 则 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 有非零解

例. 设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}$, 则(D).

(A) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解, 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解

(B) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解, 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解

(C) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解, 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解

(D) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解, 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解

练习. 设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}, \mathrm{R}(\boldsymbol{A})=m<n$, 则(   ).

(A) $\boldsymbol{A}$ 的任意 m 个列向量线性无关

(B) $\boldsymbol{A}$ 的任意一个 m 阶子式不等于 0

(C) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 一定有无穷多个解

(D) $\boldsymbol{A} \overset{r}{\sim} (\boldsymbol{E},\boldsymbol{O})$

例. 设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}$, 则(D).

(A) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解, 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解

(B) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解, 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解

(C) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解, 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解

(D) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解, 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解

练习. 设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}, \mathrm{R}(\boldsymbol{A})=m<n$, 则(C).

(A) $\boldsymbol{A}$ 的任意 m 个列向量线性无关

(B) $\boldsymbol{A}$ 的任意一个 m 阶子式不等于 0

(C) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 一定有无穷多个解

(D) $\boldsymbol{A} \overset{r}{\sim} (\boldsymbol{E},\boldsymbol{O})$

例. a 为何值时，以下方程 (1) 有唯一解；(2) 无解；(3) 有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解.

$$\begin{cases} (1+a)x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + (1+a)x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + (1+a)x_3 = a \end{cases}$$

例. a 为何值时，以下方程 (1) 有唯一解；(2) 无解；(3) 有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解.

$$\begin{cases} (1+a)x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + (1+a)x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + (1+a)x_3 = a \end{cases}$$

和之前求带参数矩阵的秩类似，此处不宜实施常数不确定是否非零的第二类初等变换 $\frac{1}{a+1}r_2, (a-2)r_3$ 等.

典型例题：解非齐次线性方程组

例. a 为何值时，以下方程 (1) 有唯一解；(2) 无解；(3) 有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解.

$$\begin{cases} (1+a)x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + (1+a)x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + (1+a)x_3 = a \end{cases}$$

和之前求带参数矩阵的秩类似，此处不宜实施常数不确定是否非零的第二类初等变换 $\frac{1}{a+1}r_2, (a-2)r_3$ 等.

解.

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1+a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+a & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1+a & a \end{array}\right) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1+a & 1 & 3 \\ 0 & -a & a & a-3 \\ 0 & a & a^2+2a & a^2+a \end{array}\right)$$

续解.

$$\stackrel{r}{\sim}\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1+a & 1 & 3 \\ 0 & a & -a & 3-a \\ 0 & 0 & a^2+3a & a^2+2a-3 \end{array}\right).$$

典型例题：解非齐次线性方程组

续解.

$$\overset{r}{\sim}\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1+a & 1 & 3 \\ 0 & a & -a & 3-a \\ 0 & 0 & a^2+3a & a^2+2a-3 \end{array}\right).$$

(1) 若 $a \neq 0, -3$, 则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = 3$, 方程有唯一解.

续解.

$$\overset{r}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1+a & 1 & 3\\ 0 & a & -a & 3-a\\ 0 & 0 & a^2+3a & a^2+2a-3\end{array}\right).$$

(1) 若 $a\neq 0,-3$, 则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=3$, 方程有唯一解.

(2) 若 $a=0$, 则 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\overset{r}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$, $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=1<\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=2$, 方程无解.

典型例题：解非齐次线性方程组

续解.

续解.

(3) 若 $a=-3$, 则 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=2$, 方程有无穷多解.

典型例题：解非齐次线性方程组

续解.

(3) 若 $a=-3$, 则 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=2$, 方程有无穷多解. 特解为 $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, 基础解系为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 通解为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

k 为任意常数.

续解.

(3) 若 $a=-3$, 则 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\overset{r}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&-1\\0&1&-1&-2\\0&0&0&0\end{array}\right)$, $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=2$, 方程有无穷多解. 特解为 $\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}$, 基础解系为 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, 通解为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

k 为任意常数.

由于系数矩阵为 3 阶方阵, 也可以先通过 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 得到唯一解情形.

练习. a, b 为何值时，以下方程
(1) 有唯一解；(2) 无解；(3) 有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + (a+2)x_3 + 4x_4 = b+3 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + (a+8)x_4 = 5 \end{cases}$$

答案.

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 4 & b+3 \\ 3 & 5 & 1 & a+8 & 5 \end{array}\right) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & 0 \end{array}\right).$$

答案.

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 4 & b+3 \\ 3 & 5 & 1 & a+8 & 5 \end{array}\right) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & 0 \end{array}\right).$$

(1) $a \neq -1$ 时有唯一解;

典型例题：解非齐次线性方程组

答案.

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 4 & b+3 \\ 3 & 5 & 1 & a+8 & 5 \end{array}\right) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & 0 \end{array}\right).$$

(1) $a \neq -1$ 时有唯一解;

(2) $a = -1, b \neq 0$ 时无解;

答案.

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 4 & b+3 \\ 3 & 5 & 1 & a+8 & 5 \end{array}\right) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & 0 \end{array}\right).$$

(1) $a \neq -1$ 时有唯一解;

(2) $a = -1, b \neq 0$ 时无解;

(3) $a = -1, b = 0$ 时有无穷多解，通解为

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

例：线性方程组解的性质

例. 设四元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3. 已知 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 是它的三个解向量，且

$$\boldsymbol{\eta}_1=(2,3,4,5)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}.$$

求 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

例. 设四元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3. 已知 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 是它的三个解向量，且

$$\boldsymbol{\eta}_1=(2,3,4,5)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}.$$

求 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

解. 由于 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=3$，因此 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系只包含一个向量.

例. 设四元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3. 已知 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 是它的三个解向量，且

$$\boldsymbol{\eta}_1=(2,3,4,5)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}.$$

求 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

解. 由于 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=3$，因此 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系只包含一个向量. 根据解的性质，

$$2\boldsymbol{\eta}_1-(\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3)=(3,4,5,6)^{\mathrm{T}}$$

是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个解，因此这是它的一个基础解系.

例：线性方程组解的性质

例. 设四元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3. 已知 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 是它的三个解向量，且

$$\boldsymbol{\eta}_1=(2,3,4,5)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}.$$

求 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

解. 由于 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=3$，因此 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系只包含一个向量. 根据解的性质，

$$2\boldsymbol{\eta}_1-(\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3)=(3,4,5,6)^{\mathrm{T}}$$

是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个解，因此这是它的一个基础解系. 故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}_1+k(3,4,5,6)^{\mathrm{T}}=(2,3,4,5)^{\mathrm{T}}+k(3,4,5,6)^{\mathrm{T}}.$$

例：线性方程组解的性质

例. 已知 4 阶方阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)$，且 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1 = 2\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3$. 若 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_4$，求 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\beta}$ 的通解.

例：线性方程组解的性质

例. 已知 4 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$，且 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$. 若 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，求 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

解. 由题设可知 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=3$，因此 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系只包含一个向量.

例. 已知 4 阶方阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)$，且 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1 = 2\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3$. 若 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_4$，求 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}$ 的通解.

解. 由题设可知 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = 3$，因此 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系只包含一个向量. 由 $\boldsymbol{\alpha}_1 = 2\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3$ 可知 $(1, -2, 1, 0)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的一个解，因此这是它的一个基础解系.

例：线性方程组解的性质

例. 已知 4 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$，且 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$. 若 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，求 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

解. 由题设可知 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=3$，因此 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系只包含一个向量. 由 $\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$ 可知 $(1,-2,1,0)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的一个解，因此这是它的一个基础解系. 注意到 $(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解，故通解为

$$\boldsymbol{x}=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}+k(1,-2,1,0)^{\mathrm{T}}.$$

例. 已知 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两个不同的解，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为(　　)，k_1, k_2 为任意常数.

(A) $\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$

(B) $2\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)$

(C) $\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)$

(D) $\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)$

例：线性方程组解的性质

例. 已知 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的两个不同的解，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的通解为(B)，k_1, k_2 为任意常数.

(A) $\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1 - \boldsymbol{\beta}_2}{2} + k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2)$

(B) $2\boldsymbol{\beta}_1 - \boldsymbol{\beta}_2 + k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2(\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2)$

(C) $\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2}{2} + k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2(\boldsymbol{\beta}_1 - \boldsymbol{\beta}_2)$

(D) $\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1 - \boldsymbol{\beta}_2}{2} + k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2(\boldsymbol{\beta}_1 - \boldsymbol{\beta}_2)$

例. 已知 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两个不同的解，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为（ B ），k_1, k_2 为任意常数.

(A) $\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$

(B) $2\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)$

(C) $\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)$

(D) $\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)$

练习. 已知 $\boldsymbol{\eta}_1=(0,1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\eta}_2=(-3,2,2)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=-1 \\ 3x_1+x_2+4x_3=1 \\ ax_1+bx_2+cx_3=d \end{cases}$ 的两个解向量，则该方程组的通解为____________________.

例. 已知 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的两个不同的解，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系，则 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的通解为（ B ），k_1, k_2 为任意常数.

(A) $\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1 - \boldsymbol{\beta}_2}{2} + k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2)$

(B) $2\boldsymbol{\beta}_1 - \boldsymbol{\beta}_2 + k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2(\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2)$

(C) $\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2}{2} + k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2(\boldsymbol{\beta}_1 - \boldsymbol{\beta}_2)$

(D) $\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1 - \boldsymbol{\beta}_2}{2} + k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2(\boldsymbol{\beta}_1 - \boldsymbol{\beta}_2)$

练习. 已知 $\boldsymbol{\eta}_1 = (0,1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\eta}_2 = (-3,2,2)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = d \end{cases}$ 的两个解向量，则该方程组的通解为 $\underline{\quad (0,1,0)^{\mathrm{T}} + k(-3,1,2)^{\mathrm{T}} \quad}$.

若 $\boldsymbol{B}$ 的列向量可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示, 则 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 的列向量组和 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价,

若 $\boldsymbol{B}$ 的列向量可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示, 则 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 的列向量组和 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价, 因此 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$.

若 $\boldsymbol{B}$ 的列向量可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示, 则 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 的列向量组和 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价, 因此 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$.

注意到 $\boldsymbol{A}$ 列向量生成的空间 V 是 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 列向量生成的空间 W 的子空间.

若 $\boldsymbol{B}$ 的列向量可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示, 则 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 的列向量组和 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价, 因此 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$.

注意到 $\boldsymbol{A}$ 列向量生成的空间 V 是 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 列向量生成的空间 W 的子空间. 若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, 则 $\boldsymbol{A}$ 列向量组的一个极大无关组 S 也是 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 的极大无关组.

若 $\boldsymbol{B}$ 的列向量可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示, 则 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 的列向量组和 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价, 因此 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$.

注意到 $\boldsymbol{A}$ 列向量生成的空间 V 是 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 列向量生成的空间 W 的子空间. 若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, 则 $\boldsymbol{A}$ 列向量组的一个极大无关组 S 也是 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 的极大无关组. 从而 $\boldsymbol{B}$ 的列向量都是 S 的线性组合, 也是 $\boldsymbol{A}$ 列向量的线性组合.

若 $\boldsymbol{B}$ 的列向量可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示, 则 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 的列向量组和 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价, 因此 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$.

注意到 $\boldsymbol{A}$ 列向量生成的空间 V 是 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 列向量生成的空间 W 的子空间. 若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, 则 $\boldsymbol{A}$ 列向量组的一个极大无关组 S 也是 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 的极大无关组. 从而 $\boldsymbol{B}$ 的列向量都是 S 的线性组合, 也是 $\boldsymbol{A}$ 列向量的线性组合.

定理.

若 $\boldsymbol{B}$ 的列向量可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示, 则 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 的列向量组和 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价, 因此 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$.

注意到 $\boldsymbol{A}$ 列向量生成的空间 V 是 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 列向量生成的空间 W 的子空间. 若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, 则 $\boldsymbol{A}$ 列向量组的一个极大无关组 S 也是 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 的极大无关组. 从而 $\boldsymbol{B}$ 的列向量都是 S 的线性组合, 也是 $\boldsymbol{A}$ 列向量的线性组合.

定理.

(1) $\boldsymbol{B}$ 的列向量组可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示 $\iff$ $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ 有解 $\iff$ $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$.

若 $\boldsymbol{B}$ 的列向量可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示, 则 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 的列向量组和 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价, 因此 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$.

注意到 $\boldsymbol{A}$ 列向量生成的空间 V 是 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 列向量生成的空间 W 的子空间. 若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, 则 $\boldsymbol{A}$ 列向量组的一个极大无关组 S 也是 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 的极大无关组. 从而 $\boldsymbol{B}$ 的列向量都是 S 的线性组合, 也是 $\boldsymbol{A}$ 列向量的线性组合.

定理.

(1) $\boldsymbol{B}$ 的列向量组可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示 $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$ 有解 $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$.

(2) $\boldsymbol{B}$ 的列向量组和 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价 $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{B})$.

例. 证明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 等价，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{\beta}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

例：向量组等价

例. 证明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 等价，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

证明.

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & - & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

例. 证明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 等价，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{\beta}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

证明.

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = \left(\begin{array}{cc:ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & - & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{cc:ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

因此 $\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = \mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2) = \mathrm{R}(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = 2.$ □

在物理实验中，经常会出现实验数据与预期不符的情况.

线性方程组的应用：最小二乘法

在物理实验中，经常会出现实验数据与预期不符的情况. 例如变量 y 应当为变量 $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 的线性组合，即存在 n 维向量 $\boldsymbol{\beta}$ 使得 $y = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$.

线性方程组的应用：最小二乘法

在物理实验中，经常会出现实验数据与预期不符的情况. 例如变量 y 应当为变量 $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 的线性组合，即存在 n 维向量 $\boldsymbol{\beta}$ 使得 $y=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$. 但从实验数据解方程却是无解. 因此我们需要寻找参数 $\boldsymbol{\beta}$ 使得 $y=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 尽可能接近实验数据.

在物理实验中，经常会出现实验数据与预期不符的情况．例如变量 y 应当为变量 $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 的线性组合，即存在 n 维向量 $\boldsymbol{\beta}$ 使得 $y=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$．但从实验数据解方程却是无解．因此我们需要寻找参数 $\boldsymbol{\beta}$ 使得 $y=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 尽可能接近实验数据．

比较常见的是最小二乘法：即寻找参数 $\boldsymbol{\beta}$ 使得

$$\sum_{i=1}^{k}|y_i-\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}|^2=\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}\|^2$$

尽可能小，其中 $(\boldsymbol{x}_i,y_i)$ 是实验数据，$\boldsymbol{y}=(y_1,\ldots,y_k)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}$ 是由行向量 $\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}$ 构成的 $k\times n$ 矩阵．

在物理实验中, 经常会出现实验数据与预期不符的情况. 例如变量 y 应当为变量 $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 的线性组合, 即存在 n 维向量 $\boldsymbol{\beta}$ 使得 $y=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$. 但从实验数据解方程却是无解. 因此我们需要寻找参数 $\boldsymbol{\beta}$ 使得 $y=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 尽可能接近实验数据.

比较常见的是最小二乘法: 即寻找参数 $\boldsymbol{\beta}$ 使得

$$\sum_{i=1}^{k}|y_i-\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}|^2=\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}\|^2$$

尽可能小, 其中 $(\boldsymbol{x}_i,y_i)$ 是实验数据, $\boldsymbol{y}=(y_1,\ldots,y_k)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{A}$ 是由行向量 $\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}$ 构成的 $k\times n$ 矩阵. 注意所有向量 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}$ 形成一个向量空间 V, 也就是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量生成的空间.

在物理实验中, 经常会出现实验数据与预期不符的情况. 例如变量 y 应当为变量 $\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 的线性组合, 即存在 n 维向量 $\boldsymbol{\beta}$ 使得 $y=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$. 但从实验数据解方程却是无解. 因此我们需要寻找参数 $\boldsymbol{\beta}$ 使得 $y=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 尽可能接近实验数据.

比较常见的是最小二乘法: 即寻找参数 $\boldsymbol{\beta}$ 使得

$$\sum_{i=1}^{k}|y_i-\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}|^2=\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}\|^2$$

尽可能小, 其中 $(\boldsymbol{x}_i,y_i)$ 是实验数据, $\boldsymbol{y}=(y_1,\dots,y_k)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{A}$ 是由行向量 $\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}$ 构成的 $k\times n$ 矩阵. 注意所有向量 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}$ 形成一个向量空间 V, 也就是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量生成的空间. $\boldsymbol{y}$ 距离这个空间的距离 $\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}\|$ 达到最小时, $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}$ 应当和这个空间正交.

线性方程组的应用：最小二乘法

在物理实验中，经常会出现实验数据与预期不符的情况。例如变量 y 应当为变量 $\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 的线性组合，即存在 n 维向量 $\boldsymbol{\beta}$ 使得 $y=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$。但从实验数据解方程却是无解。因此我们需要寻找参数 $\boldsymbol{\beta}$ 使得 $y=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 尽可能接近实验数据。

比较常见的是最小二乘法：即寻找参数 $\boldsymbol{\beta}$ 使得

$$\sum_{i=1}^{k}|y_i-\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}|^2=\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}\|^2$$

尽可能小，其中 $(\boldsymbol{x}_i,y_i)$ 是实验数据，$\boldsymbol{y}=(y_1,\dots,y_k)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}$ 是由行向量 $\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}$ 构成的 $k\times n$ 矩阵。注意所有向量 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}$ 形成一个向量空间 V，也就是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量生成的空间。$\boldsymbol{y}$ 距离这个空间的距离 $\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}\|$ 达到最小时，$\boldsymbol{y}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}$ 应当和这个空间正交。于是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{\beta}$ 是方程

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$

的解。