



合肥工业大学

HEFEI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

## 线性代数

---

张神星 (合肥工业大学)

翡翠科教楼 B1810 东

[zhangshenxing@hfut.edu.cn](mailto:zhangshenxing@hfut.edu.cn)

<https://faculty.hfut.edu.cn/zhangshenxing>

## 001 班 (交通工、新能源) 课程信息

- 课时: 共 10 周 40 课时, 从 2026-03-03 到 2026-05-07
- 期末考试在课程结束后两周左右



001 班 QQ 群: **1054817276**  
入群答案 **1400071B**



教材: 高等教育出版社  
唐烁, 朱士信 《线性代数》

## 003 班 (会计、信管) 课程信息

- 课时: 共 10 周 40 课时, 从 2026-03-03 到 2026-05-07
- 期末考试在课程结束后两周左右



003 班 QQ 群: **1078900814**  
入群答案 **1400071B**



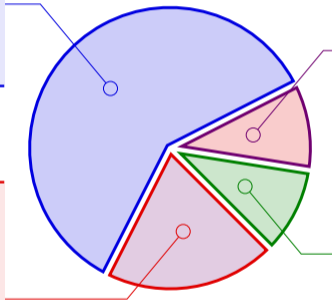
教材: 高等教育出版社  
唐烁, 朱士信 《线性代数》

## 期末考试 60 分

期末卷面需要达到 50 分才计算总评分数, 50 分以下直接不及格。电子阅卷, 批阅后无法调整分数, 请务必重视!

## 课堂测试 20 分

课堂测试共两次取平均, 测试范围分别为 1-2 章和 3-5 章。测试时间会提前通知。测试时在教室内作答, 否则按未考处理。



## 课后作业 10 分

作业为配套练习册, 扫描后通过超星提交, 约两周交一次。作业必须按时提交, 不允许补交。

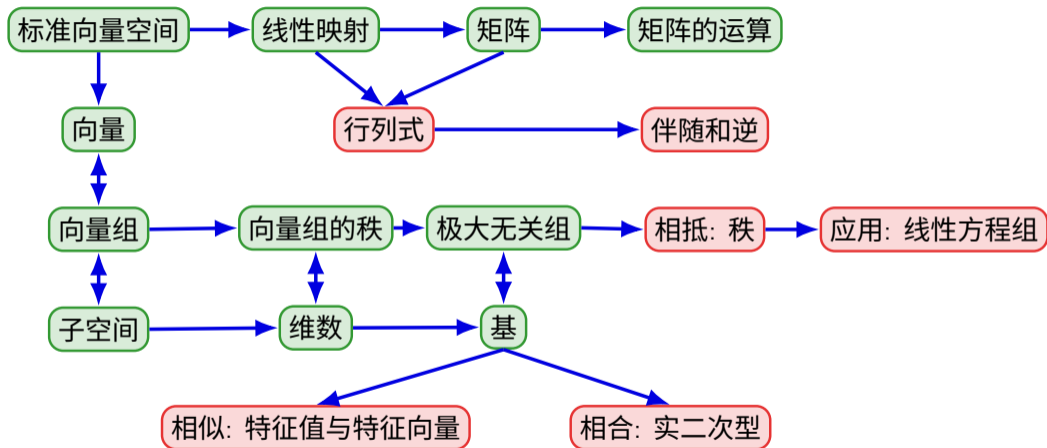
## 智慧课程 10 分

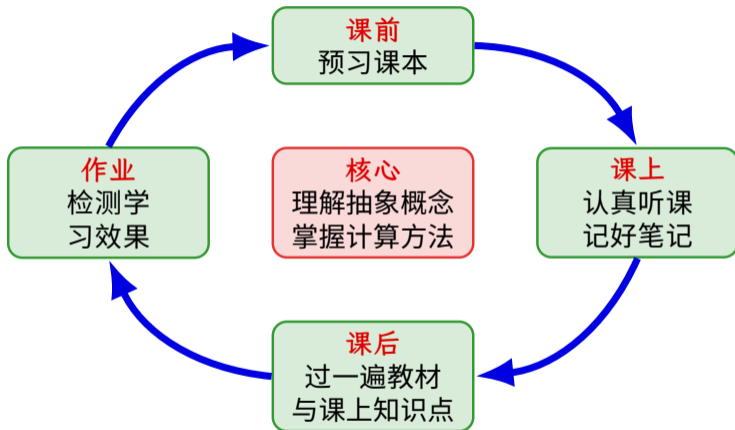
在学习通内完成。  
章节 → 观看视频 (2.5 分);  
章节 → 章节测试 (提交后无法修改或打回, 5 分);  
讨论 (回答彭凯军的五个问题, 2.5 分);  
限时: 3 月 1 日 - 6 月 30 日

线性代数是一门利用代数方法研究线性方程、线性空间、线性变换等线性结构的课程。

线性代数通过从具体的、几何化的观念出发, 抽象出一套代数化的方法, 从而避免了高维情形缺乏几何直观的问题. 如同微积分中“以直代曲”思想引出导数、切线、积分等一系列概念, 线性代数利用“以直代曲”思想将许多非线性问题的处理转化为线性问题, 非线性模型近似为线性模型等.

这些内容在统计学、密码学、运筹学、物理学、工程学、管理学、信息学、计算机科学等很多领域有着广泛的应用. 我们不在此处逐一列举, 在之后的授课中我们会见到它的各种应用.





## 第一章 向量和矩阵

- ① 向量和矩阵的定义
- ② 矩阵的线性运算、乘法和转置
- ③ 方阵的行列式
- ④ 逆矩阵

## 第一节 向量和矩阵的定义

- 向量和向量空间
- 矩阵的定义
- 矩阵与线性映射的关系

我们在高中学习过向量的概念. 在平面上建立一个直角坐标系. 对于平面上的点  $A$ , 连接  $OA$  的有向线段就是一个**向量**. 它可以用  $u = (x, y)$  来表示.

由于向量和平面上的点是一一对应的, 因此我们可以用  $\mathbb{R}^2$  来表示平面上所有向量形成的集合. 在这个集合中有一个特殊的元素, 叫作**零向量**:

$$\mathbf{0} = (0, 0),$$

而且我们可以定义加法和数乘:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y), \lambda \in \mathbb{R}.$$

类似地, 立体空间中的所有向量形成集合  $\mathbb{R}^3$ . 在这个集合中也有零向量、加法和数乘.

我们总使用粗小写字母  $\alpha, \beta, \gamma, x, y, \dots$  表示向量.

$\mathbb{R}^2$  或  $\mathbb{R}^3$  上的零向量、加法和数乘满足:

$$(V1) \quad \alpha + \beta = \beta + \alpha;$$

$$(V2) \quad \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma;$$

$$(V3) \quad \mathbf{0} + \alpha = \alpha;$$

(V4) 对任意  $\alpha$ , 存在  $\beta$  使得  $\alpha + \beta = \mathbf{0}$ . 称  $\beta$  为  $\alpha$  的**负向量**;

$$(V5) \quad (\lambda\mu)\alpha = \lambda(\mu\alpha);$$

$$(V6) \quad (\lambda + \mu)\alpha = \lambda\alpha + \mu\alpha;$$

$$(V7) \quad \lambda(\alpha + \beta) = \lambda\alpha + \lambda\beta;$$

$$(V8) \quad 1 \cdot \alpha = \alpha.$$











- 令  $M_{m \times n}$  表示  $m$  行  $n$  列的矩阵 (Matrix) 全体.
- 若  $m = n$ , 称相应矩阵为  $n$  阶方阵, 并用  $M_n$  来表示  $n$  阶方阵全体.
- 若矩阵元素都是实数, 我们称相应的矩阵为实矩阵, 并用  $M_{m \times n}(\mathbb{R}), M_n(\mathbb{R})$  来表示相应集合.
- 若矩阵元素都是复数, 我们称相应的矩阵为复矩阵, 并用  $M_{m \times n}(\mathbb{C}), M_n(\mathbb{C})$  来表示相应集合.
- 元素全为零的矩阵为零矩阵  $O = O_{m \times n} \in M_{m \times n}$ .











**定义.** 若映射  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  满足

$$f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}), \quad f(\lambda \mathbf{u}) = \lambda(f(\mathbf{u})).$$

称  $f$  是一个**线性映射**或**线性变换**.

反过来, 是不是所有的线性映射  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  都可以表达为前述形式  $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$  呢?

以线性映射  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  为例, 记

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

那么

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3.$$

记

$$f(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{pmatrix}, \quad f(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{42} \end{pmatrix}, \quad f(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ a_{43} \end{pmatrix}.$$







## 第二节 矩阵的线性运算、乘法和转置

- 矩阵的线性运算
- 矩阵的乘法
- 矩阵的幂
- 矩阵的转置























































于是  $A^2$  的  $(i, j)$  元

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^4 a_{ik} a_{kj}$$

就是从  $i$  到  $j$  换乘一次的方案数. 例如从②  $\implies$  ③:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

由于  $b_{23} = 1$ , 因此可通过②  $\implies$  ①  $\implies$  ③ 换乘一次到达.

想一想: 如何从③到达④? 考虑  $A^3$ , 即换乘两次即可.











## 任一方阵可表为对称阵与反对称阵之和

**例.** 证明: 任一方阵均可写成一对称阵和一反对称阵之和.

**证明.**

$$A = \frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2}.$$

□

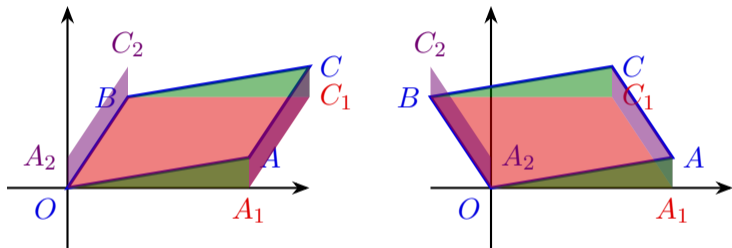
想一想:

- 若函数  $f(x)$  的定义域关于原点对称, 则  $f(x)$  可以表示成一个偶函数和一个奇函数之和.
- 复数  $z$  可以写成  $z_1 + z_2$ , 其中  $\bar{z}_1 = z_1, \bar{z}_2 = -z_2$ .

### 第三节 方阵的行列式

- 行列式的定义
- 行列式的性质
- 拉普拉斯展开
- 行列式的计算举例
- 三对角和范德蒙型行列式

设平面上有  $\square OACB$ , 其中  $A, B$  坐标分别为  $u = (a, c)^T, v = (b, d)^T$ . 如果将  $u$  拆分为  $(a, 0)^T + (0, c)^T$ , 那么得到的三个平行四边形的面积有什么联系呢?



令  $A_1(a, 0)$ , 并作  $\square OA_1C_1B$ ; 令  $A_2(0, c)$ , 并作  $\square OA_2C_2B$ . 那么  $\square OACB$  的面积是这两个相加还是相减? 使用割补法可知为**二者相减**.

如果  $A$  在第一象限,  $B$  在第二象限. 那么  $\square OACB$  的面积是这两个相加还是相减? 使用割补法可知为**二者相加**.



对于  $v$  也有类似的性质:

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2| &= |\mathbf{u}, \mathbf{v}_1| + |\mathbf{u}, \mathbf{v}_2|, \\ |\mathbf{u}, k\mathbf{v}| &= k|\mathbf{u}, \mathbf{v}|. \end{aligned}$$

$\mathbf{u} = (1, 0)^T, \mathbf{v} = (0, 1)^T$  形成的平行四边形就是单位正方形, 有向面积为 1. 因此

$$|\mathbf{E}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

如果交换  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ , 那么面积不变但是有向面积变为  $-1$  倍. 因此

$$|\mathbf{v}, \mathbf{u}| = \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = -|\mathbf{u}, \mathbf{v}| = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

通过前面三条性质 ( $|E| = 1$ ; 关于任一列可加且数乘可提取出去; 交换两列变  $-1$  倍), 我们可以完全确定  $|u, v|$ .

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{vmatrix} \\ &= ac \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + ad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + bc \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + bd \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

注意到交换  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$  两列式子不变, 但又相差  $-1$  倍, 因此只能是零. 于是

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

我们把它叫做二阶方阵  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  的行列式.



设  $k_1, k_2, \dots, k_n$  是  $1, 2, \dots, n$  的排列. 如果排列  $k_1, k_2, \dots, k_n$  需要奇数次对换变成  $1, 2, \dots, n$ , 记  $\text{sgn}(k_1, \dots, k_n) = -1$ ; 否则  $\text{sgn}(k_1, \dots, k_n) = +1$ . 根据反对称性,

$$|e_{k_1}, \dots, e_{k_n}| = \text{sgn}(k_1, \dots, k_n) |e_1, \dots, e_n| = \text{sgn}(k_1, \dots, k_n).$$

**定义.** 设  $A = (a_{ij})$  是  $n$  阶方阵. 定义  $A$  的行列式为

$$|A| = \sum \text{sgn}(k_1, \dots, k_n) a_{k_1 1} a_{k_2 2} \cdots a_{k_n n},$$

其中  $k_1, k_2, \dots, k_n$  取遍  $1, 2, \dots, n$  的全体排列.

## 2, 3 阶行列式

当  $n = 2$  时,  $\text{sgn}(12) = 1, \text{sgn}(21) = -1$ , 于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

当  $n = 3$  时,

$$\begin{aligned} \text{sgn}(123) &= \text{sgn}(231) = \text{sgn}(312) = 1, \\ \text{sgn}(132) &= \text{sgn}(213) = \text{sgn}(321) = -1, \end{aligned}$$

于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

## 例: 2,3 阶行列式的计算

例.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-5) \cdot 4 + 3 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot 3 \cdot 4 - 2 \cdot (-5) \cdot 2 \\ = -20 + 6 + 6 - 1 - 36 + 20 = -25.$$

练习. 若  $k > 0$  且  $\begin{vmatrix} k & 2 & 1 \\ 2 & k & 1 \\ k & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ , 则  $k = \underline{2}$ .

- (1) 行列式将一个方阵映射到一个数.
- (2) 1阶行列式就是方阵里面唯一的那个元素, 尽管也记作  $|\cdot|$ , 但注意和绝对值区分.
- (3) 2, 3阶行列式可以用对角线法直接得到展开式, 但是更高阶的没有这种表示方法.
- (4) **对角阵**的行列式

$$|\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)| = a_1 a_2 \cdots a_n,$$

分块对角阵的行列式

$$|\text{diag}(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m)| = |\mathbf{A}_1| \cdots |\mathbf{A}_m|.$$

特别地  $|\mathbf{E}_n| = 1, |\mathbf{O}_n| = 0$ .

- (5)  $|\mathbf{A}|$  是由一些  $\pm a_{k_1 1} a_{k_2 2} \cdots a_{k_n n}$  相加得到, 其中  $k_1, k_2, \dots, k_n$  取遍  $1, 2, \dots, n$  的所有排列, 一共有  $n!$  个这样的项, 其中一半取  $+$ , 一半取  $-$  ( $n \geq 2$ ).
- (6) 注意一般  $|\mathbf{A} + \mathbf{B}| \neq |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}|$ .
- (7) 可以把  $|\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n|$  看成  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  的某种乘法, 满足分配率, 但是不满足交换律.





## 行列式的转置不变性

(2) 转置不改变行列式:  $|A^T| = |A|$ .

一个排列  $k_1, \dots, k_n$  可以看成是集合  $\{1, 2, \dots, n\}$  到自身的双射  $i \mapsto k_i$ . 设它的逆映射对应的排列是  $l_1, \dots, l_n$ , 则  $l_{k_i} = i$ . 由于

$$\begin{aligned} |A| &= \sum \operatorname{sgn}(k_1, \dots, k_n) a_{k_1 1} \cdots a_{k_n n} = \sum \operatorname{sgn}(k_1, \dots, k_n) a_{1 l_1} \cdots a_{n l_n}, \\ |A^T| &= \sum \operatorname{sgn}(l_1, \dots, l_n) a_{1 l_1} \cdots a_{n l_n}, \end{aligned}$$

我们只需说明  $\operatorname{sgn}(k_1, \dots, k_n) = \operatorname{sgn}(l_1, \dots, l_n)$ . 设

$$P = (e_{k_1}, e_{k_2}, \dots, e_{k_n})$$

的  $k_i$  行  $i$  列为 1, 其余项为零. 那么  $|P| = \operatorname{sgn}(k_1, \dots, k_n)$ ,  $|P^T| = \operatorname{sgn}(l_1, \dots, l_n)$ . 由于  $PP^T = E$ , 因此  $|P| \cdot |P^T| = |E| = 1$ . 而  $|P| = \pm 1$ , 因此  $|P| = |P^T|$ .



- (3) 互换两行 (列) 后, 方阵的行列式变为  $-1$  倍.
- (4) 方阵的某一行 (列) 乘  $k$  后, 方阵的行列式变为  $k$  倍.
- (5) 将方阵某一行 (列) 对应向量写成两个向量之和, 则行列式也可对应拆成两个行列式之和.

### 推论.

- (1) 具有相同的两行 (列) 的方阵的行列式为零:  $|\cdots, v, \cdots, v, \cdots| = 0.$
- (2) 若方阵有一行 (列) 全为零, 则行列式为零:  $|\cdots, 0, \cdots| = 0.$
- (3) 若方阵有两行 (列) 成比例, 则行列式为零:  $|\cdots, v, \cdots, kv, \cdots| = 0.$
- (4) 行列式中某一行 (列) 的公因子可以提到行列式外面.











## 例: 使用初等变换计算行列式

例. 若  $abcd = 1$ , 证明  $A = \begin{pmatrix} a^2 + a^{-2} & a & a^{-1} & 1 \\ b^2 + b^{-2} & b & b^{-1} & 1 \\ c^2 + c^{-2} & c & c^{-1} & 1 \\ d^2 + d^{-2} & d & d^{-1} & 1 \end{pmatrix}$  行列式为零.

证明.

$$|A| = \begin{vmatrix} a^2 & a & a^{-1} & 1 \\ b^2 & b & b^{-1} & 1 \\ c^2 & c & c^{-1} & 1 \\ d^2 & d & d^{-1} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a^{-2} & a & a^{-1} & 1 \\ b^{-2} & b & b^{-1} & 1 \\ c^{-2} & c & c^{-1} & 1 \\ d^{-2} & d & d^{-1} & 1 \end{vmatrix} = abcd \begin{vmatrix} a & 1 & a^{-2} & a^{-1} \\ b & 1 & b^{-2} & b^{-1} \\ c & 1 & c^{-2} & c^{-1} \\ d & 1 & d^{-2} & d^{-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a^{-2} & 1 & a^{-1} \\ b & b^{-2} & 1 & b^{-1} \\ c & c^{-2} & 1 & c^{-1} \\ d & d^{-2} & 1 & d^{-1} \end{vmatrix}.$$

由于  $abcd = 1$ , 且等式右侧两个行列式相差  $-1$  倍, 因此  $|A| = 0$ . □



假设  $A$  的第  $n$  列除了  $a_{nn}$  都是零. 若  $k_n \neq n$ , 则  $a_{k_1 1} \cdots a_{k_n n} = 0$ ; 若  $k_n = n$ , 则  $\operatorname{sgn}(k_1, \dots, k_{n-1}, n) = \operatorname{sgn}(k_1, \dots, k_{n-1})$ . 因此

$$|A| = \sum \operatorname{sgn}(k_1, \dots, k_{n-1}, n) a_{k_1 1} \cdots a_{k_{n-1}, n-1} a_{n, n} = a_{nn} M_{nn} = a_{nn} A_{nn}.$$

假设  $A$  的第  $j$  列除了  $a_{ij}$  都是零. 依次对  $A$  实施

$$r_i \leftrightarrow r_{i+1}, \quad r_{i+1} \leftrightarrow r_{i+2}, \quad \dots, \quad r_{n-1} \leftrightarrow r_n,$$

得到的方阵  $B$  就是将  $A$  的第  $i$  行移动到第  $n$  行的后面得到的方阵. 由于一共  $n - i$  次列互换, 因此  $|B| = (-1)^{n-i} |A|$ .

同理, 将  $B$  的第  $j$  列移动到第  $n$  列的后面得到的方阵记为  $C$ , 则

$$|C| = (-1)^{n-j} |B| = (-1)^{i+j} |A|.$$

注意到  $C$  在  $(n, n)$  处元素是  $a_{ij}$ , 余子式是  $M_{ij}$ , 因此

$$|C| = a_{ij} M_{ij}, \quad |A| = (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = a_{ij} A_{ij}.$$

























# 例: 箭形行列式

例.

$$\left| \begin{array}{cccc}
 1 & 1 & \cdots & 1 \\
 1 & 2 & \cdots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 1 & 0 & \cdots & n
 \end{array} \right| \xrightarrow{\substack{c_1 - \frac{1}{i}c_i \\ i \geq 2}} \left| \begin{array}{cccc}
 1 - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{n} & 1 & \cdots & 1 \\
 0 & 2 & \cdots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 0 & 0 & \cdots & n
 \end{array} \right| = \left(1 - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{n}\right)n!.$$

一般的箭形行列式均可用此法处理.





例. 计算矩阵  $A_n =$  
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
 的行列式.











范德蒙行列式还有另一种证明方式, 这种思路对于其它行列式的计算也有帮助.

**证明.**  $f = |A_n|$  是  $x_1, \dots, x_n$  的多项式, 且次数不超过  $1 + 2 + \dots + (n - 1)$ . 由于当  $x_i = x_j$  时  $f = 0$ , 因此  $f$  包含因式  $x_i - x_j$ , 从而

$$f = g \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

比较两边次数可知  $g$  是常数. 注意到  $\prod_{i=1}^n x_i^{i-1}$  只出现在范德蒙行列式对角元的乘积中, 且它在  $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$  中的系数是 1. 因此  $g = 1$ . □

例. 计算

$$\begin{vmatrix} 1^{50} & 2^{50} & \cdots & 100^{50} \\ 2^{50} & 3^{50} & \cdots & 101^{50} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 100^{50} & 101^{50} & \cdots & 199^{50} \end{vmatrix}.$$

**证明.** 将第一行换成  $(x+1)^{50}, \dots, (x+100)^{50}$ , 并将行列式记为  $f(x)$ . 那么  $f(1) = \cdots = f(99) = 0$ . 注意到  $f$  的次数不超过 50, 因此  $f \equiv 0$ .  $\square$

同理若  $k < n - 1$ ,  $\left| ((a_i + b_j)^k)_{1 \leq i, j \leq n} \right| = 0$ .

## 行列式常见计算方法总结

- (1) 2, 3 阶行列式可用对角线法直接展开.
- (2) 三角阵行列式等于对角元的乘积, 分块三角阵行列式等于对角阵行列式乘积.
- (3) 行列式的计算一般需要用**三类初等变换**, 创造出足够多的零.
- (4) 行列式沿一行 (列) 的展开往往是**降阶法**的必要手段.
- (5) 范德蒙型行列式可处理方阵为元素幂次递增的情形.

## 第四节 逆矩阵

- 方阵的伴随矩阵
- 逆矩阵的定义和形式
- 逆矩阵的性质
- 克拉默法则
- 逆矩阵的应用

定义. 设  $A = (a_{ij})$  为  $n \geq 2$  阶方阵. 由  $A$  的代数余子式形成的  $n$  阶方阵

$$A^* = (A_{ji}) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为  $A$  的伴随矩阵.

注意, 伴随矩阵的  $(i, j)$  元是代数余子式  $A_{ji}$  而不是  $A_{ij}$ .

例. 若  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , 则  $A^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ .

伴随矩阵满足如下性质:

(1)  $AA^* = A^*A = |A|E_n$ .

这是因为

$$AA^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

的  $(i, j)$  元是  $a_{i1}A_{j1} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} |A|, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$











由此得到对应的矩阵的逆的定义:

**定义.** 设  $A$  是  $n$  阶方阵. 若存在  $n$  阶方阵  $B$  使得

$$AB = BA = E_n,$$

则称  $A$  是**可逆矩阵**,  $B$  是  $A$  的**逆矩阵**.

可逆矩阵的逆矩阵唯一吗? 设  $B, B'$  都是  $A$  的逆矩阵, 则

$$AB = E_n, \quad B'A = E_n.$$

于是

$$B = (B'A)B = B'(AB) = B'.$$

因此**若逆矩阵存在必唯一**, 记为  $A^{-1}$ .

若  $A$  可逆, 从  $AA^{-1} = E$  可知  $|A| \cdot |A^{-1}| = 1$ . 从而  $|A| \neq 0$ .

反之, 若  $|A| \neq 0$ , 则

$$AA^* = A^*A = |A|E, \quad A \cdot \frac{1}{|A|}A^* = \frac{1}{|A|}A^* \cdot A = E, \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*.$$

**逆矩阵的存在性和形式.**  $n$  阶方阵  $A$  可逆当且仅当  $|A| \neq 0$ . 此时  $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$ .









# 例: 分块对角阵

例. 求  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$  的逆矩阵.

解. 设  $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ , 则  $\mathbf{A}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{A}_2^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

故  $\mathbf{A}^{-1} = \text{diag}(\mathbf{A}_1^{-1}, \mathbf{A}_2^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & \\ -1 & 2 & & \\ & & 1/2 & 0 \\ & & 1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$ .





设  $f(x)$  是一多项式,  $f(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$ , 我们想求  $(\mathbf{A} - a\mathbf{E})^{-1}$ . 由带余除法可以找到多项式  $h(x)$  和常数  $r = f(a)$ , 使得

$$f(x) = (x - a)h(x) + r,$$

因此

$$f(\mathbf{A}) - f(a)\mathbf{E} = (\mathbf{A} - a\mathbf{E})h(\mathbf{A}).$$

从而当  $f(a) \neq 0$  时,  $(\mathbf{A} - a\mathbf{E})^{-1} = -\frac{1}{f(a)}h(\mathbf{A})$ . 当  $f(a) = 0$  时,  $\mathbf{A} - a\mathbf{E}$  未必可逆.

对于和  $f(x)$  没有公因子的多项式  $g(x)$ , 也总可以通过辗转相除找到多项式  $\alpha(x), \beta(x)$  使得

$$\alpha(x)f(x) + \beta(x)g(x) = 1.$$

从而  $g(\mathbf{A})^{-1} = \beta(\mathbf{A})$ .

逆矩阵满足如下性质:

(1) 设  $A$  可逆,  $\lambda \neq 0$ .

- $|A^{-1}| = |A|^{-1}$ ;
- $A^{-1}$  可逆, 且  $(A^{-1})^{-1} = A$ ;
- $\lambda A$  可逆, 且  $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$ ;
- $A^T$  可逆, 且  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ ;
- $A^*$  可逆, 且  $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^* = \frac{1}{|A|} A$ .

由于  $AA^* = |A|E$ , 因此  $A^* = |A|A^{-1}$ . 于是

$$(A^{-1})^* = |A^{-1}|(A^{-1})^{-1} = \frac{1}{|A|} A, \quad (A^*)^{-1} = (|A|A^{-1})^{-1} = \frac{1}{|A|} A.$$







例. 设  $A$  是 3 阶方阵,  $|A| = \frac{1}{2}$ . 求  $|(2A)^{-1} - (2A)^*|$ .

解.

$$(2A)^{-1} - (2A)^* = \frac{1}{2}A^{-1} - |2A| \cdot (2A)^{-1} = \frac{1}{2}A^{-1} - 4 \cdot \frac{1}{2}A^{-1} = -\frac{3}{2}A^{-1}$$

因此

$$|(2A)^{-1} - (2A)^*| = \left| -\frac{3}{2}A^{-1} \right| = \left( -\frac{3}{2} \right)^3 \cdot 2 = -\frac{27}{4}.$$

## 例：逆矩阵计算方阵的幂

例. 设  $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 2 \end{pmatrix}$ , 求  $(P\Lambda P^{-1})^n$ .

解.  $|P| = 2$ ,  $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ,

$$\begin{aligned}(P\Lambda P^{-1})^n &= P\Lambda P^{-1} \cdot P\Lambda P^{-1} \cdots P\Lambda P^{-1} = P\Lambda^n P^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 2^n - 1 \\ 2 - 2^{n+1} & 2^{n+1} - 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

由此可知, 对于多项式  $f(x)$ ,  $f(PAP^{-1}) = Pf(A)P^{-1}$ .

**练习.** 设  $A$  是 3 阶方阵, 设  $P$  是可逆方阵使得  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$ , 那么  $P^{-1}A^*P = \underline{\text{diag}(6, 3, 2)}$ .

## 例：矩阵乘积的伴随

例. 证明  $(AB)^* = B^*A^*$ .

证明. 若  $A, B$  均可逆, 则

$$(AB)^* = |AB|(AB)^{-1} = |A| \cdot |B|B^{-1}A^{-1} = B^*A^*.$$

一般情形下, 设  $f(x)$  是

$$((xE + A)(xE + B))^* - (xE + B)^*(xE + A)^*$$

的  $(i, j)$  元. 注意到  $|xE + A|$  展开式包含  $x^n$  项, 所以它是  $x$  的多项式. 因此最多只有  $2n$  个  $x$  使得  $|(xE + A)(xE + B)| = 0$ . 对除此之外的无穷多  $x, f(x) = 0$ . 而  $f$  均是  $x$  的多项式, 这迫使  $f \equiv 0, f(0) = 0$ . 故  $(AB)^* = B^*A^*$ . □

伴随、逆、转置相互可交换, 且均满足此种性质.





对于齐次线性方程组  $Ax = 0$ , 令

$$V = \{x \mid Ax = 0\}$$

表示该方程的所有解形成的集合. 显然  $0 \in V$ . 若  $u, v \in V$ , 则  $Au = Av = 0$ . 于是

$$A(u + v) = A(\lambda v) = 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

换言之, 从而  $V$  构成一个向量空间. 对于一般情形, 若  $A\xi = Ax = b$ , 则  $A(x - \xi) = 0$ , 从而它所有的解就是  $x = \xi + v, v \in V$ .

设  $A$  是方阵. 显然**零解**  $x = 0$  是  $Ax = 0$  的解, 其它解被称为**非零解**. 由于非零解的倍数还是它的解, 因此  $|A| = 0 \iff Ax = 0$  有无穷多 (非零) 解. 再根据解的特点可知  $|A| = 0 \iff Ax = b$  无解或有无穷多解.





**证明.** 线性方程组  $\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \\ bx_1 + cx_2 + ax_3 = 0 \\ cx_1 + ax_2 + bx_3 = 0 \end{cases}$  有非零解  $(x, y, 1)$ . 因此  $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = 0$ .

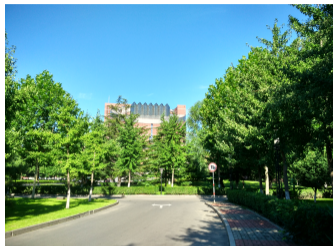
$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} &= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \\ &= (a+b+c)(bc + ac + ab - a^2 - b^2 - c^2) \\ &= -\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]. \end{aligned}$$

由于这是三条不同直线, 因此  $a, b, c$  不可能全部相等, 从而  $a+b+c=0$ . □

想一想: 为什么  $a+b+c=0$  时, 三条直线一定相交于一点?







左图是一张夏天的风景图，我们希望把它修改成秋天的景色. Photoshop 提供了将颜色重新搭配的通道混合器. 用取色工具选取树叶、蓝天、地面的颜色，分别得到 RGB 值为

$$(59, 181, 19), \quad (90, 185, 249), \quad (210, 205, 186).$$

我们希望将树叶变成金黄色 RGB(234, 228, 70) 而保持蓝天和地面的颜色不变. 则我们需要的矩阵  $A$  满足

$$A \begin{pmatrix} 59 & 90 & 210 \\ 181 & 185 & 205 \\ 19 & 249 & 186 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 234 & 90 & 210 \\ 228 & 185 & 205 \\ 70 & 249 & 186 \end{pmatrix}.$$

