



合肥工业大学
HEFEI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

线性代数

张神星 (合肥工业大学)

翡翠科教楼 B1810 东

zhangshenxing@hfut.edu.cn

<https://faculty.hfut.edu.cn/zhangshenxing>

001 班 (交通工、新能源) 课程信息

- 课时: 共 10 周 40 课时, 从 2026-03-03 到 2026-05-07
- 期末考试在课程结束后两周左右



001 班 QQ 群: **1054817276**
入群答案 **1400071B**



教材: 高等教育出版社
唐烁, 朱士信 《线性代数》

003 班 (会计、信管) 课程信息

- 课时: 共 10 周 40 课时, 从 2026-03-03 到 2026-05-07
- 期末考试在课程结束后两周左右



003 班 QQ 群: **1078900814**
入群答案 **1400071B**



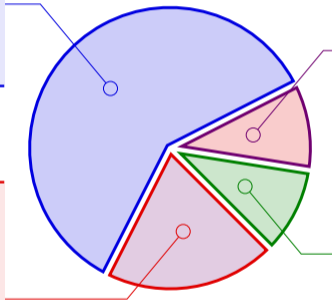
教材: 高等教育出版社
唐烁, 朱士信 《线性代数》

期末考试 60 分

期末卷面需要达到 50 分才计算总评分数, 50 分以下直接不及格。电子阅卷, 批阅后无法调整分数, 请务必重视!

课堂测试 20 分

课堂测试共两次取平均, 测试范围分别为 1-2 章和 3-5 章。测试时间会提前通知。测试时在教室内作答, 否则按未考处理。



课后作业 10 分

作业为配套练习册, 扫描后通过超星提交, 约两周交一次。作业必须按时提交, 不允许补交。

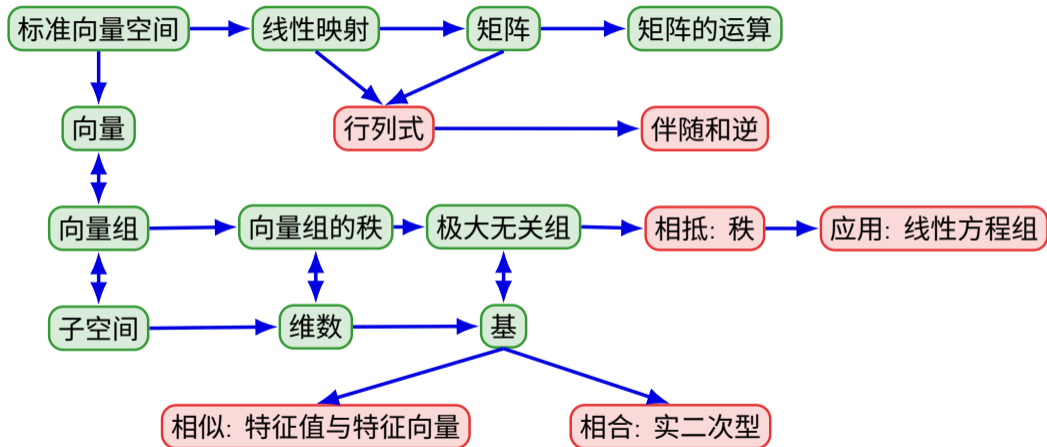
智慧课程 10 分

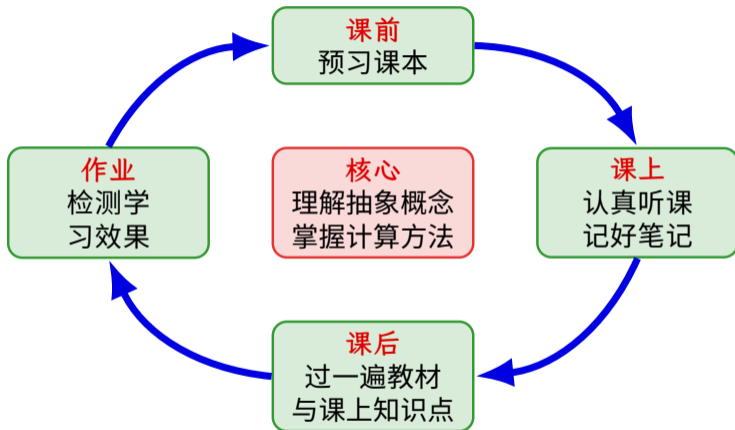
在学习通内完成。
章节 → 观看视频 (2.5 分);
章节 → 章节测试 (提交后无法修改或打回, 5 分);
讨论 (回答彭凯军的五个问题, 2.5 分);
限时: 3 月 1 日 - 6 月 30 日

线性代数是一门利用代数方法研究线性方程、线性空间、线性变换等线性结构的课程.

线性代数通过从具体的、几何化的观念出发, 抽象出一套代数化的方法, 从而避免了高维情形缺乏几何直观的问题. 如同微积分中“以直代曲”思想引出导数、切线、积分等一系列概念, 线性代数利用“以直代曲”思想将许多非线性问题的处理转化为线性问题, 非线性模型近似为线性模型等.

这些内容在统计学、密码学、运筹学、物理学、工程学、管理学、信息学、计算机科学等很多领域有着广泛的应用. 我们不在此处逐一列举, 在之后的授课中我们会见到它的各种应用.





第一章 行列式

- ① 向量和矩阵
- ② 行列式的定义
- ③ 行列式的性质
- ④ 克拉默法则

第一节 向量和矩阵

- 向量的定义
- 矩阵的定义

我们在高中学习过向量的概念. 在平面上建立一个直角坐标系. 对于平面上的点 A , 连接 OA 的有向线段就是一个向量. 它可以用 $u = (x, y)$ 来表示.

由于向量和平面上的点是一一对应的, 因此我们可以用 \mathbb{R}^2 来表示平面上所有向量形成的集合. 在这个集合中有一个特殊的元素, 叫作零向量:

$$\mathbf{0} = (0, 0),$$

而且我们可以定义加法和数乘:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y), \lambda \in \mathbb{R}.$$

类似地, 立体空间中的所有向量形成集合 \mathbb{R}^3 . 在这个集合中也有零向量、加法和数乘.

我们总使用粗小写字母 $\alpha, \beta, \gamma, x, y, \dots$ 表示向量.

\mathbb{R}^2 或 \mathbb{R}^3 上的零向量、加法和数乘满足:

$$(V1) \quad \alpha + \beta = \beta + \alpha;$$

$$(V2) \quad \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma;$$

$$(V3) \quad \mathbf{0} + \alpha = \alpha;$$

(V4) 对任意 α , 存在 β 使得 $\alpha + \beta = \mathbf{0}$. 称 β 为 α 的**负向量**;

$$(V5) \quad (\lambda\mu)\alpha = \lambda(\mu\alpha);$$

$$(V6) \quad (\lambda + \mu)\alpha = \lambda\alpha + \mu\alpha;$$

$$(V7) \quad \lambda(\alpha + \beta) = \lambda\alpha + \lambda\beta;$$

$$(V8) \quad 1 \cdot \alpha = \alpha.$$

矩阵的定义

为了研究向量间的联系, 我们引入矩阵的概念.

定义. 将 mn 个数按照每行 n 个元素, 每列 m 个元素, 排成的数表称为 m 行 n 列矩阵, 或简称为 $m \times n$ 矩阵:

$$A = A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n},$$

其中 a_{ij} 表示 A 的第 i 行 j 列元素, 并记 $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

我们总使用粗大写字母 A, B, Λ, \dots 表示矩阵. 不强调矩阵的阶时, 也可省略右下角 $m \times n$.

矩阵的圆括号 (小括号) 也可用方括号 (中括号) 来代替.

- 令 $M_{m \times n}$ 表示 m 行 n 列的矩阵 (Matrix) 全体.
- 若 $m = n$, 称相应矩阵为 n 阶方阵, 并用 M_n 来表示 n 阶方阵全体.
- 若矩阵元素都是实数, 我们称相应的矩阵为实矩阵, 并用 $M_{m \times n}(\mathbb{R}), M_n(\mathbb{R})$ 来表示相应集合.
- 若矩阵元素都是复数, 我们称相应的矩阵为复矩阵, 并用 $M_{m \times n}(\mathbb{C}), M_n(\mathbb{C})$ 来表示相应集合.
- 元素全为零的矩阵为零矩阵 $O = O_{m \times n} \in M_{m \times n}$.

称 a_{11}, \dots, a_{nn} 为方阵 $A = (a_{ij})_n$ 的**对角元**. 方阵中

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \in M_n$$

分别为**上三角阵**, **下三角阵**和**对角阵** (空白部分表示元素都是零). 为书写方便, 对角阵也可记作 (对角: diagonal)

$$\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

称方阵

$$E = E_n = \text{diag}(1, 1, \dots, 1) \in M_n$$

为**单位阵**.

将只有一行的矩阵

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \in M_{1 \times n}$$

称为 n 维行矩阵. 只有一列的矩阵

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in M_{n \times 1}$$

称为 n 维列矩阵.

我们将在后面定义矩阵的加法和数乘, 它与将行 (列) 矩阵看作行 (列) 向量的加法和数乘是相同的. 于是可将行 (列) 矩阵和对应的行 (列) 向量视为同一对象.

有时为了研究矩阵和其部分元素形成的矩阵的联系, 需要将其进行拆分. 用若干条横线和竖线将矩阵 A 分成许多小矩阵, 用各个小矩阵来表示 A 自身, 这种表示方法叫做分块矩阵. 例如

$$A = \begin{pmatrix} O_{m \times n} & E_m \\ E_n & O_{n \times m} \end{pmatrix}$$

就是一个分块矩阵.

例如矩阵

$$A = (\alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

其中 α_j 为 A 的第 j 列. 所以 $m \times n$ 矩阵可以看成 n 个列向量排成一行, 或者 m 个行向量排成一列.

第二节 行列式的定义

- 有向面积与二阶行列式
- n 阶行列式

设 $A = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ 是一个二阶方阵, 其中 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 是两个二维向量. 那么

$$\{\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 : \lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]\}$$

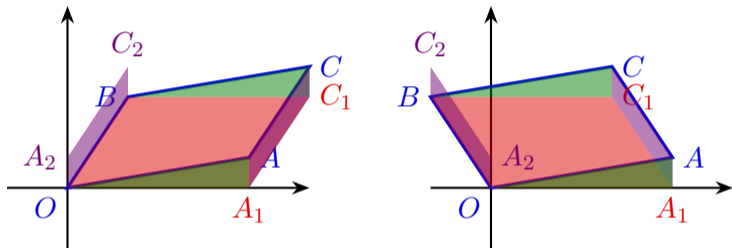
形成一个平行四边形 (可能退化).

类似地, n 阶方阵 $A = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ 的各列可类似形成一个平行多面体 (可能退化)

$$\{\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]\}.$$

我们从 $n = 2$ 情形出发, 来研究如何计算它的体积.

设平面上有 $\square OACB$, 其中 A, B 坐标分别为 $u = (a, c)^T, v = (b, d)^T$. 如果将 u 拆分为 $(a, 0)^T + (0, c)^T$, 那么得到的三个平行四边形的面积有什么联系呢?



令 $A_1(a, 0)$, 并作 $\square OA_1C_1B$; 令 $A_2(0, c)$, 并作 $\square OA_2C_2B$. 那么 $\square OACB$ 的面积是这两个相加还是相减? 使用割补法可知为**二者相减**.

如果 A 在第一象限, B 在第二象限. 那么 $\square OACB$ 的面积是这两个相加还是相减? 使用割补法可知为**二者相加**.

为何第一种情形是相减而第二种情形是相加呢？观察发现：这些平行四边形中只有第一种情形的 $\square OA_2C_2B$ ，从 OA_2 到 OB 是顺时针方向。如果定义有向面积并记为

$$|\mathbf{u}, \mathbf{v}| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{cases} S_{\square OACB}, & \text{从 } OA \text{ 到 } OB \text{ 是逆时针;} \\ -S_{\square OACB}, & \text{从 } OA \text{ 到 } OB \text{ 是顺时针.} \end{cases}$$

那么

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

一般地，

$$|\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{v}| = |\mathbf{u}_1, \mathbf{v}| + |\mathbf{u}_2, \mathbf{v}|. \quad (\text{关于第一列线性})$$

如果将 \mathbf{u} 换成 $k\mathbf{u}$ ，那么面积变为 $|k|$ 倍，有向面积变为 k 倍。因此

$$|k\mathbf{u}, \mathbf{v}| = \begin{vmatrix} ka & b \\ kc & d \end{vmatrix} = k|\mathbf{u}, \mathbf{v}| = k \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}. \quad (\text{关于第一列线性})$$

对于 v 也有类似的性质:

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2| &= |\mathbf{u}, \mathbf{v}_1| + |\mathbf{u}, \mathbf{v}_2|, \\ |\mathbf{u}, k\mathbf{v}| &= k|\mathbf{u}, \mathbf{v}|. \end{aligned} \quad (\text{关于第二列线性})$$

$\mathbf{u} = (1, 0)^T, \mathbf{v} = (0, 1)^T$ 形成的平行四边形就是单位正方形, 有向面积为 1. 因此

$$|\mathbf{E}_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1. \quad (\text{规范化})$$

如果交换 \mathbf{u}, \mathbf{v} , 那么面积不变但是有向面积变为 -1 倍. 因此

$$|\mathbf{v}, \mathbf{u}| = \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = -|\mathbf{u}, \mathbf{v}| = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}. \quad (\text{反对称})$$

将上述概念推广到 n 维情形. 设

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)^T, \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0)^T, \quad \dots, \quad \mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1)^T.$$

那么 n 维情形的有向面积, 也就是 n 阶行列式应当满足:

- (1) $|\mathbf{E}_n| = |\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n| = 1$;
- (2) 反对称性质: $|\dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_j, \dots| = -|\dots, \mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_i, \dots|$;
- (3) 线性性质: $|\mathbf{v}_1, \dots, k\mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_n| = k|\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_n|$;
- (4) 线性性质: $|\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}'_i, \dots| = |\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_n| + |\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}'_i, \dots, \mathbf{v}_n|$.

和二阶情形类似, n 阶方阵 $A = (a_{ij})$ 的行列式可以展开成 n^n 项

$$\sum_{k_1, k_2, \dots, k_n=1}^n |\mathbf{e}_{k_1}, \dots, \mathbf{e}_{k_n}| a_{k_1 1} a_{k_2 2} \cdots a_{k_n n}.$$

由于有两列相同时, 行列式一定是零. 因此这个展开式只剩下 k_1, k_2, \dots, k_n 是 $1, 2, \dots, n$ 的排列时的那些项.

设 k_1, k_2, \dots, k_n 是 $1, 2, \dots, n$ 的排列. 如果排列 k_1, k_2, \dots, k_n 需要奇数次对换变成 $1, 2, \dots, n$, 记 $\operatorname{sgn}(k_1, \dots, k_n) = -1$; 否则 $\operatorname{sgn}(k_1, \dots, k_n) = +1$. 根据反对称性,

$$|e_{k_1}, \dots, e_{k_n}| = \operatorname{sgn}(k_1, \dots, k_n) |e_1, \dots, e_n| = \operatorname{sgn}(k_1, \dots, k_n).$$

定义. 设 $A = (a_{ij})$ 是 n 阶方阵. 定义 A 的**行列式**为

$$|A| = \sum \operatorname{sgn}(k_1, \dots, k_n) a_{k_1 1} a_{k_2 2} \cdots a_{k_n n},$$

其中 k_1, k_2, \dots, k_n 取遍 $1, 2, \dots, n$ 的全体排列.

2, 3 阶行列式

当 $n = 2$ 时, $\text{sgn}(12) = 1, \text{sgn}(21) = -1$, 于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

当 $n = 3$ 时,

$$\begin{aligned} \text{sgn}(123) &= \text{sgn}(231) = \text{sgn}(312) = 1, \\ \text{sgn}(132) &= \text{sgn}(213) = \text{sgn}(321) = -1, \end{aligned}$$

于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

- (1) 行列式将一个方阵对应到一个数.
- (2) 1 阶行列式就是方阵里面唯一的那个元素, 尽管也记作 $|\cdot|$, 但注意和绝对值区分.
- (3) 2, 3 阶行列式可以用对角线法直接得到展开式, 但是更高阶的没有这种表示方法.
- (4) 对角阵的行列式

$$|\operatorname{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)| = a_1 a_2 \cdots a_n,$$

分块对角阵的行列式

$$|\operatorname{diag}(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m)| = |\mathbf{A}_1| \cdots |\mathbf{A}_m|.$$

特别地 $|\mathbf{E}_n| = 1, |\mathbf{O}_n| = 0$.

- (5) $|\mathbf{A}|$ 是由一些 $\pm a_{k_1 1} a_{k_2 2} \cdots a_{k_n n}$ 相加得到, 其中 k_1, k_2, \dots, k_n 取遍 $1, 2, \dots, n$ 的所有排列, 一共有 $n!$ 个这样的项, 其中一半取 $+$, 一半取 $-$ ($n \geq 2$).
- (6) 可以把 $|v_1, v_2, \dots, v_n|$ 看成 v_1, \dots, v_n 的某种乘法, 满足分配率, 但是不满足交换律.

第三节 行列式的性质

- 行列式的性质
- 拉普拉斯展开
- 行列式的计算举例
- 三对角和范德蒙型行列式

定理. 转置不改变行列式: $|A^T| = |A|$.

注意到

$$|A| = \sum \text{sgn}(k_1, \dots, k_n) a_{k_1 1} \cdots a_{k_n n} = \sum a_{k_1 1} \cdots a_{k_n n} |P|,$$

其中 P 是 $a_{k_1 1}, \dots, a_{k_n n}$ 这些位置为 1, 其余为 0 的矩阵. 类似地,

$$|A^T| = \sum a_{k_1 1} \cdots a_{k_n 1} |Q|,$$

其中 Q 是 $a_{1 k_1}, \dots, a_{n k_n}$ 这些位置为 1, 其余为 0 的矩阵. 所以我们只需证明 $|P| = |P^T|$.

注意到交换 P 的两行等同于交换了它的两列. 所以将 P 变成 E 所需的交换列的次数, 和将 P^T 变成 E 所需的交换列的次数奇偶性相同, 即 $|P| = |P^T|$.

定理 (行列式的性质).

- (1) 互换两行 (列) 后, 方阵的行列式变为 -1 倍.
- (2) 方阵的某一行 (列) 乘 k 后, 方阵的行列式变为 k 倍.
- (3) 将方阵某一行 (列) 对应向量写成两个向量之和, 则行列式也可对应拆成两个行列式之和.

推论.

- (1) 具有相同的两行 (列) 的方阵的行列式为零: $|\cdots, \boldsymbol{v}, \cdots, \boldsymbol{v}, \cdots| = 0$.
- (2) 若方阵有一行 (列) 全为零, 则行列式为零: $|\cdots, \mathbf{0}, \cdots| = 0$.
- (3) 若方阵有两行 (列) 成比例, 则行列式为零: $|\cdots, \boldsymbol{v}, \cdots, k\boldsymbol{v}, \cdots| = 0$.
- (4) 行列式中某一行 (列) 的公因子可以提到行列式外面.

练习.

(1) 判断题:
$$\begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} & & & 1 \\ & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & & 4 \end{vmatrix} .$$
 × 交换 1,4 列, 交换 2,3 列

(2) 计算
$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & b_1 + c_1 & c_1 + d_1 & d_1 + a_1 \\ a_2 + b_2 & b_2 + c_2 & c_2 + d_2 & d_2 + a_2 \\ a_3 + b_3 & b_3 + c_3 & c_3 + d_3 & d_3 + a_3 \\ a_4 + b_4 & b_4 + c_4 & c_4 + d_4 & d_4 + a_4 \end{vmatrix} = \underline{0}.$$

我们来介绍行列式与方阵子式的联系.

定义. 设 $A = (a_{ij})$ 是 $n \geq 2$ 阶方阵.

- (1) A 去掉第 i 行和 j 列得到的 $n-1$ 阶方阵的行列式称为 A 在 (i, j) 处的**余子式 (Minor)**, 记为 M_{ij} .
- (2) 称 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ 为 A 在 (i, j) 处的**代数余子式 (Algebraic Minor)**.

注意余子式和代数余子式是数而不是矩阵.

假设 A 的第 n 列除了 a_{nn} 都是零. 若 $k_n \neq n$, 则 $a_{k_1 1} \cdots a_{k_n n} = 0$; 若 $k_n = n$, 则 $\operatorname{sgn}(k_1, \dots, k_{n-1}, n) = \operatorname{sgn}(k_1, \dots, k_{n-1})$. 因此

$$|A| = \sum \operatorname{sgn}(k_1, \dots, k_{n-1}, n) a_{k_1 1} \cdots a_{k_{n-1}, n-1} a_{n, n} = a_{nn} M_{nn} = a_{nn} A_{nn}.$$

假设 A 的第 j 列除了 a_{ij} 都是零. 依次对 A 实施

$$r_i \leftrightarrow r_{i+1}, \quad r_{i+1} \leftrightarrow r_{i+2}, \quad \dots, \quad r_{n-1} \leftrightarrow r_n,$$

得到的方阵 B 就是将 A 的第 i 行移动到第 n 行的后面得到的方阵. 由于一共 $n - i$ 次列互换, 因此 $|B| = (-1)^{n-i} |A|$.

同理, 将 B 的第 j 列移动到第 n 列的后面得到的方阵记为 C , 则

$$|C| = (-1)^{n-j} |B| = (-1)^{i+j} |A|.$$

注意到 C 在 (n, n) 处元素是 a_{ij} , 余子式是 M_{ij} , 因此

$$|C| = a_{ij} M_{ij}, \quad |A| = (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = a_{ij} A_{ij}.$$

将 A 的第 j 列写成

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_{2j} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix},$$

根据行列式的线性性质, 我们得到

$$|\mathbf{A}| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}.$$

由于转置不改变方阵的行列式, 于是得到

$$|\mathbf{A}| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}.$$

定理 (行列式沿任一行或列展开). 方阵的行列式等于任一行 (列) 的元素与其对应的代数余子式乘积的和:

$$\begin{aligned} |A| &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \\ &= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}. \end{aligned}$$

由此也可以看出 $i \neq k$ 时,

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0,$$

因为它是第 i, k 行相同的方阵的行列式.

例: 反对角阵的行列式

例. 计算 $|\mathbf{A}|$, 其中 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} & & & a_1 \\ & & & & \\ & & & a_2 & \\ & \ddots & & & \\ a_n & & & & \end{pmatrix}$.

解.

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= (-1)^{n+1} a_1 \begin{vmatrix} & & & a_2 \\ & & & & \\ & & & & \\ & \ddots & & & \\ a_n & & & & \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} a_1 \cdot (-1)^n a_2 \begin{vmatrix} & & & a_3 \\ & & & & \\ & & & & \\ & \ddots & & & \\ a_n & & & & \end{vmatrix} \\ &= \cdots = \prod_{i=1}^n (-1)^{n-i} a_i = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n. \end{aligned}$$

例：利用初等变换计算行列式

对于具体的方阵，我们可以利用初等变换将其化为三角阵来计算行列式。也可以在某一行或一列只有少数非零元时用拉普拉斯展开来降阶。

例.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ -4 & -5 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & -5 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} r_2 + 4r_4 \\ r_3 + 3r_4 \\ r_1 - 2r_4 \end{array} \begin{vmatrix} 0 & 7 & 1 & 1 \\ 0 & -13 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ -13 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{l} r_2 + r_1 \\ r_3 + r_1 \end{array} \begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} = -40.$$

初等变换只能一个一个地实施，不能同时实施诸如 $r_1 \leftrightarrow r_2, r_2 \leftrightarrow r_3$ 这种操作。

练习.

$$(1) \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 501 & 200 & 299 \\ 500 & 200 & 300 \end{vmatrix} = \underline{-200}.$$

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = \underline{0}.$$

例：分块矩阵行列式

例. 设

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & & & \\ * & \cdots & * & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

证明 $|\mathbf{C}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$.

例：分块矩阵行列式

证明. 对 m 归纳. 当 $m = 1$ 时将 $|C|$ 沿第一行展开可知成立.

假设命题对于 $m - 1$ 成立. 设 A 在 $(1, j)$ 处的余子式为 M_{1j} , C 在 $(1, j)$ 处的余子式为 N_{1j} . 则由归纳假设 $N_{1j} = M_{1j}|B|$. 因此

$$\begin{aligned} |C| &= \sum_{j=1}^m (-1)^{1+j} a_{1j} N_{1j} \\ &= \sum_{j=1}^m (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j} |B| = |A| \cdot |B|. \end{aligned}$$

□

例: 拉普拉斯展开的应用

例. 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. 计算 $A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44}$ 和 $M_{41} + M_{42} + M_{43} + M_{44}$.

解. 由拉普拉斯展开可知

$$A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

若方阵的每行 (列) 之和为常数, 可用此法化简.

练习. 计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} = \frac{1+a_1+\cdots+a_n}{n}.$$

例：降阶法

例. 计算矩阵 $\mathbf{A}_n = \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x + a_1 \end{pmatrix}$ 的行列式.

解. 沿着第一列展开得到

$$|\mathbf{A}_n| = x|\mathbf{A}_{n-1}| + (-1)^{1+n}a_n(-1)^{n-1} = x|\mathbf{A}_{n-1}| + a_n,$$

递推或归纳可知

$$|\mathbf{A}_n| = x(x|\mathbf{A}_{n-2}| + a_{n-1}) + a_n = \cdots = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n.$$

若主对角线元素均为 a ，上下副对角线元素均为 b 和 c ，则

$$|\mathbf{A}_n| - a|\mathbf{A}_{n-1}| + bc|\mathbf{A}_{n-2}| = 0.$$

设 $\lambda^2 - a\lambda + bc = 0$ 的两个根为 λ_1, λ_2 ，则归纳可知

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}_n| &= \lambda_1^n + \lambda_1^{n-1}\lambda_2 + \cdots + \lambda_1\lambda_2^{n-1} + \lambda_2^n \\ &= \begin{cases} \frac{\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}}{\lambda_1 - \lambda_2}, & \text{若 } \lambda_1 \neq \lambda_2; \\ (n+1)\left(\frac{a}{2}\right)^n, & \text{若 } \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{a}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

例: 范德蒙行列式

范德蒙行列式. 设 $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$. 证明 $|A_n| = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$.

证明. 归纳证明. 当 $n = 1, 2$ 时显然成立. 设 $n \geq 3$, 由 $r_n - x_1 r_{n-1}, \dots, r_2 - x_1 r_1$ 得到

$$|A_n| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}.$$

例: 范德蒙行列式

续证. 沿着第一列展开, 然后提取每一列的公因式 $(x_j - x_1)$ 得到

$$|\mathbf{A}_n| = \prod_{j=2}^n (x_j - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

由归纳假设可知

$$|\mathbf{A}_n| = \prod_{j=2}^n (x_j - x_1) \cdot \prod_{2 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$



范德蒙行列式还有另一种证明方式, 这种思路对于其它行列式的计算也有帮助.

证明. $f = |A_n|$ 是 x_1, \dots, x_n 的多项式, 且次数不超过 $1 + 2 + \dots + (n - 1)$. 由于当 $x_i = x_j$ 时 $f = 0$, 因此 f 包含因式 $x_i - x_j$, 从而

$$f = g \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

比较两边次数可知 g 是常数. 注意到 $\prod_{i=1}^n x_i^{i-1}$ 只出现在范德蒙行列式对角元的乘积中, 且它在 $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$ 中的系数是 1. 因此 $g = 1$. □

例. 计算

$$\begin{vmatrix} 1^{50} & 2^{50} & \cdots & 100^{50} \\ 2^{50} & 3^{50} & \cdots & 101^{50} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 100^{50} & 101^{50} & \cdots & 199^{50} \end{vmatrix}.$$

证明. 将第一行换成 $(x+1)^{50}, \dots, (x+100)^{50}$, 并将行列式记为 $f(x)$. 那么 $f(1) = \cdots = f(99) = 0$. 注意到 f 的次数不超过 50, 因此 $f \equiv 0$. □

同理若 $k < n - 1$, $\left| ((a_i + b_j)^k)_{1 \leq i, j \leq n} \right| = 0$.

第四节 克拉默法则

- 矩阵、线性映射和线性方程组
- 克拉默法则

对于矩阵 $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}$ 和 n 维列向量 $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$, 我们定义

$$\boldsymbol{Ax} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

这样我们得到一个映射

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ \boldsymbol{x} &\longmapsto \boldsymbol{Ax} \end{aligned}$$

不难验证, 对任意 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{Au} + \boldsymbol{Av}, \quad \boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{u}) = \lambda(\boldsymbol{Au}).$$

对于线性方程组

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n = b_m, \end{cases}$$

它等价于矩阵方程 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, 其中

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

若线性方程组的常数都是零, 即

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

或 $Ax = 0$, 称之为**齐次线性方程组**. 否则称之为**非齐次线性方程组**.

齐次线性方程组解的特点

对于齐次线性方程组 $Ax = 0$, 令 $V = \{x \mid Ax = 0\}$ 表示该方程的所有解形成的集合. 显然 $0 \in V$. 若 $u, v \in V$, 则 $Au = Av = 0$. 于是

$$A(u + v) = A(\lambda v) = 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

换言之, 从而 V 构成一个向量空间.

显然**零解** $x = 0$ 是 $Ax = 0$ 的解, 其它解被称为**非零解**. 由于非零解的倍数还是它的解, 因此 $Ax = 0$ 有非零解 $\iff Ax = 0$ 有无穷多 (非零) 解.

当 A 是方阵时, 我们有 (以后证明):

定理. 设 A 是 n 阶方阵.

- (1) 若 $|A| \neq 0$, 则 $Ax = 0$ 只有零解;
- (2) 若 $|A| = 0$, 则 $Ax = 0$ 有 (无穷多) 非零解.

非齐次线性方程组解的特点

对于一般情形, 若 ξ 是 $Ax = b$ 的一个解, 则 $A(x - \xi) = 0$, 从而它所有的解就是 $x = \xi + v, v \in V$. 因此

- $Ax = 0$ 只有零解 $\iff Ax = b$ 无解或有唯一解;
- $Ax = 0$ 有非零解 $\iff Ax = b$ 无解或有无穷多解.

当 A 是方阵时, 我们有:

定理. 设 A 是 n 阶方阵.

- (1) 若 $|A| \neq 0$, 则 $Ax = b$ 有唯一解;
- (2) 若 $|A| = 0$, 则 $Ax = b$ 无解或有无穷多解.

我们来计算 $|A| \neq 0$ 时, $Ax = b$ 解的形式.

克拉默法则. 设 A 是 n 阶方阵, $b = (b_1, \dots, b_n)^T$ 是 n 维列向量, 将 A 的第 j 列换成 b 得到的方阵记为 A_j . 当 $|A| \neq 0$, 线性方程组 $Ax = b$ 有唯一解

$$x = \left(\frac{|A_1|}{|A|}, \frac{|A_2|}{|A|}, \dots, \frac{|A_n|}{|A|} \right).$$

设 $a = (|A_1|, |A_2|, \dots, |A_n|)$. 由于方阵 A_j 沿着第 j 列展开得到

$$|A_j| = b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \dots + b_n A_{nj} = (A_{1j}, A_{2j}, \dots, A_{nj})b,$$

因此

$$Aa \text{ 的第 } i \text{ 个分量} = \sum_{j=1}^n a_{ij} |A_j| = \sum_{j=1}^n a_{ij} \sum_{k=1}^n b_k A_{kj} = \sum_{k=1}^n b_k \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj} = b_i |A|.$$

例：克拉默法则的应用

例. 已知
$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = -2 \end{cases}$$
 有无穷多解, 求 λ .

解.

$$0 = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + 2 - 3\lambda = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2).$$

因此 $\lambda = 1$ 或 -2 . 显然 $\lambda = 1$ 时无解. $\lambda = -2$ 时, $(t, t, t + 1)$ 是方程的解. 因此 $\lambda = -2$.

例：克拉默法则的应用

练习. 若
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + (\lambda + 1)x_3 = 0 \end{cases}$$
 有非零解, 则 $\lambda = \underline{0, 1}$.

例. 证明: 若三条不同的直线

$$ax + by + c = 0$$

$$bx + cy + a = 0$$

$$cx + ay + b = 0$$

相交于一点, 则 $a + b + c = 0$.

例：克拉默法则的应用

证明. 线性方程组 $\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \\ bx_1 + cx_2 + ax_3 = 0 \\ cx_1 + ax_2 + bx_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解 $(x, y, 1)$. 因此 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = 0$.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} &= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \\ &= (a+b+c)(bc+ac+ab-a^2-b^2-c^2) \\ &= -\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]. \end{aligned}$$

由于这是三条不同直线, 因此 a, b, c 不可能全部相等, 从而 $a+b+c=0$. □

想一想: 为什么 $a+b+c=0$ 时, 三条直线一定相交于一点?

使用克拉默法则解线性方程组需要:

- (1) 方程组的数量和未知数数量相同;
- (2) 系数矩阵行列式非零.

但由于使用克拉默法则计算量较大, 一般不使用该方法解方程, 通常仅用于理论研究.

练习. 何时下述线性方程组有非零解? $b = 0$ 或 $-a_1 - \cdots - a_n$.

$$\begin{cases} (a_1 + b)x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0 \\ a_1x_1 + (a_2 + b)x_2 + \cdots + a_nx_n = 0 \\ \vdots \\ a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + (a_n + b)x_n = 0 \end{cases}$$

例. 设 a_1, \dots, a_n 两两不同. 解方程组

$$\begin{cases} x_1 + a_1 x_2 + \cdots + a_1^{n-1} x_n = 1 \\ x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_2^{n-1} x_n = 1 \\ \vdots \\ x_1 + a_n x_2 + \cdots + a_n^{n-1} x_n = 1 \end{cases}$$

解. 由于系数矩阵行列式为范德蒙行列式

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \neq 0,$$

因此方程有唯一解 $x_1 = 1, x_2 = \cdots = x_n = 0$.

第二章 矩阵

- ① 矩阵的运算
- ② 逆矩阵
- ③ 矩阵的初等变换

第一节 矩阵的运算

- 矩阵的加法和数乘
- 矩阵与线性映射的关系
- 矩阵的乘法
- 矩阵的幂
- 矩阵的转置

给定同型矩阵(行列数都相同的矩阵) $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$. 定义 A 和 B 的和

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}.$$

只有同型矩阵才能相加. 自然地, 矩阵的减法为

$$A - B = (a_{ij} - b_{ij})_{m \times n}.$$

给定矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 和 $\lambda \in \mathbb{R}$. 矩阵数乘 λA 定义为

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{m \times n}.$$

和向量类似, 矩阵的加法和数乘满足如下性质:

- (1) $A + B = B + A$;
- (2) $(A + B) + C = A + (B + C)$;
- (3) $A + O = A$;
- (4) 对于任意矩阵 A , 存在矩阵 $B = (-1)A$ 使得 $A + B = O$. 称 B 为 A 的负矩阵, 记作 $-A$.
- (5) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A) = \mu(\lambda A)$;
- (6) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$;
- (7) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;
- (8) $1A = A, 0A = O, \lambda O = O$.



一张图片由一些像素构成，上图包含 341×512 个像素。在 $\overset{\text{红绿蓝}}{\text{RGB}}$ 颜色模式下，每个像素包含红绿蓝三个通道，每个通道为一个 $0 \sim 255$ 之间的整数，数值越高对应颜色越亮。例如

- $R = 0, G = 0, B = 0$ 表示纯黑色;
- $R = 255, G = 255, B = 255$ 表示纯白色;
- $R = 255, G = 0, B = 255$ 表示纯紫色。

若三个通道相同，图片就是一张灰色的图。此时图片对应一个 341×512 的矩阵 A 。

如何让图像反色?



$$\begin{pmatrix} 255 & \cdots & 255 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 255 & \cdots & 255 \end{pmatrix} - A.$$

定义. 若映射 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 满足

$$f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}), \quad f(\lambda \mathbf{u}) = \lambda(f(\mathbf{u})).$$

称 f 是一个**线性映射**或**线性变换**.

根据之前的分析, $f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ 是一个线性映射. 反过来, 是不是所有的线性映射 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 都可以表达为前述形式 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ 呢?

以线性映射 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ 为例, 记

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

那么

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3.$$

记

$$f(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{pmatrix}, \quad f(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{42} \end{pmatrix}, \quad f(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ a_{43} \end{pmatrix}.$$

线性变换的复合

给定矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{n \times p}$. **矩阵乘法** C 定义为满足如下等式的矩阵:

$$Cx = A(Bx).$$

也就是映射 $y \mapsto Ay$ 和 $x \mapsto Bx$ 的复合映射所对应的向量.

C 的第 j 列是

$$Ce_j = A(Be_j) = A\beta_j,$$

其中 $B = (\beta_1, \dots, \beta_p)$. 设 $C = (c_{ij})_{m \times p}$, 那么

$$c_{ij} = A\beta_j \text{ 的第 } i \text{ 个分量} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj},$$

即 $A(\beta_1, \dots, \beta_p) = (A\beta_1, \dots, A\beta_p)$.

当 $B = x$ 是列向量时, Ax 就是它们作为矩阵的乘积.

由于 $(AB)C$ 和 $A(BC)$ 对应的映射都是 A, B, C 对应线性映射的复合, 因此 $(AB)C = A(BC)$.

矩阵乘法满足如下性质:

- (1) $(AB)C = A(BC)$;
- (2) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$;
- (3) $A(B + C) = AB + AC$;
- (4) 若 $A \in M_{m \times n}$, 则 $E_m A = A E_n = A$.
- (5) 若 $A \in M_{m \times n}$, 则 $O_{p \times m} A = O_{p \times n}$, $A O_{n \times p} = O_{m \times p}$.

行列式的乘性

定理. 设 A, B 是 n 阶方阵, 则 $|AB| = |A| \cdot |B|$.

证明. 设 $f(\mathbf{X}) := |\mathbf{A}\mathbf{X}|$, 即 $f(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = |\mathbf{A}\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{A}\mathbf{v}_n|$. 容易知道 f 也满足反对称性, 且对任意 \mathbf{v}_i 是线性的. 类似于行列式展开可知, 对于 $\mathbf{X} = (a_{ij})$,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{X}) &= \sum f(\mathbf{e}_{k_1}, \dots, \mathbf{e}_{k_n}) a_{k_1 1} a_{k_2 2} \cdots a_{k_n n} \\ &= \sum f(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \operatorname{sgn}(k_1, \dots, k_n) a_{k_1 1} a_{k_2 2} \cdots a_{k_n n} \\ &= f(\mathbf{E})|\mathbf{X}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{X}|, \end{aligned}$$

其中 k_1, k_2, \dots, k_n 取遍 $1, 2, \dots, n$ 的全体排列. 故 $|AB| = f(\mathbf{B}) = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$. □

由此可知, 对于 $V \subset \mathbb{R}^n$, \mathbf{A} 对应的线性映射将其有向体积变为 $|\mathbf{A}|$ 倍.

例: 行列式的乘性

例. 求椭球面 $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x + y)^2 + (2y + z)^2 + (x + z)^2 = R^2\}$ 的体积.

解. 设 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$, 其中

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ 2y + z \\ x + z \end{pmatrix}, \quad \text{即 } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

那么 f 把 V 映射为球体 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, 从而

$$\text{Vol}(V) = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{9}\pi R^3.$$

例: 行列式的乘性

例. 证明:
$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & b_1 + c_1 & c_1 + a_1 \\ a_2 + b_2 & b_2 + c_2 & c_2 + a_2 \\ a_3 + b_3 & b_3 + c_3 & c_3 + a_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

证明.

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & b_1 + c_1 & c_1 + a_1 \\ a_2 + b_2 & b_2 + c_2 & c_2 + a_2 \\ a_3 + b_3 & b_3 + c_3 & c_3 + a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \quad \square$$

例：与给定矩阵可交换

例. 求与矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$ 可交换的所有矩阵.

解. 设 $B = (a_{ij})_{3 \times 3}$ 与 A 可交换, 则

$$AB = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = BA = \begin{pmatrix} 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{21} & a_{22} \\ 0 & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix},$$

$$a_{21} = a_{31} = a_{32} = 0, \quad a_{11} = a_{22} = a_{33}, \quad a_{23} = a_{12},$$

$$\text{即 } B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & a_{11} & a_{12} \\ & & a_{11} \end{pmatrix}.$$

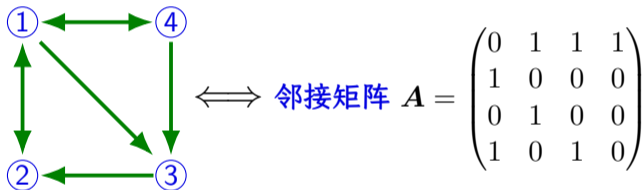
设该线性变换对应的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 则

$$A \begin{pmatrix} 521 & 19 \\ 88 & 311 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 427 & 0 \\ 0 & 270 \end{pmatrix}, \quad \text{即} \quad \begin{cases} 521a + 88b = 427 \\ 19a + 311b = 0 \\ 521c + 88d = 0 \\ 19c + 311d = 270 \end{cases}$$

解得 $A = \begin{pmatrix} 0.828 & -0.051 \\ -0.148 & 0.877 \end{pmatrix}$. 通过应用该变换, 图片被修复成如下效果:



网上订票系统里记录了所有能直飞的航班线路. 对于不能直达的城市, 该怎么确定是否有换乘方案呢? 例如 4 个城市之间的航线如图所示:



邻接矩阵中 $a_{ij} = 1$ 表示从 i 到 j 有直飞航线.

于是 A^2 的 (i, j) 元

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^4 a_{ik}a_{kj}$$

就是从 i 到 j 换乘一次的方案数. 例如从② \implies ③:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

由于 $b_{23} = 1$, 因此可通过② \implies ① \implies ③ 换乘一次到达.

想一想: 如何从③到达④? 考虑 A^3 , 即换乘两次即可.

任一方阵可表为对称阵与反对称阵之和

例. 证明: 任一方阵均可写成一对称阵和一反对称阵之和.

证明.

$$A = \frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2}.$$

□

想一想:

- 若函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称, 则 $f(x)$ 可以表示成一个偶函数和一个奇函数之和.
- 复数 z 可以写成 $z_1 + z_2$, 其中 $\bar{z}_1 = z_1, \bar{z}_2 = -z_2$.

第二节 逆矩阵

- 方阵的伴随矩阵
- 逆矩阵的定义和形式
- 逆矩阵的性质
- 逆矩阵的应用

定义. 设 $A = (a_{ij})$ 为 $n \geq 2$ 阶方阵. 由 A 的代数余子式形成的 n 阶方阵

$$A^* = (A_{ji}) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为 A 的伴随矩阵.

注意, 伴随矩阵的 (i, j) 元是代数余子式 A_{ji} 而不是 A_{ij} .

例. 若 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 则 $\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

伴随矩阵满足如下性质:

(1) $\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\mathbf{E}_n$.

这是因为

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

的 (i, j) 元是 $a_{i1}A_{j1} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} |\mathbf{A}|, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

$$(2) (k\mathbf{A})^* = k^{n-1}\mathbf{A}^*.$$

$$(3) (\mathbf{A}^T)^* = (\mathbf{A}^*)^T.$$

$$(4) |\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|^{n-1}.$$

若 $|\mathbf{A}| \neq 0$, 由 $|\mathbf{A}^*| \cdot |\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^* \mathbf{A}| = |\mathbf{A} \mathbf{E}_n| = |\mathbf{A}|^n$ 可得.

若 $|\mathbf{A}| = 0$, 则

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^* (\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}| (\mathbf{A}^*)^* = \mathbf{O} = |\mathbf{A}^*| \mathbf{A},$$

于是 $|\mathbf{A}^*| = 0$ 或 $\mathbf{A} = \mathbf{O}, \mathbf{A}^* = \mathbf{O}$. 故 $|\mathbf{A}^*| = 0$.

例：伴随矩阵的性质

例. 设非零 $n \geq 3$ 实方阵 A 满足对任意 $i, j, a_{ij} = A_{ij}$. 求 $|A|$.

解. 由题设可知 $A^* = A^T$. 因此 $|A| = |A^*| = |A|^{n-1}$, $|A| = 0, 1$ 或 -1 .
注意 $AA^T = AA^* = |A|E$ 的第 i 个对角元

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}^2 \geq 0.$$

因此 $|A| \geq 0$. 若 $|A| = 0$, 则所有的 $a_{ik} = 0, A = O$, 矛盾! 因此 $|A| = 1$.

事实上, A 是正交阵, 即满足 $A^T A = E$ 的实方阵.

逆矩阵的定义和唯一性

由此得到对应的矩阵的逆的定义:

定义. 设 A 是 n 阶方阵. 若存在 n 阶方阵 B 使得

$$AB = BA = E_n,$$

则称 A 是**可逆矩阵**, B 是 A 的**逆矩阵**.

可逆矩阵的逆矩阵唯一吗? 设 B, B' 都是 A 的逆矩阵, 则

$$AB = E_n, \quad B'A = E_n.$$

于是

$$B = (B'A)B = B'(AB) = B'.$$

因此**若逆矩阵存在必唯一**, 记为 A^{-1} .

若 A 可逆, 从 $AA^{-1} = E$ 可知 $|A| \cdot |A^{-1}| = 1$. 从而 $|A| \neq 0$.

反之, 若 $|A| \neq 0$, 则

$$AA^* = A^*A = |A|E, \quad A \cdot \frac{1}{|A|}A^* = \frac{1}{|A|}A^* \cdot A = E, \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*.$$

逆矩阵的存在性和形式. n 阶方阵 A 可逆当且仅当 $|A| \neq 0$. 此时 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$.

推论. 设 A, B 为 n 阶方阵. 若 $AB = E$ (或 $BA = E$), 则 $B = A^{-1}$.

证明. 若 $AB = E$, 则 $|A| \cdot |B| = 1$, $|A| \neq 0$. 因此 A 可逆.

$$A^{-1} = A^{-1}(AB) = B. \quad \square$$

行列式为零的方阵也叫**退化方阵**.

例. 设 $\lambda_1, \dots, \lambda_n \neq 0$,

$$\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n),$$

则

$$\mathbf{\Lambda}^{-1} = \text{diag}(\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}).$$

通过计算伴随矩阵还可知道, 行列式非零的上(下)三角阵的逆也是上(下)三角的, 且二者对角元对应元素互为逆.

分块对角阵也有类似性质. $\mathbf{A} = \text{diag}(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m)$ 可逆当且仅当 $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m$ 均可逆, 此时

$$\mathbf{A}^{-1} = \text{diag}(\mathbf{A}_1^{-1}, \dots, \mathbf{A}_m^{-1}).$$

例: 分块对角阵

例. 求 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解. 设 $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, 则 $\mathbf{A}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_2^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

故 $\mathbf{A}^{-1} = \text{diag}(\mathbf{A}_1^{-1}, \mathbf{A}_2^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & \\ -1 & 2 & & \\ & & 1/2 & 0 \\ & & 1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$.

逆矩阵的计算方法

逆矩阵通常采用下述方法计算:

- (1) 利用公式 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$, 适用于 2, 3 阶方阵, 或用于抽象分析.
- (2) 寻找方阵 B 使得 $AB = E$, 适用于抽象矩阵求逆.
- (3) 利用矩阵的初等变换求逆矩阵, 该方法我们会在下一节中学习.

例. 设 A 为 n 阶方阵且满足 $A^2 + 3A - 2E = O$. 求 A^{-1} 和 $(A - E)^{-1}$.

解.

(1) 由于 $A^2 + 3A = 2E$, 因此 $A(A + 3E) = 2E$, $A^{-1} = \frac{1}{2}(A + 3E)$.

(2) 由于 $(A - E)(A + 4E) = -2E$, 因此 $(A - E)^{-1} = -\frac{1}{2}(A + 4E)$.

设 $f(x)$ 是一多项式, $f(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$, 我们想求 $(\mathbf{A} - a\mathbf{E})^{-1}$. 由带余除法可以找到多项式 $h(x)$ 和常数 $r = f(a)$, 使得

$$f(x) = (x - a)h(x) + r,$$

因此

$$f(\mathbf{A}) - f(a)\mathbf{E} = (\mathbf{A} - a\mathbf{E})h(\mathbf{A}).$$

从而当 $f(a) \neq 0$ 时, $(\mathbf{A} - a\mathbf{E})^{-1} = -\frac{1}{f(a)}h(\mathbf{A})$. 当 $f(a) = 0$ 时, $\mathbf{A} - a\mathbf{E}$ 未必可逆.

对于和 $f(x)$ 没有公因子的多项式 $g(x)$, 也总可以通过辗转相除找到多项式 $\alpha(x), \beta(x)$ 使得

$$\alpha(x)f(x) + \beta(x)g(x) = 1.$$

从而 $g(\mathbf{A})^{-1} = \beta(\mathbf{A})$.

逆矩阵的性质

逆矩阵满足如下性质:

(1) 设 A 可逆, $\lambda \neq 0$.

- $|A^{-1}| = |A|^{-1}$;
- A^{-1} 可逆, 且 $(A^{-1})^{-1} = A$;
- λA 可逆, 且 $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$;
- A^T 可逆, 且 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$;
- A^* 可逆, 且 $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^* = \frac{1}{|A|} A$.

由于 $AA^* = |A|E$, 因此 $A^* = |A|A^{-1}$. 于是

$$(A^{-1})^* = |A^{-1}|(A^{-1})^{-1} = \frac{1}{|A|} A, \quad (A^*)^{-1} = (|A|A^{-1})^{-1} = \frac{1}{|A|} A.$$

例: 逆矩阵的性质

例. 设 \mathbf{A} 是 n 阶方阵, 若 (**D**), 则 $\mathbf{A} - \mathbf{E}$ 可逆.

- (A) \mathbf{A} 可逆 (B) $|\mathbf{A}| = 0$
 (C) \mathbf{A} 的主对角线元素均为 0 (D) 存在某个正整数 m 使得 $\mathbf{A}^m = \mathbf{O}$

练习.

(1) 设 3 阶方阵 \mathbf{A} 满足 $\mathbf{A}^3 - 2\mathbf{A} + \mathbf{E} = \mathbf{O}$, 且 $|\mathbf{A}| = 2$, 则 $|(\mathbf{A}^2 - 2\mathbf{E})^{-1}| = \underline{-2}$.

(2) 设 n 阶方阵 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ 满足 $\mathbf{ABC} = \mathbf{E}$, 则 (**D**).

- (A) $\mathbf{ACB} = \mathbf{E}$ (B) $\mathbf{CBA} = \mathbf{E}$ (C) $\mathbf{BAC} = \mathbf{E}$ (D) $\mathbf{CAB} = \mathbf{E}$

想一想 $\mathbf{B}^{-1} = ?$

例: 逆矩阵计算方阵的幂

例. 设 $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 2 \end{pmatrix}$, 求 $(P\Lambda P^{-1})^n$.

解. $|P| = 2$, $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned} (P\Lambda P^{-1})^n &= P\Lambda P^{-1} \cdot P\Lambda P^{-1} \cdots P\Lambda P^{-1} = P\Lambda^n P^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 2^n - 1 \\ 2 - 2^{n+1} & 2^{n+1} - 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

例: 矩阵乘积的伴随

例. 证明 $(AB)^* = B^*A^*$.

证明. 若 A, B 均可逆, 则

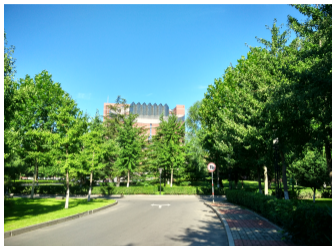
$$(AB)^* = |AB|(AB)^{-1} = |A| \cdot |B|B^{-1}A^{-1} = B^*A^*.$$

一般情形下, 考虑等式

$$((xE + A)(xE + B))^* = (xE + B)^*(xE + A)^*$$

的 (i, j) 元. 注意到 $|xE + A|$ 展开式包含 x^n 项, 它是 x 的多项式. 所以除了有限多个 x 以外, 可以保证 $xE + A, xE + B$ 均可逆, 从而上式成立. 而这个式子左侧的每个元素都是一个多项式, 因此这些多项式恒为零. 故 $(AB)^* = B^*A^*$. \square

伴随、逆、转置相互可交换, 且均满足此种性质.



左图是一张夏天的风景图, 我们希望把它修改成秋天的景色. Photoshop 提供了将颜色重新搭配的通道混合器. 用取色工具选取树叶、蓝天、地面的颜色, 分别得到 RGB 值为

$$(59, 181, 19), \quad (90, 185, 249), \quad (210, 205, 186).$$

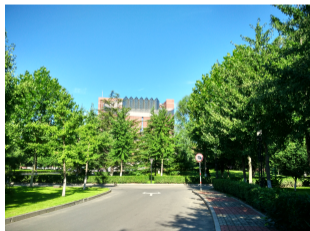
我们希望将树叶变成金黄色 RGB(234, 228, 70) 而保持蓝天和地面的颜色不变. 则我们需要的矩阵 A 满足

$$A \begin{pmatrix} 59 & 90 & 210 \\ 181 & 185 & 205 \\ 19 & 249 & 186 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 234 & 90 & 210 \\ 228 & 185 & 205 \\ 70 & 249 & 186 \end{pmatrix}.$$

解得

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 234 & 90 & 210 \\ 228 & 185 & 205 \\ 70 & 249 & 186 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 59 & 90 & 210 \\ 181 & 185 & 205 \\ 19 & 249 & 186 \end{pmatrix}^{-1} \approx \begin{pmatrix} 0.43 & 1.23 & -0.70 \\ -0.15 & 1.33 & -0.19 \\ -0.17 & 0.36 & 0.79 \end{pmatrix}.$$

分别在通道混合器的红绿蓝通道输入上面三行即可.



第三节 矩阵的初等变换

- 初等矩阵
- 矩阵等价
- 初等变换解矩阵方程

(3) $r_i + kr_j, c_j + kc_i$ 都对应初等矩阵

$$E(i, j(k)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & & k & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

↑ ↑
第 i 列 第 j 列

← 第 i 行
← 第 j 行

需要注意的是 $c_i + kc_j$ 对应的初等矩阵不是 $E(i, j(k))$ 而是 $E(j, i(k))$.

因此初等矩阵左乘矩阵 A 等同于对 A 实施对应的初等行变换.

同理, 初等矩阵右乘矩阵 A 等同于对 A 实施对应的初等列变换.

定理. 设 $A \in M_{m \times n}$.

- (1) 对 A 实施一次**初等行变换**, 相当于在 A 的**左边**乘对应的 m 阶初等矩阵.
 - (2) 对 A 实施一次**初等列变换**, 相当于在 A 的**右边**乘对应的 n 阶初等矩阵.
- 对应的初等矩阵就是对单位阵 E 实施相应的初等变换得到的矩阵.

即**左行右列**.

例：初等矩阵与初等变换

例. 设 A 为 3 阶可逆方阵, 将 A 的第 1 列与第 2 列交换得 B , 再把 B 的第 2 列加到第 3 列得到 C . 求 $Q = A^{-1}C$.

解. $B = A \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = B \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A Q$. 因此

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

练习. 设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} + 2a_{11} & a_{33} + 2a_{13} & a_{32} + 2a_{12} \end{pmatrix}$,

$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 则 $B =$ (C).

(A) P_3AP_2

(B) P_2AP_3

(C) P_3AP_1

(D) P_1P_2A

例: 初等矩阵的逆

由于初等变换都是可逆, 因此初等矩阵也都是可逆的:

$$(1) \mathbf{E}(i, j)\mathbf{E}(i, j) = \mathbf{E} \implies \mathbf{E}(i, j)^{-1} = \mathbf{E}(i, j);$$

$$(2) \mathbf{E}(i(k))\mathbf{E}(i(\frac{1}{k})) = \mathbf{E} \implies \mathbf{E}(i(k))^{-1} = \mathbf{E}(i(\frac{1}{k}));$$

$$(3) \mathbf{E}(i, j(k))\mathbf{E}(i, j(-k)) = \mathbf{E} \implies \mathbf{E}(i, j(k))^{-1} = \mathbf{E}(i, j(-k)).$$

例. 将可逆方阵 \mathbf{A} 的第 1 行的 2 倍加到第 2 行得到 \mathbf{B} , 则对 \mathbf{A}^{-1} 实施初等变换(D)可得到 \mathbf{B}^{-1} .

(A) $r_2 + 2r_1$

(B) $r_2 - 2r_1$

(C) $c_1 + 2c_2$

(D) $c_1 - 2c_2$

练习. 设 \mathbf{A} 是 n 阶可逆矩阵, 将 \mathbf{A} 的第 i 行与第 j 行对换后得到的矩阵记为 \mathbf{B} , 则 $\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1} = \underline{\mathbf{E}(i, j)}$.

例: 初等矩阵

例. 设 $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & k & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$, $k \neq 0$, 求 $P_1 P_2 P_3$ 及逆.

解.

$$P_1 \xrightarrow{c_1 + ac_4} P_1 P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{k c_2} P_1 P_2 P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P_1^{-1} = P_1 \xrightarrow{r_4 - ar_1} (P_1 P_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{k} r_2} (P_1 P_2 P_3)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 1 \end{pmatrix}.$$

练习. 设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41} \end{pmatrix},$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

若 A 可逆, 则 $B^{-1} = (\quad)$.

(A) $A^{-1}P_1P_2$

(B) $P_1A^{-1}P_2$

(C) $P_1P_2A^{-1}$

(D) $P_2A^{-1}P_1$

练习. 设 A 是 3 阶方阵, 存在可逆阵 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 使得 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$. 若 $Q = (\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2)$, 则 $Q^{-1}AQ = \underline{\text{diag}(1, 3, 2)}$.

定义.

- (1) 若 A 经过有限次初等行变换变为 B , 则称 A 和 B **行等价**, 记作 $A \sim^r B$.
- (2) 若 A 经过有限次初等列变换变为 B , 则称 A 和 B **列等价**, 记作 $A \sim^c B$.
- (3) 若 A 经过有限次初等行变换和初等列变换变为 B , 则称 A 和 B **等价**, 记作 $A \sim B$.

由于可逆方阵可以写成有限个初等矩阵的乘积, 因此:

定理.

- (1) $A \sim^r B$ 当且仅当存在可逆矩阵 P 使得 $B = PA$.
- (2) $A \sim^c B$ 当且仅当存在可逆矩阵 Q 使得 $B = AQ$.
- (3) $A \sim B$ 当且仅当存在可逆矩阵 P, Q 使得 $B = PAQ$.

由此可知

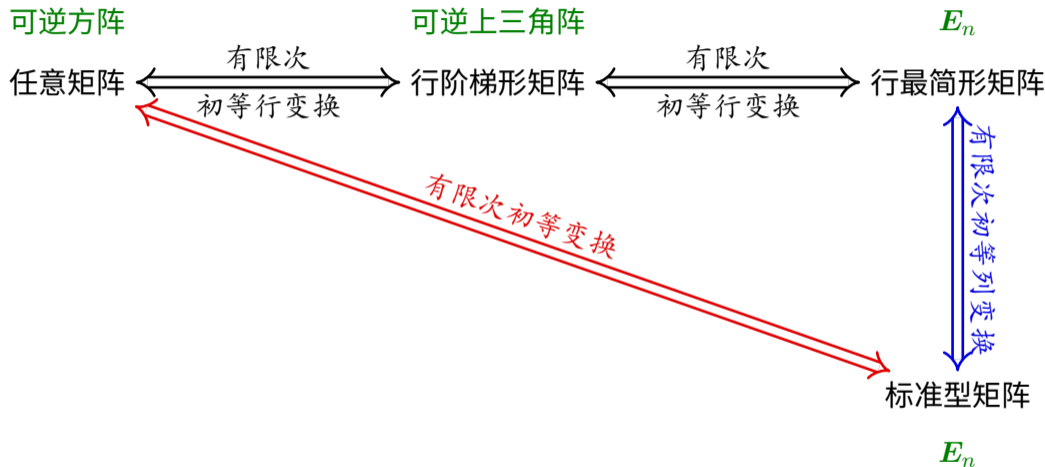
命题. 矩阵的行等价、列等价、等价均满足

(1) 自反性: $A \sim A$;

(2) 对称性: $A \sim B \implies B \sim A$;

(3) 传递性: $A \sim B, B \sim C \implies A \sim C$.

矩阵的变换关系



例：初等变换

例. 将矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ 表示成有限个初等阵的乘积.

解.

$$A \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-r_2 \\ -r_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

因此 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} A = E,$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

初等变换解矩阵方程

若 A 可逆, 则 $AX = B \iff X = A^{-1}B$. 若 $(A, B) \overset{r}{\sim} (E, X)$, 则存在可逆矩阵 P 使得 $P(A, B) = (E, X)$. 即 $P = A^{-1}, X = A^{-1}B$. 所以

$$AX = B \iff X = A^{-1}B \iff (A, B) \overset{r}{\sim} (E, X).$$

同理

$$XA = C \iff X = CA^{-1} \iff \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \overset{c}{\sim} \begin{pmatrix} E \\ X \end{pmatrix}.$$

所以我们可使用初等变换解该类型矩阵方程.

特别地, $(A, E) \overset{r}{\sim} (E, A^{-1})$ 可计算矩阵的逆, $(A, b) \overset{r}{\sim} (E, A^{-1}b)$ 可解方程 $Ax = b$.

例. 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ 的逆.

例: 初等变换解矩阵方程

例. 若 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{A} + \mathbf{X}$, 求 \mathbf{X} .

解. 由题设知 $(\mathbf{A} - \mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{A}$, $\mathbf{X} = (\mathbf{A} - \mathbf{E})^{-1}\mathbf{A}$.

$$(\mathbf{A} - \mathbf{E}, \mathbf{A}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} r_2 - 2r_1 \\ r_2 \leftrightarrow r_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & -3 & 3 \end{array} \right)$$

例：解矩阵方程

例. 解矩阵方程 $\mathbf{A}^* \mathbf{X} = 2\mathbf{E} + 2\mathbf{X}$, 其中 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

解. 注意到 $|\mathbf{A}| = 4$. 两边同时左乘 \mathbf{A} 得到 $4\mathbf{X} = 2\mathbf{A} + 2\mathbf{A}\mathbf{X}$, $(2\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{A}$.

$$(2\mathbf{E} - \mathbf{A}, \mathbf{A}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

故 $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

练习. 解矩阵方程 $A^*XA = 2XA - 8E$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

答案. 两边同时左乘 A 右乘 A^{-1} 得到 $-2X = 2AX - 8E$, $(A + E)X = 4E$,

$$(A + E, 4E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right).$$

第三章 向量组

- ① 向量组
- ② 矩阵的秩
- ③ 标准正交基
- ④ 线性方程组

第一节 向量组

- 线性组合
- 线性相关和线性无关
- 线性相关和线性无关的性质
- 维数和秩
- 极大线性无关组

引例: 齐次线性方程组的解空间

对于标准向量空间 $V = \mathbb{R}^n$, 我们可以将任一 $v \in V$ 唯一地表达为形式

$$v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n,$$

其中

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T, e_2 = (0, 1, \dots, 0)^T, \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)^T.$$

我们来考虑齐次线性方程组 $Ax = 0$. 该方程的所有解形成的集合

$$V = \{x \mid Ax = 0\}$$

是一个向量空间. 我们想要类似地找一组解 ξ_1, \dots, ξ_r , 使得任一解 $x \in V$ 可以唯一地表达为形式

$$x = \lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2 + \cdots + \lambda_r \xi_r,$$

这便引出了基的概念.

定义. 设 V 是向量空间. 若 $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in V$ 满足: 对任意 $v \in V$, 存在唯一的一组数 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ 使得

$$v = \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_m \alpha_m,$$

则称 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 是 V 的一组**基**.

如何判断一组向量是不是基呢? 这需要线性组合和线性无关的概念.

我们将一些具有相同维数的向量放在一起称之为**向量组**(可以有重复的): 例如:

- $\alpha_1 = (1, 1, -1)^T, \alpha_2 = (2, 1, 2)^T, \alpha_3 = (3, 2, 1)^T$;
- $\alpha_1^T = (1, 1, -1), \alpha_2^T = (2, 1, 2), \alpha_3^T = (3, 2, 1)$;
- $m \times n$ 矩阵 A 的 m 行可以看成 m 个行向量, 它们构成一个向量组, 叫做 A 的**行向量组**;
- 类似地, A 的列向量构成它的**列向量组**.
- $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T, e_2 = (0, 1, \dots, 0)^T, \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)^T$.

定义. 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta$ 为 n 维向量. 若存在一组数 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ 使得

$$\beta = \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_m \alpha_m,$$

则称 β 可以被向量组 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ **线性表示**, 或称 β 是向量组 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ 的**线性组合**.

例.

- (1) n 维零向量是任一 n 维向量组的线性组合.
- (2) 任意 n 维向量是 e_1, \dots, e_n 的线性组合.
- (3) $v \in V$ 是它的一组基的线性组合.
- (4) 空间中两条不共线的向量的线性组合全体就是过二者的平面.

向量 β 能被向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性表示, 当且仅当存在 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ 使得

$$\beta = \lambda_1 \alpha_1 + \cdots + \lambda_m \alpha_m = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix},$$

即 $Ax = \beta$ 有解, 其中 $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$.

定理. 向量 β 能被 A 的列向量组线性表示, 当且仅当 $Ax = \beta$ 有解.

设向量组 S 是 A 的列向量组. 记 V 为向量组 S 能线性表示的向量全体, 则

$$V = \{A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

是一个向量空间, 称为 S **生成的空间**. 它是包含 S 中所有向量的最小的向量空间.

这样, β 能被 S 线性表示 $\iff \beta \in V$.

定义.

- (1) 设有两个向量组 $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}, T = \{\beta_1, \dots, \beta_k\}$. 若 β_1, \dots, β_k 均可以被 S 线性表示, 则称向量组 T 可以被向量组 S 线性表示.
- (2) 若向量组 S 和 T 能相互线性表示, 则称 S, T **向量组等价**.

设 $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_m), B = (\beta_1, \dots, \beta_k)$. T 能被 S 线性表示, 当且仅当存在 x_1, \dots, x_k 使得

$$Ax_1 = \beta_1, \quad \dots, \quad Ax_k = \beta_k,$$

即存在矩阵 X 使得 $AX = B$.

定理. 设 S, T 分别为 A, B 的列向量组, 且分别生成空间 V, W .

- (1) T 可以被 S 线性表示 $\iff W \subseteq V \iff \exists X$ 使得 $AX = B$.
- (2) S, T 向量组等价 $\iff W = V \iff \exists X, Y$ 使得 $B = AX, A = BY$.

命题. 向量组的等价满足如下性质:

- (1) 自反性: $S \sim S$;
- (2) 对称性: $S \sim T \implies T \sim S$;
- (3) 传递性: $S \sim T, T \sim R \implies S \sim R$.

设 A, B 的列向量组为 S, T . 若矩阵 $A \stackrel{c}{\sim} B$ 列等价, 则存在可逆矩阵 Q 使得 $B = AQ$, 于是二者的列向量组作为向量组等价. 反过来, 如果 S, T 大小相同, 则 $A \stackrel{c}{\sim} B$. 若 S 向量个数比 T 的少, 则 $S \sim S \cup \{0, \dots, 0\}$, 从而 $(A, O) \stackrel{c}{\sim} B$.

线性相关与线性无关

定义. 对于 n 维向量组 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$, 若存在一组**不全为零**的数 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ 使得

$$\lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_m \alpha_m = \mathbf{0},$$

则称该向量组**线性相关**. 否则称该向量组**线性无关**.

例.

- (1) $\alpha_1 = (1, 2, 3)^T$, $\alpha_2 = (2, 3, 4)^T$, $\alpha_3 = (0, 0, 0)^T$ 线性相关. **包含零向量的向量组总是线性相关的.**
- (2) $e_1 = (1, 0, 0)^T$, $e_2 = (0, 1, 0)^T$, $e_3 = (0, 0, 1)^T$ 线性无关. 一般地, n 维基本向量组 e_1, \dots, e_n **线性无关**.
- (3) α 线性相关 $\iff \alpha = \mathbf{0}$.
- (4) α_1, α_2 线性相关 $\iff \alpha_1, \alpha_2$ 对应分量成比例 (共线).

向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性无关当且仅当

$$\lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_m \alpha_m = \mathbf{0} \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0,$$

即 $Ax = \mathbf{0}$ 只有零解, 其中 $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$. 因此:

定理. 设 V 是 A 列向量生成的空间, 则以下结论等价:

- A 的列向量组线性无关;
- $Ax = \mathbf{0}$ 只有零解;
- $\exists v \in V, Ax = v$ 只有唯一解;
- $\forall v \in V, Ax = v$ 只有唯一解.

例：线性无关和线性相关

练习. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\alpha = \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. 若 $A\alpha$ 和 α 线性相关, 则 $k = \underline{-1}$.

练习. 已知向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ 线性无关, 请问向量组 $\{\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1\}$ 是否线性无关?

答案. 线性相关, 因为 $(\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_1 + \alpha_2) - 2\alpha_1 = 0$.

例: 判断线性无关

例. 已知向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 线性无关, 证明向量组 $\{\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1\}$ 线性无关.

证明. 我们可以用定义来直接证明. 设

$$\lambda_1(\alpha_1 + \alpha_2) + \lambda_2(\alpha_2 + \alpha_3) + \lambda_3(\alpha_3 + \alpha_1) = \mathbf{0}.$$

那么

$$(\lambda_1 + \lambda_3)\alpha_1 + (\lambda_1 + \lambda_2)\alpha_2 + (\lambda_2 + \lambda_3)\alpha_3 = \mathbf{0}.$$

由于 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 线性无关, 因此

$$\lambda_1 + \lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_2 + \lambda_3 = 0,$$

解得 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. 证毕. □

例：判断线性无关

我们来看另一种证法.

另证. 我们有

$$(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)A,$$

其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 若 $(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1)x = \mathbf{0}$, 则

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)Ax = \mathbf{0} \implies Ax = \mathbf{0}$$

由于 $|A| = 2$, A 可逆, 因此 $x = \mathbf{0}$. □

命题.

- (1) 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性无关, $(\beta_1, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)C$. β_1, \dots, β_n 线性无关
 $\iff Cx = 0$ 只有零解.
- (2) 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 线性无关, $(\beta_1, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)C$. β_1, \dots, β_n 线性无关
 $\iff |C| \neq 0$.
- (3) n 维向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 线性无关 $\iff |\alpha_1, \dots, \alpha_n| \neq 0$.

例: 判断线性无关

例. $\alpha_1 = (1, 2, 3)^T$, $\alpha_2 = (2, 3, 4)^T$, $\alpha_3 = (3, 5, 7)^T$ 线性相关. 因为它们构成的 3 阶矩阵行列式为零.

练习.

- (1) 若向量组 $\alpha_1 = (1, 1, 1)^T$, $\alpha_2 = (1, 2, 3)^T$, $\alpha_3 = (1, 3, t)^T$ 线性相关, 则 $t = \underline{5}$.
- (2) 若任一 3 维向量都可由向量组 $\alpha_1 = (a, 3, 2)^T$, $\alpha_2 = (2, -1, 3)^T$, $\alpha_3 = (3, 2, 1)^T$ 线性表示, 则 $a \neq \underline{5}$.

线性相关和线性无关的等价刻画

定理. 向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性相关 \iff 其中至少有一个向量可以由其它向量线性表示.

证明. 若该向量组线性相关, 则存在不全为零的数 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ 使得

$$\lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_m \alpha_m = \mathbf{0}.$$

设 $\lambda_i \neq 0$, 则 $\alpha_i = -\frac{1}{\lambda_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \lambda_j \alpha_j$ 可由其它向量线性表示.

反之, 若 $\alpha_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \lambda_j \alpha_j$ 可由其它向量线性表示. 则 $-\alpha_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \lambda_j \alpha_j = \mathbf{0}$, 向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性相关. □

线性相关和线性无关的等价刻画

向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性无关 \iff 其中任一向量不可以由其它向量线性表示.

注意, 向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性相关 \nRightarrow 其中任一向量可以由其它向量线性表示.

练习. 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 是 m 个 n 维向量, 则下列结论正确的有 1 个.

- (1) 若 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性相关, 则其中任一向量均可由其余向量线性表示
- (2) 若 α_m 不能由 $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$ 线性表示, 则向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性无关
- (3) 若 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性相关, 且存在不全为零的 $\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}$ 使得 $\lambda_1\alpha_1 + \dots + \lambda_{m-1}\alpha_{m-1} = \mathbf{0}$, 则 α_m 不能由 $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$ 线性表示
- (4) 若 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性相关, 且 α_m 不能由 $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$ 线性表示, 则 $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$ 线性相关

线性相关和线性无关的性质

定理. 若向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性无关, 向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta$ 线性相关, 则 β 可以由 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性表示, 且表达形式唯一.

证明. 由于向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta$ 线性相关, 因此存在不全为零的数 $\lambda_1, \dots, \lambda_m, k$ 使得

$$\lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_m \alpha_m + k \beta = \mathbf{0}.$$

若 $k = 0$, 则由 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性无关可知 $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$. 这与 $\lambda_1, \dots, \lambda_m, k$ 不全为零矛盾. 因此 $k \neq 0$,

$$\beta = -\frac{1}{k}(\lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_m \alpha_m).$$

由 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性无关可知线性组合表达方式唯一. □

线性相关和线性无关的性质

定理. 设向量组 $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$, $T = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_s\}$.

- (1) 若向量组 S 线性相关, 则 T 也线性相关.
- (2) 若向量组 T 线性无关, 则 S 也线性无关.

即 **部分相关 \implies 整体相关, 整体无关 \implies 部分无关.**

例. n 维向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_s (3 \leq s \leq n)$ 线性无关 \iff (D).

- (A) $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 中存在一个向量不能由其余向量线性表示 **必要**
- (B) $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 中任两个向量都线性无关 **必要**
- (C) $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 中不含零向量 **必要**
- (D) $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 中任一个向量都不能由其余向量线性表示

例：线性相关和线性无关

练习. 若向量组 α, β, γ 线性无关, α, β, δ 线性相关, 则(C).

- (A) α 一定能由 β, γ, δ 线性表示 (B) β 一定不能由 α, γ, δ 线性表示
(C) δ 一定能由 α, β, γ 线性表示 (D) δ 一定不能由 α, β, γ 线性表示

例. 设向量 β 可由 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性表示, 但不能由向量组 $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}\}$ 线性表示. 记 $T = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}, \beta\}$, 则(B). $\beta = \lambda_1\alpha_1 + \dots + \lambda_m\alpha_m, \lambda_m \neq 0$

- (A) α_m 不能由 S 线性表示, 也不能由 T 线性表示
(B) α_m 不能由 S 线性表示, 但能由 T 线性表示
(C) α_m 能由 S 线性表示, 也能由 T 线性表示
(D) α_m 能由 S 线性表示, 但不能由 T 线性表示

例: 线性相关和线性无关

例. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 证明

- (1) α_1 能由 α_2, α_3 线性表示;
- (2) α_4 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

证明.

- (1) 由 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关可知 α_2, α_3 线性无关. 但是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 所以 α_1 能由 α_2, α_3 线性表示.
- (2) 若 α_4 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 由于 α_1 能由 α_2, α_3 线性表示, 于是 α_4 也能由 α_2, α_3 线性表示. 这与 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关矛盾. □

线性相关和线性无关的性质

定理. 设 $\alpha_j = (a_{1j}, \dots, a_{nj})^T, \beta_j = (a_{1j}, \dots, a_{nj}, a_{n+1,j})^T$.

- (1) 若向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性无关, 则 β_1, \dots, β_m 线性无关.
- (2) 若向量组 β_1, \dots, β_m 线性相关, 则 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性相关.

证明. 设 $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_m), B = (\beta_1, \dots, \beta_m)$, 则存在 m 维向量 γ 使得 $B = \begin{pmatrix} A \\ \gamma^T \end{pmatrix}$. 若向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性无关, 则 $Ax = 0$ 只有零解. 而

$$Bx = 0 \iff Ax = 0, \gamma^T x = 0,$$

因此 $x = 0, Bx = 0$ 只有零解, β_1, \dots, β_m 线性无关. □

即高维相关 \implies 低维相关, 低维无关 \implies 高维无关.

练习.

(1) 判断下列向量组的线性相关性：

(i) $(1, 2, 3, 4)^T, (2, 3, 4, 5)^T, (0, 0, 0, 0)^T$. **相关**

(ii) $(a, b, 1, 0, 0)^T, (c, d, 0, 6, 0)^T, (a, c, 0, 5, 6)^T$. **无关**

(iii) $(a, 1, 0, b, 0)^T, (c, 0, 6, d, 0)^T, (a, 0, 5, c, 6)^T$. **无关**

(2) 若 $(1, 0, 0, 2)^T, (0, 1, 5, 0)^T, (2, 1, t + 2, 4)^T$ 线性相关, 则 $t = \underline{\quad 3 \quad}$.

向量组大小与线性无关的关系

定理. 设向量组 $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$ 可由 $T = \{\beta_1, \dots, \beta_t\}$ 线性表示.

- (1) 若 $s > t$, 则 S 线性相关. (2) 若 S 线性无关, 则 $s \leq t$.

即多的由少的表示, 多的一定线性相关.

证明. 设 $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_s), B = (\beta_1, \dots, \beta_t)$. 则存在矩阵 P 使得 $A = BP$. 由于 P 行数小于列数, 因此 $Px = 0$ 有非零解 x . 从而 $Ax = BPx = 0$, S 线性相关. \square

推论.

- (1) $m > n$ 个 n 维向量一定线性相关.
(2) 任意两个等价的线性无关向量组所含向量的个数相同.

- (1) 向量组线性相关 \iff 其中至少有一个向量可以由其它向量线性表示.
- (2) 若 S 线性无关, $S \cup \{\beta\}$ 线性相关, 则 β 可以由 S 唯一线性表示.
- (3) 整体无关 \implies 部分无关.
- (4) 低维无关 \implies 高维无关.
- (5) 多的由少的表示, 多的一定线性相关.

定义.

- (1) 若 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 是向量空间 V 的一组基, 则称 m 为 V 的**维数**, 记作 $\dim V$.
- (2) 设向量组 S 生成空间 V . 称 V 的维数为该向量组的**秩(Rank)**, 记作 $R(S)$.

由前面的结论可知, V 不同的基向量组的个数总是相同的, 即维数是唯一的.

设 $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ 生成 V , T 是 V 的一组基. 由于向量组等价 \iff 生成同一个空间, 因此 S, T 是等价向量组. 由 T 线性无关可知 $R(S) \leq m$.

定理. 设 $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ 的列向量组为 S .

- (1) S 线性无关 $\iff R(S) = m \iff Ax = 0$ 只有零解.
- (2) S 线性相关 $\iff R(S) < m \iff Ax = 0$ 有非零解.

推论. 设方阵 $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ 的列向量组为 S .

(1) S 线性无关 $\iff R(S) = n \iff Ax = 0$ 只有零解 $\iff |A| \neq 0$.

(2) S 线性相关 $\iff R(S) < n \iff Ax = 0$ 有非零解 $\iff |A| = 0$.

练习. 设 A 是 n 阶方阵, 且其行列式 $|A| = 0$. 下列说法正确的是(C).

- (A) A 必有一列元素全为零
- (B) A 必有两列元素对应成比例
- (C) A 必有一个列向量可由其余列向量线性表示
- (D) A 中任意列向量均可由其余列向量线性表示

定理.

- (1) 设向量组 S 可由向量组 T 线性表示, 则 $R(S) \leq R(T)$.
- (2) 若向量空间 $V \subseteq W$, 则 $\dim V \leq \dim W$.
- (3) 设向量组 S 可由向量组 T 线性表示, 且 $R(S) = R(T)$, 则 S, T 向量组等价.
- (4) 若向量空间 $V \subseteq W$ 且 $\dim V = \dim W$, 则 $V = W$.

我们来证明(4). 设 S, T 是 V, W 的一组基. 那么 S, T 大小相同, 且 S 可由 T 线性表示. 设 S, T 分别是 A, B 的列向量组, 那么存在方阵 P 使得 $A = BP$. 若 P 不可逆, 存在非零向量 x 使得 $Px = 0$. 于是 $Ax = BPx = 0$, S 线性相关, 矛盾!

例: 向量组的秩

例. 若

$$S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}, \quad S_2 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}, \quad S_3 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$$

满足 $R(S_1) = R(S_2) = 3, R(S_3) = 4$. 证明向量组 $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5 - \alpha_4\}$ 线性无关.

证明. 由 $R(S_1) = 3$ 可知 S_1 线性无关. 由 $R(S_2) = 3$ 可知 S_2 线性相关. 从而 α_4 可由 S_1 线性表示. 于是 S_3 可由 S 线性表示. 显然 S 可由 S_3 线性表示, 因此二者等价, $R(S) = R(S_3) = 4$. □

练习. 判断题: 设 S 和 T 为两个 n 维向量组, 且 $R(S) = R(T)$, 则 S 和 T 等价. ✗

极大线性无关组的定义

如何从一组能生成空间 V 的向量找到 V 的一组基? 我们只需要取极大线性无关组.

定义. 设 S 为一个向量组. 若 S 的部分组 $S_0 = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ 满足

- (1) S_0 线性无关;
- (2) S_0 添加 S 中的若干向量得到的向量组均线性相关.

则称 S_0 是 S 的一个**极大线性无关组**.

定理. 以下等价:

- (1) S_0 是 S 的极大线性无关组;
- (2) S_0 线性无关且 S_0 大小等于 $R(S)$;
- (3) S_0 线性无关且 $S_0 \sim S$;
- (4) $S_0 \sim S$ 且 S_0 大小等于 $R(S)$.

- (1) 只含有零向量的向量组没有极大线性无关组 (空集), 它的秩为 0 (空集生成 0 维空间 $\{0\}$).
- (2) 极大线性无关组一般不是唯一的. 例如

$$\alpha_1 = (1, 0)^T, \quad \alpha_2 = (0, 1)^T, \quad \alpha_3 = (1, 1)^T.$$

α_1, α_2 是一个极大线性无关组, α_1, α_3 也是一个极大线性无关组.

- (3) 向量组和它的一个极大线性无关组是等价的, 于是同一向量组的任意两个极大线性无关组等价.

设 $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$, $B = (\beta_1, \dots, \beta_r)$ 的列向量组是等价的线性无关组. 我们之前证明过若 $B = AP$, 则 P 可逆.

若 $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $B = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ 的列向量组是等价的向量组, 秩为 r . 通过适当的列变换, 可以让 A 的前 r 列是极大无关组, 后面全是零向量. 对 B 作类似操作. 设 $A = (A'_r, O)$, $B = (B'_r, O)$, 那么 $A' \stackrel{\sim}{\sim} B'$, 从而存在可逆矩阵 $P \in M_r$ 使得 $B' = A'P$. 于是

$$B = A \begin{pmatrix} P & \\ & E \end{pmatrix} \stackrel{\sim}{\sim} A.$$

因此同型矩阵列向量组等价 \iff 列等价.

例: 极大线性无关组

例. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的行向量组为

$$\alpha_1^T = (1, 1, 3, 1), \alpha_2^T = (0, 1, -1, 4), \alpha_3^T = (0, 0, 0, 5), \alpha_4^T = (0, 0, 0, 0).$$

由于 $\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T$ 的第 1, 2, 4 个分量形成可逆矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, 因此它们线性无关. 它们构成一个极大线性无关组, A 的行向量组的秩是 3. 类似可知, A 的列向量组的秩也是 3.

实际上, 任意矩阵的行向量组的秩等于列向量组的秩. 为了说明这一点, 我们考虑矩阵的秩.

第二节 矩阵的秩

- 矩阵秩的定义
- 矩阵秩的性质
- 极大线性无关组的计算方法

我们知道, 每个矩阵 A 都等价于某个标准形 $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$. 称 r 为 A 的秩, 记作 $R(A)$. 称 A 的行向量组的秩为行秩, 列向量组的秩为列秩.

定理 (三秩相等). A 的行秩和列秩均等于秩 $R(A)$.

由此可知矩阵的秩是唯一确定的.

对于行阶梯形矩阵, 再实施初等变换使其变为行最简形矩阵或标准形矩阵, 并不会改变它的非零行的个数. 换言之, **行阶梯形矩阵的秩就是非零行的个数.**

设 A 通过初等行变换变为行阶梯形矩阵 B , 则二者秩相等, 二者的行向量组等价, 从而行秩也相等. 对于 B , 它的行秩就是非零行的个数, 也就是 $R(B)$. 因此 A 的行秩等于秩. 不难知道 $R(A) = R(A^T)$, 从而 A 的列秩 = A^T 的行秩 = $R(A^T) = R(A)$.

设 S, T 分别为 A, B 列向量组, 分别生成空间 V, W . 那么

$$\mathbf{A} \sim \mathbf{B} \iff \mathbf{R}(\mathbf{A}) = \mathbf{R}(\mathbf{B}) \iff \mathbf{R}(S) \sim \mathbf{R}(T) \iff \dim V = \dim W,$$

↑

$$\mathbf{A} \overset{c}{\sim} \mathbf{B} \iff S \sim T \iff V = W,$$

例: 计算矩阵的秩

注意处理带未知数的矩阵时, 不宜实施 $\frac{1}{a+1}r_2, (a-2)r_3$ 等类似操作, 因为其分母或系数可能为零.

练习. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -6 & 4 \\ 3 & 2 & m & 7 \end{pmatrix}$ 的秩.

答案. $m \neq -8$ 时, $R(A) = 3$; $m = -8$ 时, $R(A) = 2$.

例: 计算矩阵的秩

例. 求矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ 的秩.

解.

$$\begin{array}{l}
 r_1 \leftrightarrow r_4 \\
 \underbrace{r_2 - r_1} \\
 r_3 - r_1 \\
 r_4 - ar_1
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 1 & 1 & 1 & a \\
 0 & a-1 & 0 & 1-a \\
 0 & 0 & a-1 & 1-a \\
 0 & 1-a & 1-a & 1-a^2
 \end{pmatrix}
 \begin{array}{l}
 \underbrace{r_4 + r_2} \\
 \underbrace{r_4 + r_3}
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 1 & 1 & 1 & a \\
 0 & a-1 & 0 & 1-a \\
 0 & 0 & a-1 & 1-a \\
 0 & 0 & 0 & -(a+3)(a-1)
 \end{pmatrix}$$

因此 $a \neq 1, -3$ 时, $\mathbf{R}(\mathbf{A}) = 4$; $a = -3$ 时, $\mathbf{R}(\mathbf{A}) = 3$; $a = 1$ 时, $\mathbf{R}(\mathbf{A}) = 1$.

矩阵秩有另一种刻画方式. 矩阵 A 任取 k 行 k 列交叉得到的 k^2 个元素 (不改变位置次序) 形成的 k 阶方阵的行列式, 称为 A 的 k 阶子式. 例如 n 阶方阵的余子式是 $n-1$ 阶子式.

定理. 设 $R(A) = r$, 则存在非零的 r 阶子式, 但所有的 $r+1$ 阶子式都是零.

根据行列式的拉普拉斯展开, 若 A 的 k 阶子式均为零, 则 $k+1$ 阶子式也都是零. 因此 A 的任意 $s > r$ 阶子式都是零.

推论.

- (1) $R(A) \geq r \iff A$ 存在非零 r 阶子式.
- (2) $R(A) \leq r \iff A$ 所有 $r+1$ 阶子式均为零.
- (3) $R(A) = r \implies A$ 存在 $1, 2, \dots, r$ 阶非零子式.

命题. 设 $A \in M_{m \times n}$, 则 $0 \leq R(A) \leq \min(m, n)$.

定义.

- (1) 若 $R(A) = m$, 称 A 行满秩;
- (2) 若 $R(A) = n$, 称 A 列满秩;
- (3) 若 $R(A) = m = n$, 称 A 满秩.

A 列满秩 $\iff A$ 列向量组线性无关 $\iff Ax = 0$ 只有零解.

命题.

- (1) $R(\mathbf{A}) = 0 \iff \mathbf{A} = \mathbf{O}$;
- (2) n 阶方阵 \mathbf{A} 可逆 $\iff R(\mathbf{A}) = n$;
- (3) $R(k\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}^T), k \neq 0$;
- (4) $R(\mathbf{AB}) \leq \min(R(\mathbf{A}), R(\mathbf{B}))$;
- (5) 若 $\mathbf{A}_{m \times n} \mathbf{B}_{n \times \ell} = \mathbf{O}$, 则 $R(\mathbf{A}) + R(\mathbf{B}) \leq n$;
- (6) $R(a\mathbf{A} + b\mathbf{B}) \leq R(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \leq R(\mathbf{A}) + R(\mathbf{B})$.
特别地, $\max(R(\mathbf{A}), R(\mathbf{B})) \leq R(\mathbf{A}, \mathbf{B})$.

命题.

$$(4) R(\mathbf{AB}) \leq \min(R(\mathbf{A}), R(\mathbf{B})).$$

证明. \mathbf{AB} 的列向量组为 \mathbf{A} 列向量组的线性组合, 从而 \mathbf{AB} 的列秩 $\leq \mathbf{A}$ 的列秩, 即 $R(\mathbf{AB}) \leq R(\mathbf{A})$. 于是

$$R(\mathbf{AB}) = R(\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T) \leq R(\mathbf{B}^T) = R(\mathbf{B}). \quad \square$$

若 \mathbf{B} 行满秩, 则 \mathbf{B} 有 $R(\mathbf{B})$ 阶子式非零, 它对应的方阵右乘 \mathbf{A} 得到的列向量组和 \mathbf{A} 列向量组等价, 从而 $R(\mathbf{AB}) = R(\mathbf{A})$; 若 \mathbf{B} 列满秩, 则 $R(\mathbf{BA}) = R(\mathbf{A})$;

命题.

(5) 若 $A_{m \times n} B_{n \times \ell} = O$, 则 $R(A) + R(B) \leq n$.

证明. 我们将会 §2.4 证明空间

$$V = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$$

的维数是 $n - R(A)$. 设

$$W = \{By \mid y \in \mathbb{R}^\ell\}$$

是 B 列向量生成的空间, 则 W 的维数是 $R(B)$. 由 $AB = O$ 可知 $W \subseteq V$, 因此 $R(B) \leq n - R(A)$. □

命题.

$$(6) \quad R(a\mathbf{A} + b\mathbf{B}) \leq R(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \leq R(\mathbf{A}) + R(\mathbf{B}).$$

特别地, $\max(R(\mathbf{A}), R(\mathbf{B})) \leq R(\mathbf{A}, \mathbf{B})$.

证明. 设 S, T 分别为 \mathbf{A}, \mathbf{B} 列向量组的极大线性无关组, 则 S, T 的大小分别是 $R(\mathbf{A}), R(\mathbf{B})$. 由于 (\mathbf{A}, \mathbf{B}) 的列向量组和 $S \cup T$ 向量组等价, 因此

$$R(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = R(S \cup T) \leq R(\mathbf{A}) + R(\mathbf{B}).$$

由于 $a\mathbf{A} + b\mathbf{B}$ 的列向量组可以由 (\mathbf{A}, \mathbf{B}) 的列向量组线性表示, 因此

$$R(a\mathbf{A} + b\mathbf{B}) \leq R(\mathbf{A}, \mathbf{B}).$$

□

另证. 由于添加零行或零列不改变秩, 因此不妨设 A, B 都是方阵. 由于

$$aA + bB = (A, B) \begin{pmatrix} aE \\ bE \end{pmatrix}, \quad (A, B) = (E, E) \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}.$$

因此 $R(aA + bB) \leq R(A, B) \leq R(A) + R(B)$. □

一般地有 Frobenius 不等式:

$$R(ABC) \geq R(AB) + R(BC) - R(B).$$

$C = O$ 可得 $R(AB) \leq R(B)$; $B = E$ 可得 Sylvester 不等式:

$$R(AB) \geq R(A) + R(B) - n.$$

例：矩阵秩性质的应用

例. 证明：若 n 阶方阵 \mathbf{A} 满足 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$, 则 $\mathbf{R}(\mathbf{A}) + \mathbf{R}(\mathbf{A} - \mathbf{E}) = n$.

证明. 由于 $\mathbf{A}(\mathbf{A} - \mathbf{E}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{A} = \mathbf{O}$, 因此

$$\mathbf{R}(\mathbf{A}) + \mathbf{R}(\mathbf{A} - \mathbf{E}) \leq n.$$

由于 $\mathbf{A} + (\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \mathbf{E}$, 因此

$$n = \mathbf{R}(\mathbf{E}) \leq \mathbf{R}(\mathbf{A}) + \mathbf{R}(\mathbf{E} - \mathbf{A}).$$

故 $\mathbf{R}(\mathbf{A}) + \mathbf{R}(\mathbf{A} - \mathbf{E}) = n$. □

定理 (伴随矩阵的秩). 设 A 是 n 阶方阵, 则

$$R(A^*) = \begin{cases} n, & R(A) = n; \\ 1, & R(A) = n - 1; \\ 0, & R(A) \leq n - 2. \end{cases}$$

证明.

- (1) 若 $R(A) = n$, A 可逆, 从而 A^* 可逆, $R(A^*) = n$.
- (2) 若 $R(A) = n - 1$, 由 $AA^* = |A|E = O$ 可知 $R(A^*) \leq 1$. 由于 $R(A) = n - 1$, A 存在非零的 $n - 1$ 子式, 从而 $A^* \neq O$. 故 $R(A^*) = 1$.
- (3) 若 $R(A) \leq n - 2$, 则 A 的 $n - 1$ 子式均为零, 从而 $A^* = O$. □

例: 矩阵秩性质的应用

练习.

(1) 设 $\alpha = (1, 0, -1, 2)^T, \beta = (0, 1, 0, 2)^T$, 则 $R(\alpha\beta^T) = \underline{1}$.

(2) 若 $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ 且 $R(A^*) = 1$, 则(B).

(A) $a \neq b, a + 2b \neq 0$

(B) $a \neq b, a + 2b = 0$

(C) $a = b, a \neq 0$

(D) $a = b = 0$

(3) 设 A, B 均为 n 阶非零矩阵, 且 $AB = O$, 则 $R(A)$ 与 $R(B)$ (B).

(A) 必有一个等于 0

(B) 都小于 n

(C) 都等于 n

(D) 一个小于 n , 一个等于 n

例: 矩阵秩性质的应用

练习.

(4) 设 P 为 3 阶非零矩阵, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & t \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ 且 $PQ = O$, 则(A).

(A) $t \neq 6$ 时, $R(P) = 1$

(B) $t \neq 6$ 时, $R(P) = 2$

(C) $t = 6$ 时, $R(P) = 1$

(D) $t = 6$ 时, $R(P) = 2$

(5) 设 A, B 为 n 阶方阵, 则(A).

(A) $R(A, AB) = R(A)$

(B) $R(A, BA) = R(A)$

(C) $R(A, AB) = \max(R(A), R(B))$

(D) $R(AB) = R(A^T B^T)$

答案. 存在 $AB = O, BA \neq O$, D 错误. 令 $A = E$, C 错误. (E, B) 行满秩, 选 A.

例：矩阵秩性质的应用

练习.

(6) 设 $\mathbf{A} \in M_{m \times n}$, $\mathbf{B} \in M_{n \times m}$, 则(A).

(A) 当 $m > n$ 时, 必有 $|\mathbf{AB}| = 0$

(B) 当 $m > n$ 时, 必有 $|\mathbf{AB}| \neq 0$

(C) 当 $m < n$ 时, 必有 $|\mathbf{AB}| = 0$

(D) 当 $m < n$ 时, 必有 $|\mathbf{AB}| \neq 0$

(7) 设 $\mathbf{A} \in M_{n \times m}$, $\mathbf{B} \in M_{m \times n}$, $n < m$. 若 $\mathbf{AB} = \mathbf{E}$, 则 $R(\mathbf{B}) = \underline{n}$.

(8) 若 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a+2 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ a+3 & a+6 & a+4 \end{pmatrix}$ 等价, 则(B).

(A) $a = -1$

(B) $a \neq -1$

(C) $a \neq 1$

(D) $a = 1$

(9) 设四阶方阵 $\mathbf{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 满足 $\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 = \mathbf{0}$, $\alpha_2 + 5\alpha_4 = \mathbf{0}$, 则 $R(\mathbf{A}^*) = \underline{0}$.

定理. 若 A 经过初等行变换变为 B , 则

- (1) A 的行向量组与 B 的行向量组等价;
- (2) A 任意 k 列和 B 对应的 k 列具有相同的线性相关性.

即初等行变换保持行向量组的等价性, 列向量组的线性组合关系.

证明. (1) 我们已经证明过. 设 $B = PA$, 其中 P 是可逆矩阵. 若 $Bx = 0$, 则 $PAx = 0, Ax = 0$. 反之亦然, 即 $Ax = 0 \iff Bx = 0$. 设

$$A = (\alpha_1, \dots, \alpha_m), \quad B = (\beta_1, \dots, \beta_m).$$

则对于 $x = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)^T$,

$$Ax = \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_m \alpha_m = 0 \iff Bx = \lambda_1 \beta_1 + \dots + \lambda_m \beta_m = 0. \quad \square$$

极大线性无关组和秩的计算方法.

- (1) 将向量组以列向量形式组成矩阵 $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$.
- (2) 通过初等行变换将 A 变为行阶梯形矩阵.
 - 行阶梯形矩阵非零行的行数就是秩 $R(A)$;
 - 行阶梯形矩阵每个非零行的首个非零元对应的 A 的列向量, 就是极大线性无关组.
- (3) 继续化简为行最简形矩阵, 则可将其余向量表示为极大线性无关组的线性组合.

典型例题：求极大线性无关组

续解.

$$\begin{aligned}
 \underbrace{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -7 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 3 & -2 \\ -7 & 1 & 3 & 5 & -4 \\ -11 & 8 & 4 & 0 & -11 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -7 & 1 \\ 0 & 9 & -1 & -11 & 0 \\ 0 & 36 & -4 & -44 & 3 \\ 0 & 63 & -7 & -77 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -7 & 1 \\ 0 & 9 & -1 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -4/9 & -8/9 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1/9 & -11/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

因此 $R(\mathbf{A}) = 3$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5$ 是一个极大线性无关组, 且

$$\alpha_3 = -\frac{4}{9}\alpha_1 - \frac{1}{9}\alpha_2, \quad \alpha_4 = -\frac{8}{9}\alpha_1 - \frac{11}{9}\alpha_2.$$

典型例题：求极大线性无关组

练习. 求下述矩阵列向量的一个极大无关组, 并把其余向量用这个极大无关组线性表示:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

答案. 设 α_j 是 A 的第 j 列, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 是一个极大线性无关组, 且

$$\alpha_3 = -\alpha_1 - \alpha_2, \quad \alpha_5 = 4\alpha_1 + 3\alpha_2 - 3\alpha_4.$$

典型例题: 求极大线性无关组

例. 假设下述向量组线性相关

$$\alpha_1 = (1, 1, 1, 1, 2), \alpha_2 = (2, 1, 3, 2, 3), \alpha_3 = (2, 3, 3, 2, 3), \alpha_4 = (1, 3, -1, 1, a).$$

求 a , 并求它的秩和一个极大无关组, 并把其余向量用这个极大无关组线性表示.

解.

$$A = (\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T, \alpha_4^T) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此 $a = 4$, 秩为 3, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是一个极大线性无关组, 且 $\alpha_4 = 5\alpha_1 - 2\alpha_2$.

例：线性相关与线性无关

练习.

(1) 设矩阵 A 经初等行变换化为 B , 则二者的(A).

(A) 行向量组等价, 列向量组同相关性

(B) 行向量组同相关性, 列向量组等价

(C) 行向量组未必等价, 列向量组同相关性

(D) 行向量组等价, 列向量组未必同相关性

(2) 设 $A \in M_{m \times n}$, $B \in M_{n \times k}$, $AB = O$, $B \neq O$, 则(A).

(A) A 的列向量组线性相关

(B) A 的行向量组线性相关

(C) A 的列向量组线性无关

(D) A 的行向量组线性无关

例：线性相关与线性无关

练习. 多选题：设 A^* 是 $n > 1$ 阶方阵，以下说法正确的是(**ABCD**).

- (A) 若 A 的列向量组线性相关，则 A^* 的列向量组线性相关
- (B) 若 A 的列向量组线性无关，则 A^* 的列向量组线性无关
- (C) 若 A^* 的某两列向量线性相关，则 A 的列向量组线性相关
- (D) 若 A^* 的某两列向量线性无关，则 A 的列向量组线性无关

第三节 标准正交基

- 向量的内积
- 正交向量组与格拉姆-施密特正交化

本节考虑的向量都是实向量.

设向量组 $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$ 的秩为 r , 则它们生成的向量空间 V 的维数就是 r . S 的极大无关组 S_0 的大小就是 r , 且 S_0 是 V 的一组基.

有时候我们想更进一步, 就像 \mathbb{R}^n 的基本向量组 e_1, \dots, e_n 一样, 我们希望找到 V 的一组基 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 使得

- (1) α_i 长度都是 1;
- (2) $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 两两垂直.

定义. 设 $\alpha = (a_1, \dots, a_n)^T, \beta = (b_1, \dots, b_n)^T \in \mathbb{R}^n$, 定义内积

$$[\alpha, \beta] = \alpha^T \beta = \beta^T \alpha = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \in \mathbb{R}.$$

内积是数量积的推广, 它满足

- (1) $[\alpha, \beta] = [\beta, \alpha]$;
- (2) $[\alpha, \alpha] \geq 0$. 当且仅当 $\alpha = \mathbf{0}$ 时, $[\alpha, \alpha] = 0$;
- (3) $[\lambda\alpha, \beta] = [\alpha, \lambda\beta] = \lambda[\alpha, \beta]$;
- (4) $[\alpha + \beta, \gamma] = [\alpha, \gamma] + [\beta, \gamma]$.

这说明内积是一个对称正定双线性型.

定义. 设 $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, 定义 \boldsymbol{x} 的**长度或模**为

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}]} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

当 $\|\boldsymbol{x}\| = 1$ 时, 称 \boldsymbol{x} 为**单位向量**. 对于非零向量 \boldsymbol{x} , $\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}$ 为 \boldsymbol{x} 的**单位化向量**.

我们有 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \iff \|\boldsymbol{x}\| = 0 \iff [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}] = 0$.

定义. 若 $[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}] = 0$, 称 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ **正交(垂直)**.

设 $\alpha \neq 0$. 那么 X 的二次多项式

$$\|X\alpha + \beta\|^2 = [X\alpha + \beta, X\alpha + \beta] = [\alpha, \alpha]X^2 + 2[\alpha, \beta]X + [\beta, \beta] \geq 0$$

恒成立. 因此其判别式

$$\Delta = 4([\alpha, \beta]^2 - \|\alpha\|^2 \cdot \|\beta\|^2) \leq 0,$$

于是我们得到柯西-施瓦兹不等式

$$\pm[\alpha, \beta] \leq \|\alpha\| \cdot \|\beta\|.$$

显然 $\alpha = 0$ 时它也成立.

定义. 设非零向量 $\alpha = (a_1, \dots, a_n)^T, \beta = (b_1, \dots, b_n)^T \in \mathbb{R}^n$, 定义 α, β 的夹角为

$$\theta = \arccos \frac{[\alpha, \beta]}{\|\alpha\| \cdot \|\beta\|} \in [0, \pi].$$

注意正交比夹角为 $\frac{\pi}{2}$ 略微广泛点, 因为零向量与任意向量正交.

若 α 与 β 正交, 则

$$\|\alpha + \beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 + 2[\alpha, \beta] = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2,$$

此即勾股定理.

例: 正交向量

定义.

- (1) 若向量组 S 中的向量两两正交且非零, 则称 S 为**正交向量组**.
- (2) 若向量组 S 中的向量两两正交且均为单位向量, 则称 S 为**标准正交向量组**.

例. 设 $\alpha_1 = (1, 1, 1)^T, \alpha_2 = (1, -2, 1)^T \in \mathbb{R}^3$. 求向量 α_3 使得 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是正交向量组.

解. 显然 α_1, α_2 正交. 设 $\alpha_3 = (x_1, x_2, x_3)^T$, 则

$$\begin{aligned} [\alpha_1, \alpha_3] &= x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ [\alpha_2, \alpha_3] &= x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{aligned}$$

解得 $(x_1, x_2, x_3) = (k, 0, -k)$. 故可取 $\alpha_3 = (1, 0, -1)^T$.

正交向量组必线性无关

定理. 正交向量组必线性无关.

证明. 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 是正交向量组, $\lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_r \alpha_r = \mathbf{0}$. 对任意 $1 \leq i \leq r$,

$$\begin{aligned}0 &= [\mathbf{0}, \alpha_i] = [\lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_r \alpha_r, \alpha_i] \\ &= \lambda_1 [\alpha_1, \alpha_i] + \dots + \lambda_r [\alpha_r, \alpha_i] = \lambda_i [\alpha_i, \alpha_i].\end{aligned}$$

由于 α_i 非零, $[\alpha_i, \alpha_i] \neq 0, \lambda_i = 0$. 故 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 线性无关. □

如果 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 是向量空间 V 的一组正交基, 则对任意 $v \in V$, 有

$$v = \sum_{i=1}^r \frac{[v, \alpha_i]}{[\alpha_i, \alpha_i]} \alpha_i,$$

其中每一项就是 v 在 α_i 所在直线的投影.

现在我们来查看如何从空间 V 的一组基 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 得到一组标准正交基. 令 $\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_2 + \lambda\beta_1$. 若 β_1 和 β_2 正交, 则

$$0 = [\beta_2, \beta_1] = [\alpha_2, \beta_1] + \lambda[\beta_1, \beta_1],$$

因此 $\lambda = -\frac{[\alpha_2, \beta_1]}{[\beta_1, \beta_1]}.$

令 $\beta_3 = \alpha_3 + \lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2$, 类似地, 若 β_3 和 β_1, β_2 均正交, 则

$$\lambda_1 = -\frac{[\alpha_3, \beta_1]}{[\beta_1, \beta_1]}, \quad \lambda_2 = -\frac{[\alpha_3, \beta_2]}{[\beta_2, \beta_2]},$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{[\alpha_3, \beta_1]}{[\beta_1, \beta_1]}\beta_1 - \frac{[\alpha_3, \beta_2]}{[\beta_2, \beta_2]}\beta_2.$$

依次递推下去可得一组正交基.

格拉姆-施密特正交单位化方法.

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{[\alpha_2, \beta_1]}{[\beta_1, \beta_1]} \beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{[\alpha_3, \beta_1]}{[\beta_1, \beta_1]} \beta_1 - \frac{[\alpha_3, \beta_2]}{[\beta_2, \beta_2]} \beta_2$$

⋮

$$\beta_r = \alpha_r - \frac{[\alpha_r, \beta_1]}{[\beta_1, \beta_1]} \beta_1 - \dots - \frac{[\alpha_r, \beta_{r-1}]}{[\beta_{r-1}, \beta_{r-1}]} \beta_{r-1}$$

则 $e_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}, \dots, e_r = \frac{\beta_r}{\|\beta_r\|}$ 就是 V 的一组标准正交基.

典型例题: 格拉姆-施密特正交化

例. 将 $\alpha_1 = (1, 1, 0)^T$, $\alpha_2 = (1, 0, 1)^T$, $\alpha_3 = (1, 1, 2)^T$ 正交单位化.

解.

$$\beta_1 = \alpha_1 = (1, 1, 0)^T$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{[\alpha_2, \beta_1]}{[\beta_1, \beta_1]} \beta_1 = (1, 0, 1)^T - \frac{1}{2}(1, 1, 0)^T = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)^T$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{[\alpha_3, \beta_1]}{[\beta_1, \beta_1]} \beta_1 - \frac{[\alpha_3, \beta_2]}{[\beta_2, \beta_2]} \beta_2 = (1, 1, 2)^T - (1, 1, 0)^T - \frac{2}{3/2} \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)^T = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)^T$$

$$e_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^T, \quad e_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2)^T, \quad e_3 = \frac{\beta_3}{\|\beta_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1)^T.$$

第四节 线性方程组

- 齐次线性方程组解的存在性
- 齐次线性方程组解的结构
- 非齐次线性方程组
- 向量组的线性表示

齐次线性方程组非零解的判定

当 $b = 0$ 为零向量时, 称该线性方程组为**齐次**的; 否则称为**非齐次**的. 齐次线性方程组总有解 $x = 0$. $Ax = 0$ 有非零解 $\iff A$ 的列向量线性相关 $\iff R(A) < n$.

定理.

- (1) $A_{m \times n}x = 0$ 有 (无穷多) 非零解 $\iff R(A) < n$;
- (2) $A_{m \times n}x = 0$ 只有零解 $\iff R(A) = n$.

推论. 设 A 是 n 阶方阵.

- (1) $Ax = 0$ 有 (无穷多) 非零解 $\iff |A| = 0$;
- (2) $Ax = 0$ 只有零解 $\iff |A| \neq 0$.

推论. 若方程个数小于未知元个数, 则齐次线性方程组有非零解.

定义. 称空间 $\{x \mid Ax = 0\}$ 的一组基为该齐次线性方程组的**基础解系**.

齐次线性方程组的解. 设 $A \in M_{m \times n}$, $R(A) = r$. 线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系包含 $n - r$ 个向量.

证明. 设 A 的行最简形的拐角处分别位于 j_1, \dots, j_r 列:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & j_1 \text{ 列} & & j_2 \text{ 列} & & j_r \text{ 列} & & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \left(\begin{array}{cccccccc}
 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\
 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots \\
 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots \\
 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots
 \end{array} \right).
 \end{array}$$

例：基础解系的应用

例. 设 A 是 n 阶方阵, $R(A) = n - 1$ 且每行元素之和为 0. 则齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解为 $k(1, 1, \dots, 1)^T, k$ 为任意常数.

例. 设 n 阶方阵 A 列向量的一个极大线性无关组为 $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$. 则 $A^*x = 0$ 的解为 $k_1\alpha_1 + \dots + k_{n-1}\alpha_{n-1}, k_1, \dots, k_{n-1}$ 为任意常数.

练习. 设 n 阶方阵 A 满足 $R(A) = n - 1$, 代数余子式 $A_{11} \neq 0$. 则 $Ax = 0$ 的解为 $k(A_{11}, \dots, A_{1n})^T, k$ 为任意常数.

例: $A^T A$ 的秩

例. 设 A 是实矩阵, 证明 $R(A^T A) = R(A)$.

证明. 若 $A^T A x = 0$, 则 $0 = x^T A^T A x = (A x)^T A x = [A x, A x]$. 由内积的正定性可知 $A x = 0$. 所以 $A^T A x = 0 \iff A x = 0$. 二者解空间维数相等. 由于二者列数相同, 因此二者秩相同. □

由此可知

$$R(A A^T) = R(A^T) = R(A) = R(A^T A) = R(A^T A A^T A) = \dots$$

由于 $R(A) \geq R(A A^T A) \geq R(A^T A A^T A)$ 可知这些矩阵的秩都相等. 类似地, 任意多个 A, A^T 交错相乘得到的矩阵秩也都等于 $R(A)$.

注意复矩阵情形需要换成 \bar{A}^T 才成立, 其中 \bar{A} 表示所有元素取共轭.

非齐次线性方程组解的存在性

设 $A \in M_{m \times n}$. 对于非齐次线性方程组 $Ax = b$, 若方程有解, 则 b 可以由 A 的列向量线性表示, 从而 A 的列向量组和 (A, b) 的列向量组等价. 因此 $R(A) = R(A, b)$. 我们称 $m \times (n + 1)$ 矩阵 (A, b) 为**增广矩阵**.

注意到 A 列向量生成的空间 V 是 (A, b) 列向量生成的空间 W 的子空间. 若 $R(A) = R(A, b)$, 则 $V = W$, A 列向量组的一个极大无关组 S 也是 (A, b) 的极大无关组. 从而 b 是 S 的线性组合, 也是 A 列向量的线性组合.

定理. $Ax = b$ 有解 $\iff R(A) = R(A, b)$.

推论. 若 $R(A_{m \times n}) = m$, 则 $Ax = b$ 总有解.

例. 已知

$$\alpha_1 = (1, 4, 0, 2)^T, \alpha_2 = (2, 7, 1, 3)^T, \alpha_3 = (0, 1, -1, a)^T, \beta = (3, 10, b, 4)^T.$$

问 a, b 为何值时,

- (1) β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示;
- (2) β 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 唯一线性表示;
- (3) β 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 不唯一线性表示.

典型例题：线性方程组的性质

解. 即问 $Ax = \beta$ 的解的情况, 其中 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

$$(A, \beta) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{r} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & -1 & a & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{r} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-2 \end{array} \right)$$

于是可知 $R(A)$ 和 $R(A, \beta)$, 故

- (1) $b \neq 2$ 时, β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示;
- (2) $a \neq 1, b = 2$ 时, β 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 唯一线性表示;
- (3) $a = 1, b = 2$ 时, β 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 不唯一线性表示.

例: 线性方程组解的性质

例. 设 $A \in M_{m \times n}$, 则(D).

- (A) 若 $Ax = 0$ 仅有零解, 则 $Ax = b$ 有唯一解
- (B) 若 $Ax = 0$ 有非零解, 则 $Ax = b$ 有无穷多解
- (C) 若 $Ax = b$ 有无穷多解, 则 $Ax = 0$ 只有零解
- (D) 若 $Ax = b$ 有无穷多解, 则 $Ax = 0$ 有非零解

练习. 设 $A \in M_{m \times n}$, $R(A) = m < n$, 则(C).

- (A) A 的任意 m 个列向量线性无关
- (B) A 的任意一个 m 阶子式不等于 0
- (C) $Ax = b$ 一定有无穷多个解
- (D) $A \overset{r}{\sim} (E, O)$

练习. a, b 为何值时, 以下方程

(1) 有唯一解; (2) 无解; (3) 有无穷多解? 并在有无穷多解时求其通解.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + (a+2)x_3 + 4x_4 = b+3 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + (a+8)x_4 = 5 \end{cases}$$

典型例题: 解非齐次线性方程组

答案.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 4 & b+3 \\ 3 & 5 & 1 & a+8 & 5 \end{array} \right) \sim_r \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & 0 \end{array} \right).$$

- (1) $a \neq -1$ 时有唯一解;
- (2) $a = -1, b \neq 0$ 时无解;
- (3) $a = -1, b = 0$ 时有无穷多解, 通解为

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

例: 线性方程组解的性质

例. 已知4阶方阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, 且 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$. 若 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$, 求 $Ax = \beta$ 的通解.

解. 由题设可知 $R(A) = 3$, 因此 $Ax = 0$ 的基础解系只包含一个向量. 由 $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$ 可知 $(1, -2, 1, 0)^T$ 是 $Ax = 0$ 的一个解, 因此这是它的一个基础解系. 注意到 $(1, 1, 1, 1)^T$ 是 $Ax = b$ 的一个特解, 故通解为

$$x = (1, 1, 1, 1)^T + k(1, -2, 1, 0)^T.$$

例: 线性方程组解的性质

例. 已知 β_1, β_2 是 $Ax = b$ 的两个不同的解, α_1, α_2 是 $Ax = 0$ 的基础解系, 则 $Ax = b$ 的通解为 (B), k_1, k_2 为任意常数.

(A) $\frac{\beta_1 - \beta_2}{2} + k_1\alpha_1 + k_2(\alpha_1 + \alpha_2)$

(B) $2\beta_1 - \beta_2 + k_1\alpha_1 + k_2(\alpha_1 - \alpha_2)$

(C) $\frac{\beta_1 + \beta_2}{2} + k_1\alpha_1 + k_2(\beta_1 - \beta_2)$

(D) $\frac{\beta_1 - \beta_2}{2} + k_1\alpha_1 + k_2(\beta_1 - \beta_2)$

练习. 已知 $\eta_1 = (0, 1, 0)^T, \eta_2 = (-3, 2, 2)^T$ 是线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = d \end{cases}$ 的两个解向量, 则该方程组的通解为 $(0, 1, 0)^T + k(-3, 1, 2)^T$.

在物理实验中, 经常会出现实验数据与预期不符的情况. 例如变量 y 应当为变量 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ 的线性组合, 即存在 n 维向量 β 使得 $y = \mathbf{x}^T \beta$. 但从实验数据解方程却是无解. 因此我们需要寻找参数 β 使得 $y = \mathbf{x}^T \beta$ 尽可能接近实验数据.

比较常见的是最小二乘法: 即寻找参数 β 使得

$$\sum_{i=1}^k |y_i - \mathbf{x}_i^T \beta|^2 = \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\beta\|^2$$

尽可能小, 其中 (\mathbf{x}_i, y_i) 是实验数据, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_k)^T$, \mathbf{A} 是由行向量 \mathbf{x}_i^T 构成的 $k \times n$ 矩阵. 注意所有向量 $\mathbf{A}\beta$ 形成一个向量空间 V , 也就是 \mathbf{A} 的列向量生成的空间. \mathbf{y} 距离这个空间的距离 $\|\mathbf{y} - \mathbf{A}\beta\|$ 达到最小时, $\mathbf{y} - \mathbf{A}\beta$ 应当和这个空间正交. 于是 $\mathbf{A}^T(\mathbf{y} - \mathbf{A}\beta) = \mathbf{0}$, 即 β 是方程

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \beta = \mathbf{A}^T \mathbf{y}$$

的解.

第四章 相似和合同

- ① 方阵的相似
- ② 实对称阵的正交合同
- ③ 实对称阵的合同

第一节 方阵的相似

- 特征值与特征向量
- 特征值和特征向量的性质
- 方阵的相似
- 相似矩阵的性质
- 相似对角化

设 $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ 是一个线性映射. 由于 \mathbb{C}^n 中的向量由一组基

$$\alpha_1, \dots, \alpha_n$$

唯一线性表示, 因此它完全由它在该组基下的像决定. 若 f 将每个 α_i 映射为它的倍数, 则 f 将会变得很容易研究.

定义. 若常数 λ 和非零向量 x 满足 $Ax = \lambda x$, 称 λ 为 A 的**特征值**, x 为 A 关于 λ 的**特征向量**.

设 $Ax = \lambda x$, 则

$$(A - \lambda E)x = 0.$$

该方程有非零解当且仅当

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

注意到该行列式是 λ 的 n 次多项式, 最高项为 $(-1)^n \lambda^n$. 称之为 A 的特征多项式.

特征值和特征向量的计算步骤如下:

- (1) 求 A 的特征多项式 $f(\lambda) = |A - \lambda E|$;
- (2) 解 $f(\lambda) = |A - \lambda E| = 0$ 得到特征值;
- (3) 对于每一个特征值 λ_i , 解 $(A - \lambda_i E)x = 0$, 其**非零解**就是对应特征向量.

典型例题: 求特征值和特征向量

例. 求 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解.

(1) 特征多项式 $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ 4 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 10.$

(2) 由 $\lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0$ 解得特征值 $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -2.$

(3) 对于 $\lambda_1 = 5$, $\mathbf{A} - 5\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3/4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 得到基础解系 $\begin{pmatrix} 3/4 \\ 1 \end{pmatrix}$. 故对应的所有特征向量为 $k(3, 4)^T, k \neq 0.$

(4) 对于 $\lambda_2 = -2$, $\mathbf{A} + 2\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 得到基础解系 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. 故对应的所有特征向量为 $k(1, -1)^T, k \neq 0.$

通过

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

的展开可以看出, 若 $i \neq j$, 则 i 行 j 列的代数余子式中最多只会出现 λ^{n-2} 项. 所以

$$\begin{aligned} |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| &= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda) + \text{至多 } n - 2 \text{ 次项} \\ &= (-1)^n (\lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1}) + \text{至多 } n - 2 \text{ 次项}. \end{aligned}$$

根据韦达定理, 特征值之和为 $a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$.

$\lambda = 0$ 时, 特征多项式

$$f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$$

的取值 $|\mathbf{A}|$ 就是特征值的乘积.

特征值和特征向量的性质

定理. 若 λ 是 A 的特征值, x 是对应特征向量, 则下述矩阵有如下对应的特征值与特征向量:

方阵	kA	A^m	A^{-1}	A^*	$g(A)h(A)^{-1}$	A^T	$P^{-1}AP$
特征值	$k\lambda$	λ^m	λ^{-1}	$ A /\lambda$	$g(\lambda)/h(\lambda)$	λ	λ
对应特征向量	x	x	x	x	x	未必是 x	$P^{-1}x$

这里 g, h 是多项式, 且满足 $h(A)$ 可逆.

由此可知, 若 $g(A) = O$, 则 A 的所有特征值 λ 均满足 $g(\lambda) = 0$.

例：特征值和特征向量的性质

例. 设 3 阶方阵 A 的特征值为 $1, -1, 2$. 求 $|A^* + 3A - 2E|$.

解. 由于 $|A| = -2$, $A^* = -2A^{-1}$. 于是

$$A^* + 3A - 2E = -2A^{-1} + 3A - 2E$$

的特征值为 $-1, -3, 3$, $|A^* + 3A - 2E| = (-1) \times (-3) \times 3 = 9$.

练习. 若 4 阶方阵 A 的特征值为 $1, 2, -2, 0$, 则下列矩阵可逆的是(C).

(A) A

(B) $A - 2E$

(C) $A + E$

(D) $A - E$

例. 计算 $A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{pmatrix}$ 的行列式.

解. 设 $B = A + (b - a)E$, 则 B 所有元素为 b , 秩为 1, $Bx = 0$ 基础解系有 $n - 1$ 个向量. 从而 0 是 B 的至少 $n - 1$ 重特征值. 由于 $\text{Tr}(B) = nb$, 因此 B 的所有特征值为 $nb, 0, \dots, 0$, A 的所有特征值为 $nb + a - b, a - b, \dots, a - b$,

$$|A| = (a - b)^{n-1}(nb - b + a).$$

解. 设 $\boldsymbol{x}_k = (a_k, b_k, c_k)^T$, 则 $\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{k-1}$. 因此 $\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{k-1} = \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}_{k-2} = \cdots = \boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}_0$.
解特征多项式

$$|\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} 0.75 - \lambda & 0.1 & 0.05 \\ 0.15 & 0.8 - \lambda & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.85 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

得到特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0.75, \lambda_3 = 0.65$. 解方程 $(\boldsymbol{A} - \lambda_i\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 得到特征向量

$$\boldsymbol{v}_1 = (8, 13, 14)^T, \quad \boldsymbol{v}_2 = (1, 1, -2)^T, \quad \boldsymbol{v}_3 = (1, -1, 0)^T.$$

由于今天天气是晴天, 所以 $\boldsymbol{x}_0 = (1, 0, 0)^T$. 注意到 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ 线性无关, 因此 \boldsymbol{x}_0 可以由它们线性表示. 通过计算得到 $\boldsymbol{x}_0 = \frac{1}{35}\boldsymbol{v}_1 + \frac{1}{5}\boldsymbol{v}_2 + \frac{4}{7}\boldsymbol{v}_3$, 因此

$$\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}_0 = \frac{1}{35}\lambda_1^k\boldsymbol{v}_1 + \frac{1}{5}\lambda_2^k\boldsymbol{v}_2 + \frac{4}{7}\lambda_3^k\boldsymbol{v}_3.$$

续解. 代入计算可得 x_k , 从而得到未来七天晴雨雪的概率:

	明天	后天	3 天后	4 天后	5 天后	6 天后	7 天后
晴	0.75	0.58	0.47	0.39	0.34	0.31	0.28
雨	0.15	0.24	0.30	0.33	0.35	0.36	0.37
雪	0.10	0.18	0.23	0.27	0.31	0.33	0.35

第二节 实对称阵的正交合同

- 实二次型
- 实对称阵和实二次型的合同

我们知道,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

分别表示椭圆和双曲线. 对于二次曲线

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 1,$$

它又表示什么图形呢?

实二次型的矩阵形式

设实二次型 f 的 x_i^2 项的系数为 a_{ii} , $x_i x_j (i < j)$ 项的系数为 $2a_{ij}$. 设 $a_{ji} = a_{ij}$, 对称阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})_n$, 则

$$\begin{aligned}(x_1, \dots, x_n) \mathbf{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &= \left(\sum_{i=1}^n a_{i1} x_i, \dots, \sum_{i=1}^n a_{in} x_i \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \right) x_j = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j = f(x_1, \dots, x_n),\end{aligned}$$

即 $f = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$, 其中 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$, \mathbf{A} 为实对称阵.

反过来, 任给一个实对称阵 \mathbf{A} , 多项式 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 显然满足

$$f(\lambda \mathbf{x}) = (\lambda \mathbf{x})^T \mathbf{A} (\lambda \mathbf{x}) = \lambda^2 f(\mathbf{x}),$$

故 f 是实二次型. 因此实二次型 f 与对称阵 \mathbf{A} 之间存在一一对应的关系.

例：实二次型的矩阵形式

例. 写出实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 + 2x_1x_3 + x_3^2 + 4x_2x_3$ 对应的矩阵.

解.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

若 f 是标准形, 则 f 对应矩阵 A 是对角阵.

定义.

- (1) 若存在可逆线性变换 $x = Py$ 使得实二次型 f 在变量 x, y 下的矩阵分别为 A, B , 则称矩阵 A **合同**或**相合**于 B .
- (2) 若 P 是正交阵, 则称矩阵 A **正交合同**或**正交相合**于 B .

若 A 是对称阵, P 可逆, 则 P^TAP 也是对称阵. 由

$$f = x^T Ax = y^T P^T AP y = y^T (P^T AP) y$$

可知 A (正交) 合同于 B 当且仅当存在可逆 (正交) 方阵 P 使得 $B = P^TAP$.

命题. 对称方阵的 (正交) 合同满足

- (1) 自反性: A 与自身 (正交) 合同;
- (2) 对称性: 若 A (正交) 合同于 B , 则 B (正交) 合同于 A ;
- (3) 传递性: 若 A (正交) 合同于 B , B (正交) 合同于 C , 则 A (正交) 合同于 C .

合同、等价、相似有如下关系:

- (1) 若 A, B 合同, 则 A, B 等价, $R(A) = R(B)$. 反之未必.
- (2) 若 A, B 正交合同, 则 A, B 相似. 反之, **若实对称阵 A, B 相似, 则二者正交合同.**

定理. 对于实对称阵 A , 存在正交阵 P 使得 $P^T A P$ 是对角阵. 从而 A 对应的实二次型在线性变换 $y = P x$ 下变为标准形.

命题. 实对称阵的特征值一定是实数, 从而其特征向量均可取实向量.

证明. 设 A 是实对称阵, 非零向量 x 满足 $A x = \lambda x$. 两边取转置和共轭并右乘 x 得到

$$\bar{\lambda} \bar{x}^T x = \bar{x}^T \overline{A}^T x = \bar{x}^T A x = \lambda \bar{x}^T x.$$

显然 $\bar{x}^T x = |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 > 0$, 因此 λ 是实数. 由于特征向量是方程 $(A - \lambda E)x = 0$ 的解, 系数矩阵是实方阵, 因此特征向量可取实向量. □

典型例题: 实二次型的对角化

例. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 相似, 求 x, y 以及正交阵 P 使得 $P^{-1}AP = B$.

解. 由 A, B 相似得 $|A| = -2 = |B| = -2y$, $\text{Tr}(A) = 2 + x = \text{Tr}(B) = 1 + y$, 故 $x = 0, y = 1$.

• 对于 $\lambda_1 = 2$, $A - 2E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

典型例题: 实二次型的对角化

例. 设实二次型 $f = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 4x_1x_2 + 4x_2x_3 + 4x_3x_1$ 经正交变换化成标准形 $f(y_1, y_2, y_3) = 6y_1^2$, 则 $a = \underline{2}$.

练习. 设实二次型 $f = x_1^2 + 2x_2^2 + ax_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$ 经过正交变换 $x = Py$ 化为 $f = 2y_1^2 + 5y_2^2 + by_3^2$. 求常数 a, b 和正交阵 P .

答案. $a = 3, b = -1, P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

第三节 实对称阵的合同

- 惯性指数
- 正定二次型

证明. 设

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \text{diag}(k_1, \dots, k_r, 0, \dots, 0), \\ \mathbf{B} &= \text{diag}(\ell_1, \dots, \ell_r, 0, \dots, 0) = \mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P}, \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{P} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n)$ 为可逆矩阵. 不难得到 $\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P}$ 的对角元:

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P} = \text{diag}(k_1 \boldsymbol{\alpha}_1^T \boldsymbol{\alpha}_1, \dots, k_r \boldsymbol{\alpha}_r^T \boldsymbol{\alpha}_r, 0, \dots, 0).$$

从而 $\ell_i = k_i \|\boldsymbol{\alpha}_i\|^2$, 二者符号相同. (2) 由(1) 得到. □

注意到实对称阵都可正交合同于对角阵, 且对角元可以排序为

$$\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_q, 0, \dots, 0\},$$

其中 λ_i 为正特征值, μ_j 为负特征值. 设

$$\mathbf{P} = \text{diag}\left\{\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_p}}, \frac{1}{\sqrt{-\mu_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{-\mu_q}}, 0, \dots, 0\right\},$$

则

$$\mathbf{P}^T \Lambda \mathbf{P} = \text{diag}\{1, \dots, 1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0\}.$$

定理. 任意 n 阶实对称矩阵 A 合同于对角矩阵

$$\begin{pmatrix} E_p & & \\ & -E_q & \\ & & O_{n-p-q} \end{pmatrix},$$

其中 p, q 分别为正负特征值个数 (计算重数), $R(A) = p + q$.

推论. n 阶实对称阵 A 与 B 合同 $\iff A, B$ 的正负特征值个数均相同.

定义. 设 $f = x^T Ax$ 是二次型.

- (1) 若对任意 $x \neq 0$, 都有 $f(x) > 0$, 则称 f 为**正定二次型**, 并称实对称阵 A 为**正定矩阵**, 也记作 $A > 0$.
- (2) 若对任意 x , 都有 $f(x) \geq 0$, 则称 f 为**半正定二次型**, 并称实对称阵 A 为**半正定矩阵**, 也记作 $A \geq 0$.
- (3) 若 $-f$ (半) 正定, 则称 f 为**(半) 负定二次型**, 并称实对称阵 A 为**(半) 负定矩阵**, 也记作 $A < 0$ ($A \leq 0$).
- (4) 除此之外, 称 f **不定**.

对于一般的 $m \times n$ 实矩阵 A , 我们有**奇异值分解**

$$A = U_{m \times m} \Sigma_{m \times n} V_{n \times n}^T,$$

其中 U, V 分别是 m, n 阶正交阵, Σ 是 $m \times n$ 型对角阵, 对角元非负且按降序排列.

首先对 $A^T A$ 这一半正定对称阵做正交合同对角化

$$A^T A = V^T \Lambda V, \quad V = (v_1, \dots, v_n), \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0.$$

奇异值是指 $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$. 令 $\Sigma \in M_{m \times n}$ 为对角阵, 对角元为 $\sigma_1, \dots, \sigma_n$.

对于 $1 \leq j \leq r = R(A)$, 令 $u_j = \frac{1}{\sigma_j} A v_j$, 设 u_{r+1}, \dots, u_m 是 $A^T x = 0$ 的一组标准正交基础解系, 则 $U = (u_1, \dots, u_m)$ 是正交阵, 且 $A = U \Sigma V^T$.

