线性代数

张神星 (合肥工业大学)

办公室: 翡翠科教楼 *B1810* 东

Email: zhangshenxing@hfut.edu.cn

课件地址: https://faculty.hfut.edu.cn/zhangshenxing

001 班 (交通工、新能源) 课程信息

- 课时: 共 10 周 40 课时, 从 2026-03-03 到 2026-05-07
- 期末考试在课程结束后两周左右

001 班 QQ 群: **1054817276**
入群答案 **1400071B**

教材: 高等教育出版社
唐烁, 朱士信《线性代数》

003 班 (会计、信管) 课程信息

- 课时: 共 10 周 40 课时, 从 2026-03-03 到 2026-05-07
- 期末考试在课程结束后两周左右

003 班 QQ 群: **1078900814**
入群答案 **1400071B**

教材: 高等教育出版社
唐烁, 朱士信《线性代数》

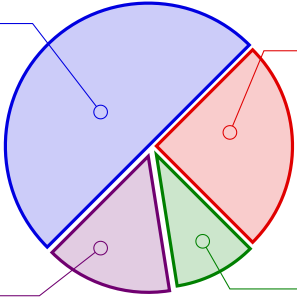
成绩构成

期末考试 50 分

期末卷面需要达到 45 分才计算总评分数，45 分以下直接不及格.

课堂测验 25 分

课堂测验共 3 次，取最高的两次平均. 测验范围和时间会提前通知. **测验时在教室内作答，否则按未考处理**.



作业 15 分

作业为配套练习册，通过超星提交，约两周交一次. **作业必须按时提交，不允许补交**.

其它 10 分

完成超星各个章节的任务点和主观研讨题.

线性代数是一门利用代数方法研究线性方程、线性空间、线性变换等线性结构的课程.

线性代数是一门利用代数方法研究线性方程、线性空间、线性变换等线性结构的课程.

线性代数通过从具体的、几何化的观念出发, 抽象出一套代数化的方法, 从而避免了高维情形缺乏几何直观的问题.

线性代数是一门利用代数方法研究线性方程、线性空间、线性变换等线性结构的课程.

线性代数通过从具体的、几何化的观念出发, 抽象出一套代数化的方法, 从而避免了高维情形缺乏几何直观的问题. 如同微积分中“以直代曲”思想引出导数、切线、积分等一系列概念, 线性代数利用“以直代曲”思想将许多非线性问题的处理转化为线性问题, 非线性模型近似为线性模型等.

线性代数是一门利用**代数方法**研究**线性方程、线性空间、线性变换**等线性结构的课程.

线性代数通过从具体的、几何化的观念出发, 抽象出一套代数化的方法, 从而避免了高维情形缺乏几何直观的问题. 如同微积分中“以直代曲”思想引出导数、切线、积分等一系列概念, 线性代数利用“以直代曲”思想将许多非线性问题的处理转化为线性问题, 非线性模型近似为线性模型等.

这些内容在统计学、密码学、运筹学、物理学、工程学、管理学、信息学、计算机科学等很多领域有着广泛的应用.

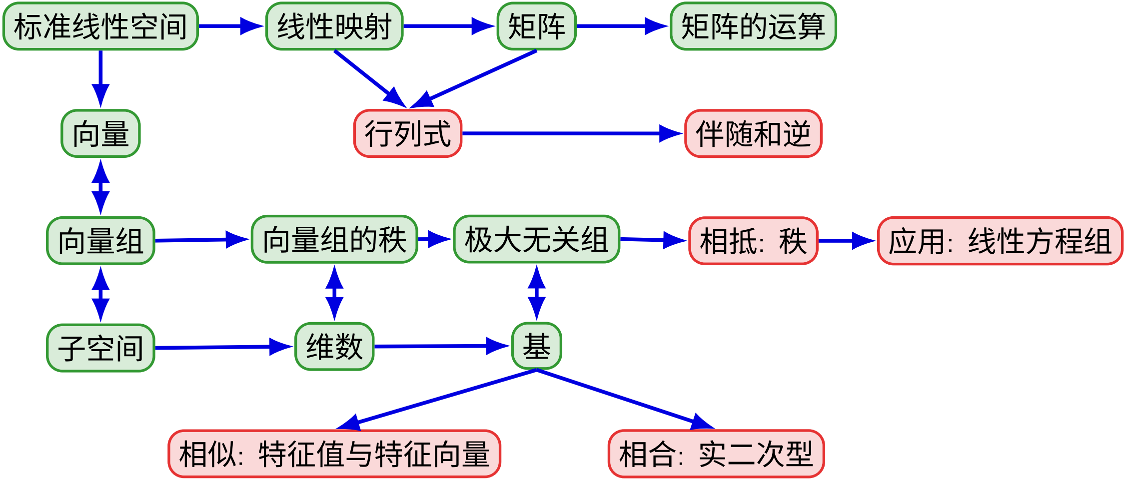
线性代数的意义

线性代数是一门利用代数方法研究线性方程、线性空间、线性变换等线性结构的课程.

线性代数通过从具体的、几何化的观念出发, 抽象出一套代数化的方法, 从而避免了高维情形缺乏几何直观的问题. 如同微积分中“以直代曲”思想引出导数、切线、积分等一系列概念, 线性代数利用“以直代曲”思想将许多非线性问题的处理转化为线性问题, 非线性模型近似为线性模型等.

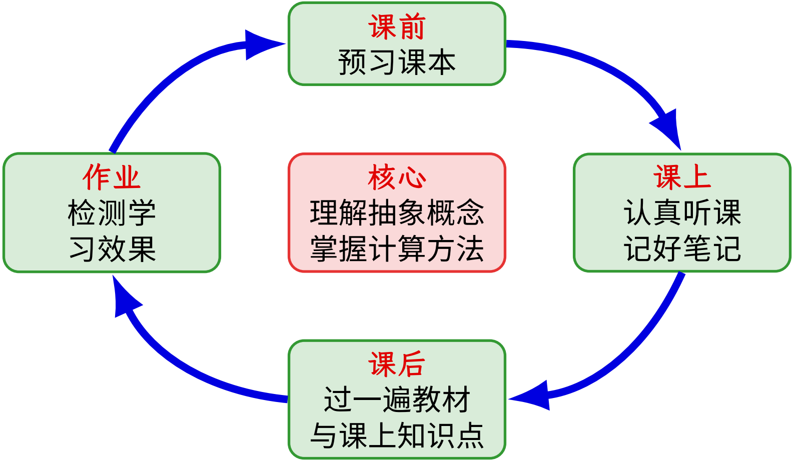
这些内容在统计学、密码学、运筹学、物理学、工程学、管理学、信息学、计算机科学等很多领域有着广泛的应用. 我们不在此处逐一列举, 在之后的授课中我们会见到它的各种应用.

课程内容关系



标准线性空间
线性映射
矩阵
矩阵的运算
向量
行列式
伴随和逆
向量组
向量组的秩
极大无关组
相抵：秩
应用：线性方程组
子空间
维数
基
相似：特征值与特征向量
相合：实二次型

课程学习方法


课前
预习课本
课上
认真听课
记好笔记
课后
过一遍教材
与课上知识点
作业
检测学
习效果
核心
理解抽象概念
掌握计算方法

第一章　向量和矩阵

1. 向量和矩阵的定义
2. 矩阵的线性运算、乘法和转置
3. 方阵的行列式
4. 逆矩阵
5. 分块矩阵
6. 矩阵的初等变换

第一节　向量和矩阵的定义

- 向量和向量空间
- 线性映射
- 矩阵

我们在高中学习过向量的概念.

我们在高中学习过向量的概念. 在平面上建立一个直角坐标系. 对于平面上的点 A, 连接 OA 的有向线段就是一个**向量**.

我们在高中学习过向量的概念. 在平面上建立一个直角坐标系. 对于平面上的点 A, 连接 OA 的有向线段就是一个**向量**. 它可以用 $\boldsymbol{u}=(x, y)$ 来表示.

我们在高中学习过向量的概念. 在平面上建立一个直角坐标系. 对于平面上的点 A, 连接 OA 的有向线段就是一个**向量**. 它可以用 $\boldsymbol{u} = (x, y)$ 来表示.

由于向量和平面上的点是一一对应的, 因此我们可以用 $\mathbb{R}^2$ 来表示平面上所有向量形成的集合.

我们在高中学习过向量的概念. 在平面上建立一个直角坐标系. 对于平面上的点 A, 连接 OA 的有向线段就是一个**向量**. 它可以用 $\boldsymbol{u}=(x,y)$ 来表示.

由于向量和平面上的点是一一对应的, 因此我们可以用 $\mathbb{R}^2$ 来表示平面上所有向量形成的集合. 在这个集合中有一个特殊的元素, 叫作**零向量**:

$$\mathbf{0}=(0,0),$$

我们在高中学习过向量的概念. 在平面上建立一个直角坐标系. 对于平面上的点 A, 连接 OA 的有向线段就是一个**向量**. 它可以用 $\boldsymbol{u}=(x,y)$ 来表示.

由于向量和平面上的点是一一对应的, 因此我们可以用 $\mathbb{R}^2$ 来表示平面上所有向量形成的集合. 在这个集合中有一个特殊的元素, 叫作**零向量**:

$$\mathbf{0}=(0,0),$$

而且我们可以定义加法和数乘:

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2),\quad \lambda(x,y)=(\lambda x,\lambda y),\lambda\in\mathbb{R}.$$

我们在高中学习过向量的概念. 在平面上建立一个直角坐标系. 对于平面上的点 A, 连接 OA 的有向线段就是一个**向量**. 它可以用 $\boldsymbol{u}=(x,y)$ 来表示.

由于向量和平面上的点是一一对应的, 因此我们可以用 $\mathbb{R}^2$ 来表示平面上所有向量形成的集合. 在这个集合中有一个特殊的元素, 叫作**零向量**:

$$\mathbf{0}=(0,0),$$

而且我们可以定义加法和数乘:

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2),\quad \lambda(x,y)=(\lambda x,\lambda y),\lambda\in\mathbb{R}.$$

类似地, 立体空间中的所有向量形成集合 $\mathbb{R}^3$.

我们在高中学习过向量的概念. 在平面上建立一个直角坐标系. 对于平面上的点 A, 连接 OA 的有向线段就是一个**向量**. 它可以用 $\boldsymbol{u} = (x, y)$ 来表示.

由于向量和平面上的点是一一对应的, 因此我们可以用 $\mathbb{R}^2$ 来表示平面上所有向量形成的集合. 在这个集合中有一个特殊的元素, 叫作**零向量**:

$$\mathbf{0} = (0, 0),$$

而且我们可以定义加法和数乘:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y), \lambda \in \mathbb{R}.$$

类似地, 立体空间中的所有向量形成集合 $\mathbb{R}^3$. 在这个集合中也有零向量、加法和数乘.

我们总使用粗小写字母 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \ldots$ 表示向量.

平面向量和立体向量的性质

我们总使用粗小写字母 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \ldots$ 表示向量.

$\mathbb{R}^2$ 或 $\mathbb{R}^3$ 上的零向量、加法和数乘满足:

我们总使用粗小写字母 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \ldots$ 表示向量.

$\mathbb{R}^2$ 或 $\mathbb{R}^3$ 上的零向量、加法和数乘满足:

我们总使用粗小写字母 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \ldots$ 表示向量.

$\mathbb{R}^2$ 或 $\mathbb{R}^3$ 上的零向量、加法和数乘满足:

(V1) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$;

我们总使用粗小写字母 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \ldots$ 表示向量.

$\mathbb{R}^2$ 或 $\mathbb{R}^3$ 上的零向量、加法和数乘满足:

(V1) $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}$;

(V2) $\boldsymbol{\alpha} + (\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma}) = (\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\gamma}$;

我们总使用粗小写字母 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \ldots$ 表示向量.

$\mathbb{R}^2$ 或 $\mathbb{R}^3$ 上的零向量、加法和数乘满足:

(V1) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$;

(V2) $\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}$;

(V3) $\mathbf{0}+\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$;

我们总使用粗小写字母 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \ldots$ 表示向量.

$\mathbb{R}^2$ 或 $\mathbb{R}^3$ 上的零向量、加法和数乘满足:

(V1) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$;

(V2) $\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}$;

(V3) $\mathbf{0}+\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$;

(V4) 对任意 $\boldsymbol{\alpha}$, 存在 $\boldsymbol{\beta}$ 使得 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$. 称 $\boldsymbol{\beta}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的**负向量**;

我们总使用粗小写字母 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \ldots$ 表示向量.

$\mathbb{R}^2$ 或 $\mathbb{R}^3$ 上的零向量、加法和数乘满足:

(V1) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$;

(V2) $\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}$;

(V3) $\mathbf{0}+\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$;

(V4) 对任意 $\boldsymbol{\alpha}$, 存在 $\boldsymbol{\beta}$ 使得 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$. 称 $\boldsymbol{\beta}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的**负向量**;

(V5) $(\lambda\mu)\boldsymbol{\alpha}=\lambda(\mu\boldsymbol{\alpha})$;

我们总使用粗小写字母 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \ldots$ 表示向量.

$\mathbb{R}^2$ 或 $\mathbb{R}^3$ 上的零向量、加法和数乘满足:

(V1) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$;

(V2) $\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}$;

(V3) $\mathbf{0}+\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$;

(V4) 对任意 $\boldsymbol{\alpha}$, 存在 $\boldsymbol{\beta}$ 使得 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$. 称 $\boldsymbol{\beta}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的**负向量**;

(V5) $(\lambda\mu)\boldsymbol{\alpha}=\lambda(\mu\boldsymbol{\alpha})$;

(V6) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\alpha}$;

平面向量和立体向量的性质

我们总使用粗小写字母 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \ldots$ 表示向量.

$\mathbb{R}^2$ 或 $\mathbb{R}^3$ 上的零向量、加法和数乘满足:

(V1) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$;

(V2) $\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}$;

(V3) $\mathbf{0}+\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$;

(V4) 对任意 $\boldsymbol{\alpha}$, 存在 $\boldsymbol{\beta}$ 使得 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$. 称 $\boldsymbol{\beta}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的**负向量**;

(V5) $(\lambda\mu)\boldsymbol{\alpha}=\lambda(\mu\boldsymbol{\alpha})$;

(V6) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\alpha}$;

(V7) $\lambda(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\lambda\boldsymbol{\beta}$;

我们总使用粗小写字母 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \ldots$ 表示向量.

$\mathbb{R}^2$ 或 $\mathbb{R}^3$ 上的零向量、加法和数乘满足:

(V1) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$;

(V2) $\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}$;

(V3) $\mathbf{0}+\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$;

(V4) 对任意 $\boldsymbol{\alpha}$, 存在 $\boldsymbol{\beta}$ 使得 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$. 称 $\boldsymbol{\beta}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的**负向量**;

(V5) $(\lambda\mu)\boldsymbol{\alpha}=\lambda(\mu\boldsymbol{\alpha})$;

(V6) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\alpha}$;

(V7) $\lambda(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\lambda\boldsymbol{\beta}$;

(V8) $1\cdot\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$.

将上述概念稍作推广，我们可以得到具有 n 个**分量**的向量

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

称为 n 维**行向量**.

将上述概念稍作推广, 我们可以得到具有 n 个**分量**的向量

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

称为 n 维**行向量**. 出于后续描述的统一性, 我们将向量的分量写成一列而不是一行, 从而得到 n 维**列向量**:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

将上述概念稍作推广，我们可以得到具有 n 个**分量**的向量

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

称为 n 维**行向量**. 出于后续描述的统一性，我们将向量的分量写成一列而不是一行，从而得到 n 维**列向量**:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

之后凡是提到向量，均是指列向量.

将上述概念稍作推广, 我们可以得到具有 n 个分量的向量

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

称为 n 维行向量. 出于后续描述的统一性, 我们将向量的分量写成一列而不是一行, 从而得到 n 维列向量:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

之后凡是提到向量, 均是指列向量. 为了书写方便, 也可以把列向量写成

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^{\mathrm{T}}.$$

其中 T 表示转置(Transpose), 它是将行列关系对换的一种操作.

将全体 n 维列向量记为 $\mathbb{R}^n$.

将全体 n 维列向量记为 $\mathbb{R}^n$. 在这个集合中可类似定义零向量、加法和数乘:

将全体 n 维列向量记为 $\mathbb{R}^n$. 在这个集合中可类似定义零向量、加法和数乘:

(1) $\mathbf{0}=(0,\dots,0)^{\mathrm{T}}$;

标准向量空间

将全体 n 维列向量记为 $\mathbb{R}^n$. 在这个集合中可类似定义零向量、加法和数乘:

(1) $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}$;

(2) $(a_1, \ldots, a_n)^{\mathrm{T}} + (b_1, \ldots, b_n)^{\mathrm{T}} = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)^{\mathrm{T}}$;

标准向量空间

将全体 n 维列向量记为 $\mathbb{R}^n$. 在这个集合中可类似定义零向量、加法和数乘:

(1) $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}$;

(2) $(a_1, \ldots, a_n)^{\mathrm{T}} + (b_1, \ldots, b_n)^{\mathrm{T}} = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)^{\mathrm{T}}$;

(3) $\lambda(a_1, \ldots, a_n)^{\mathrm{T}} = (\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n)^{\mathrm{T}}, \lambda \in \mathbb{R}$.

将全体 n 维列向量记为 $\mathbb{R}^n$. 在这个集合中可类似定义零向量、加法和数乘:

(1) $\mathbf{0}=(0,\dots,0)^{\mathrm{T}}$;

(2) $(a_1,\dots,a_n)^{\mathrm{T}}+(b_1,\dots,b_n)^{\mathrm{T}}=(a_1+b_1,\dots,a_n+b_n)^{\mathrm{T}}$;

(3) $\lambda(a_1,\dots,a_n)^{\mathrm{T}}=(\lambda a_1,\dots,\lambda a_n)^{\mathrm{T}},\lambda\in\mathbb{R}$.

而且它们也满足(V1)–(V8).

将全体 n 维列向量记为 $\mathbb{R}^n$. 在这个集合中可类似定义零向量、加法和数乘:

(1) $\mathbf{0}=(0,\dots,0)^{\mathrm{T}}$;

(2) $(a_1,\dots,a_n)^{\mathrm{T}}+(b_1,\dots,b_n)^{\mathrm{T}}=(a_1+b_1,\dots,a_n+b_n)^{\mathrm{T}}$;

(3) $\lambda(a_1,\dots,a_n)^{\mathrm{T}}=(\lambda a_1,\dots,\lambda a_n)^{\mathrm{T}},\lambda\in\mathbb{R}$.

而且它们也满足(V1)–(V8).

定义. 若集合 V 带有零向量、加法和实数的数乘, 且满足(V1)–(V8), 则称 V 是一个**实线性空间**.

将全体 n 维列向量记为 $\mathbb{R}^n$. 在这个集合中可类似定义零向量、加法和数乘:

(1) $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}$;
(2) $(a_1, \ldots, a_n)^{\mathrm{T}} + (b_1, \ldots, b_n)^{\mathrm{T}} = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)^{\mathrm{T}}$;
(3) $\lambda(a_1, \ldots, a_n)^{\mathrm{T}} = (\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n)^{\mathrm{T}}, \lambda \in \mathbb{R}$.

而且它们也满足(V1)–(V8).

定义. 若集合 V 带有零向量、加法和实数的数乘, 且满足(V1)–(V8), 则称 V 是一个**实线性空间**.

这样, $\mathbb{R}^n$ 成为了一个实线性空间.

例.

例.

(1) 平面上经过原点的直线 $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = 0\}$ 是实线性空间.

例.

(1) 平面上经过原点的直线 $V=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid ax+by=0\}$ 是实线性空间.

(2) $\mathbb{R}^3$ 中经过原点的平面 $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz=0\}$ 是实线性空间.

例.

(1) 平面上经过原点的直线 $V=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid ax+by=0\}$ 是实线性空间.

(2) $\mathbb{R}^3$ 中经过原点的平面 $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz=0\}$ 是实线性空间.

(3) 如果 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的子集, 且它和继承自 $\mathbb{R}^n$ 的零向量、加法和数乘构成线性空间, 则称 V 是**向量空间**.

例.

(1) 平面上经过原点的直线 $V=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid ax+by=0\}$ 是实线性空间.

(2) $\mathbb{R}^3$ 中经过原点的平面 $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz=0\}$ 是实线性空间.

(3) 如果 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的子集, 且它和继承自 $\mathbb{R}^n$ 的零向量、加法和数乘构成线性空间, 则称 V 是**向量空间**.

(4) $\mathbb{R}^3$ 中**不经过原点**的平面 $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz=1\}$ 是不是实线性空间.

例.

(1) 平面上经过原点的直线 $V=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid ax+by=0\}$ 是实线性空间.

(2) $\mathbb{R}^3$ 中经过原点的平面 $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz=0\}$ 是实线性空间.

(3) 如果 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的子集, 且它和继承自 $\mathbb{R}^n$ 的零向量、加法和数乘构成线性空间, 则称 V 是**向量空间**.

(4) $\mathbb{R}^3$ 中**不经过原点**的平面 $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz=1\}$ 是不是实线性空间.

(5) 实系数多项式全体 $\mathbb{R}[x]$ 是实线性空间, 其中的零向量是指零多项式.

例.

(1) 平面上经过原点的直线 $V=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid ax+by=0\}$ 是实线性空间.

(2) $\mathbb{R}^3$ 中经过原点的平面 $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid ax+by+cz=0\}$ 是实线性空间.

(3) 如果 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的子集, 且它和继承自 $\mathbb{R}^n$ 的零向量、加法和数乘构成线性空间, 则称 V 是**向量空间**.

(4) $\mathbb{R}^3$ 中**不经过原点**的平面 $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid ax+by+cz=1\}$ 是不是实线性空间.

(5) 实系数多项式全体 $\mathbb{R}[x]$ 是实线性空间, 其中的零向量是指零多项式.

(6) 次数不超过 n 的多项式 (含零多项式) 全体是实线性空间.

例.

(1) 平面上经过原点的直线 $V=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid ax+by=0\}$ 是实线性空间.

(2) $\mathbb{R}^3$ 中经过原点的平面 $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz=0\}$ 是实线性空间.

(3) 如果 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的子集, 且它和继承自 $\mathbb{R}^n$ 的零向量、加法和数乘构成线性空间, 则称 V 是**向量空间**.

(4) $\mathbb{R}^3$ 中**不经过原点**的平面 $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz=1\}$ 是不是实线性空间.

(5) 实系数多项式全体 $\mathbb{R}[x]$ 是实线性空间, 其中的零向量是指零多项式.

(6) 次数不超过 n 的多项式 (含零多项式) 全体是实线性空间.

若数乘的系数是复数而不是实数, 称 V 为**复线性空间**.

例.

(1) 平面上经过原点的直线 $V=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid ax+by=0\}$ 是实线性空间.

(2) $\mathbb{R}^3$ 中经过原点的平面 $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz=0\}$ 是实线性空间.

(3) 如果 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的子集, 且它和继承自 $\mathbb{R}^n$ 的零向量、加法和数乘构成线性空间, 则称 V 是**向量空间**.

(4) $\mathbb{R}^3$ 中**不经过原点**的平面 $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz=1\}$ 是不是实线性空间.

(5) 实系数多项式全体 $\mathbb{R}[x]$ 是实线性空间, 其中的零向量是指零多项式.

(6) 次数不超过 n 的多项式 (含零多项式) 全体是实线性空间.

若数乘的系数是复数而不是实数, 称 V 为**复线性空间**. 我们可以类似地定义复向量, 且 n 维复向量全体形成一个复线性空间 $\mathbb{C}^n$.

考虑如下映射

$$\mathcal{A}:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

考虑如下映射

$$\mathcal{A}:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

不难验证，对任意 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$,

考虑如下映射

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}:\mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m\\
\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\\ \vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

不难验证，对任意 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n,\lambda\in\mathbb{R}$,

考虑如下映射

$$\mathcal{A}:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

不难验证, 对任意 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$,

(L1) $\mathcal{A}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{u}) + \mathcal{A}(\boldsymbol{v})$;

考虑如下映射

$$\mathcal{A}:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

不难验证，对任意 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$,

(L1) $\mathcal{A}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{u}) + \mathcal{A}(\boldsymbol{v})$;

(L2) $\mathcal{A}(\lambda\boldsymbol{u}) = \lambda\mathcal{A}(\boldsymbol{u})$.

定义. 若映射 $\mathcal{A}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 满足(L1),(L2), 称 $\mathcal{A}$ 是一个**线性变换**或**线性映射**.

定义. 若映射 $\mathcal{A}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 满足(L1),(L2), 称 $\mathcal{A}$ 是一个**线性变换**或**线性映射**.

反过来, 是不是所有的线性变换 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 都可以表达为前述形式呢?

定义. 若映射 $\mathcal{A}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 满足(L1),(L2), 称 $\mathcal{A}$ 是一个**线性变换**或**线性映射**.

反过来, 是不是所有的线性变换 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 都可以表达为前述形式呢?

以线性映射 $\mathcal{A}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ 为例,

定义. 若映射 $\mathcal{A}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 满足(L1),(L2), 称 $\mathcal{A}$ 是一个**线性变换**或**线性映射**.

反过来, 是不是所有的线性变换 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 都可以表达为前述形式呢?

以线性映射 $\mathcal{A}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ 为例, 记

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\\a_{41}\end{pmatrix},\qquad \mathcal{A}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\a_{32}\\a_{42}\end{pmatrix},\qquad \mathcal{A}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{13}\\a_{23}\\a_{33}\\a_{43}\end{pmatrix}.$$

根据线性变换的性质,

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathcal{A}\left(x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

根据线性变换的性质,

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\mathcal{A}\left(x_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=x_1\mathcal{A}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+x_2\mathcal{A}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+x_3\mathcal{A}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

.

根据线性变换的性质,

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\mathcal{A}\left(x_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=x_1\mathcal{A}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+x_2\mathcal{A}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+x_3\mathcal{A}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$=x_1\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\\a_{41}\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\a_{32}\\a_{42}\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}a_{13}\\a_{23}\\a_{33}\\a_{43}\end{pmatrix}.$$

根据线性变换的性质,

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\mathcal{A}\left(x_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=x_1\mathcal{A}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+x_2\mathcal{A}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+x_3\mathcal{A}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$=x_1\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\\a_{41}\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\a_{32}\\a_{42}\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}a_{13}\\a_{23}\\a_{33}\\a_{43}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3\\a_{41}x_1+a_{42}x_2+a_{43}x_3\end{pmatrix}.$$

根据线性变换的性质,

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\mathcal{A}\left(x_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=x_1\mathcal{A}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+x_2\mathcal{A}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+x_3\mathcal{A}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$=x_1\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\\a_{41}\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\a_{32}\\a_{42}\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}a_{13}\\a_{23}\\a_{33}\\a_{43}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3\\a_{41}x_1+a_{42}x_2+a_{43}x_3\end{pmatrix}.$$

因此每个线性变换 $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ 都具有前述形式,

根据线性变换的性质,

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\mathcal{A}\left(x_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=x_1\mathcal{A}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+x_2\mathcal{A}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+x_3\mathcal{A}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$=x_1\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\\a_{41}\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\a_{32}\\a_{42}\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}a_{13}\\a_{23}\\a_{33}\\a_{43}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3\\a_{41}x_1+a_{42}x_2+a_{43}x_3\end{pmatrix}.$$

因此每个线性变换 $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ 都具有前述形式, 它完全由 4×3 个系数

$$(a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant 4,1\leqslant j\leqslant 3}$$

所确定.

根据线性变换的性质，

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathcal{A}\left(x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = x_1 \mathcal{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \mathcal{A}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \mathcal{A}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{42} \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ a_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 \end{pmatrix}.$$

因此每个线性变换 $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ 都具有前述形式，它完全由 4×3 个系数

$$(a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant 4, 1\leqslant j\leqslant 3}$$

所确定．由此引出矩阵的定义．

矩阵的定义

定义. 将 mn 个数按照每行 n 个元素，每列 m 个元素，排成的数表称为 **m 行 n 列矩阵**，或简称为 **$m \times n$ 矩阵**：

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n},$$

其中 a_{ij} 表示 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行 j 列元素，并记 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$.

定义. 将 mn 个数按照每行 n 个元素，每列 m 个元素，排成的数表称为 m 行 n 列矩阵，或简称为 $m \times n$ 矩阵：

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n},$$

其中 a_{ij} 表示 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行 j 列元素，并记 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$.

我们总使用粗大写字母 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{\Lambda}, \ldots$ 表示矩阵.

定义. 将 mn 个数按照每行 n 个元素，每列 m 个元素，排成的数表称为 m 行 n 列矩阵，或简称为 $m \times n$ 矩阵：

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n},$$

其中 a_{ij} 表示 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行 j 列元素，并记 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$.

我们总使用粗大写字母 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{\Lambda}, \ldots$ 表示矩阵. 不强调矩阵的阶时，也可省略右下角 $m \times n$.

定义. 将 mn 个数按照每行 n 个元素，每列 m 个元素，排成的数表称为 m 行 n 列矩阵，或简称为 $m \times n$ 矩阵：

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n},$$

其中 a_{ij} 表示 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行 j 列元素，并记 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m \times n}$.

我们总使用粗大写字母 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{\Lambda}, \ldots$ 表示矩阵. 不强调矩阵的阶时，也可省略右下角 $m \times n$.

矩阵的圆括号也可用方括号来代替.

例：矩阵

例.

例.

(1) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (i-j)_{4\times 4}.$

例.

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & -1 & -2 & -3\\ 1 & 0 & -1 & -2\\ 2 & 1 & 0 & -1\\ 3 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix}=(i-j)_{4\times 4}.$

(2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 2 & \cdots & n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 2^{n-1} & 3^{n-1} & n^{n-1}\end{pmatrix}_n=(j^{i-1})_n.$

例.

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & -1 & -2 & -3\\ 1 & 0 & -1 & -2\\ 2 & 1 & 0 & -1\\ 3 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix}=(i-j)_{4\times 4}.$

(2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 2 & \cdots & n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 2^{n-1} & 3^{n-1} & n^{n-1}\end{pmatrix}_n=(j^{i-1})_n.$ $m=n$ 时可用 n 来表示右下角的 $n\times n$.

线性映射与矩阵一一对应

非考试内容

线性映射与矩阵一一对应

- 令 $M_{m\times n}$ 表示 m 行 n 列的矩阵 (Matrix) 全体.

- 令 $M_{m\times n}$ 表示 m 行 n 列的矩阵 (Matrix) 全体.
- 若 $m=n$, 称相应矩阵为 n **阶方阵**, 并用 M_n 来表示 n 阶方阵全体.

线性映射与矩阵一一对应

- 令 $M_{m\times n}$ 表示 m 行 n 列的矩阵 (Matrix) 全体.
- 若 $m=n$, 称相应矩阵为 n **阶方阵**, 并用 M_n 来表示 n 阶方阵全体.
- 若要强调矩阵元素都是实数, 我们称相应的矩阵为**实矩阵**, 并用 $M_{m\times n}(\mathbb{R}), M_n(\mathbb{R})$ 来表示相应集合.

线性映射与矩阵一一对应

- 令 $M_{m\times n}$ 表示 m 行 n 列的矩阵 (Matrix) 全体.
- 若 $m=n$, 称相应矩阵为 n **阶方阵**, 并用 M_n 来表示 n 阶方阵全体.
- 若要强调矩阵元素都是实数, 我们称相应的矩阵为**实矩阵**, 并用 $M_{m\times n}(\mathbb{R}), M_n(\mathbb{R})$ 来表示相应集合.
- 全体线性变换 $\mathcal{A}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 和 $\boldsymbol{A}\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ 是一一对应的.

线性映射与矩阵一一对应

- 令 $M_{m\times n}$ 表示 m 行 n 列的矩阵 (Matrix) 全体.
- 若 $m=n$, 称相应矩阵为 n **阶方阵**, 并用 M_n 来表示 n 阶方阵全体.
- 若要强调矩阵元素都是实数, 我们称相应的矩阵为**实矩阵**, 并用 $M_{m\times n}(\mathbb{R}), M_n(\mathbb{R})$ 来表示相应集合.
- 全体线性变换 $\mathcal{A}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 和 $\boldsymbol{A}\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ 是一一对应的.

类似可定义**复矩阵**, $M_{m\times n}(\mathbb{C})$, $M_n(\mathbb{C})$, 且全体线性变换 $\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^m$ 和 $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ 一一对应.

- 令 $M_{m\times n}$ 表示 m 行 n 列的矩阵 (Matrix) 全体.
- 若 $m=n$, 称相应矩阵为 n **阶方阵**, 并用 M_n 来表示 n 阶方阵全体.
- 若要强调矩阵元素都是实数, 我们称相应的矩阵为**实矩阵**, 并用 $M_{m\times n}(\mathbb{R}), M_n(\mathbb{R})$ 来表示相应集合.
- 全体线性变换 $\mathcal{A}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 和 $\boldsymbol{A}\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ 是一一对应的.

类似可定义**复矩阵**, $M_{m\times n}(\mathbb{C})$, $M_n(\mathbb{C})$, 且全体线性变换 $\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^m$ 和 $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ 一一对应. 之后此种类比不再赘述.

- 令 $M_{m\times n}$ 表示 m 行 n 列的矩阵 (Matrix) 全体.
- 若 $m=n$, 称相应矩阵为 n **阶方阵**, 并用 M_n 来表示 n 阶方阵全体.
- 若要强调矩阵元素都是实数, 我们称相应的矩阵为**实矩阵**, 并用 $M_{m\times n}(\mathbb{R}), M_n(\mathbb{R})$ 来表示相应集合.
- 全体线性变换 $\mathcal{A}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 和 $\boldsymbol{A}\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ 是一一对应的.

类似可定义**复矩阵**, $M_{m\times n}(\mathbb{C})$, $M_n(\mathbb{C})$, 且全体线性变换 $\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^m$ 和 $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ 一一对应. 之后此种类比不再赘述.

- 称方阵的对角线上的元素 $a_{11},\dots,a_{nn}$ 为方阵的**对角元**.

特殊矩阵

元素全为零的矩阵为**零矩阵** $\boldsymbol{O} = \boldsymbol{O}_{m\times n} \in M_{m\times n}$.

元素全为零的矩阵为零矩阵 $\boldsymbol{O} = \boldsymbol{O}_{m\times n} \in M_{m\times n}$. 方阵中

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \in M_n$$

分别为上三角阵, 下三角阵和对角阵 (空白部分表示元素都是零).

特殊矩阵

元素全为零的矩阵为零矩阵 $\boldsymbol{O} = \boldsymbol{O}_{m\times n} \in M_{m\times n}$. 方阵中

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \in M_n$$

分别为上三角阵, 下三角阵和对角阵 (空白部分表示元素都是零). 为书写方便, 对角阵也可记作 (对角: diagonal)

$$\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

元素全为零的矩阵为零矩阵 $\boldsymbol{O} = \boldsymbol{O}_{m\times n} \in M_{m\times n}$. 方阵中

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \in M_n$$

分别为上三角阵, 下三角阵和对角阵 (空白部分表示元素都是零). 为书写方便, 对角阵也可记作 (对角: diagonal)

$$\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

称方阵

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_n = \mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1) \in M_n$$

为单位阵.

将只有一行的矩阵

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in M_{1\times n}$$

称为 n 维**行矩阵**.

将只有一行的矩阵

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in M_{1\times n}$$

称为 n 维**行矩阵**. 只有一列的矩阵

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in M_{n\times 1}$$

称为 n 维**列矩阵**.

将只有一行的矩阵

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in M_{1\times n}$$

称为 n 维**行矩阵**. 只有一列的矩阵

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in M_{n\times 1}$$

称为 n 维**列矩阵**.

我们将在后面定义矩阵的加法和数乘, 它与将行 (列) 矩阵看作行 (列) 向量的加法和数乘是相同的.

将只有一行的矩阵

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in M_{1\times n}$$

称为 n 维行矩阵. 只有一列的矩阵

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in M_{n\times 1}$$

称为 n 维列矩阵.

我们将在后面定义矩阵的加法和数乘, 它与将行 (列) 矩阵看作行 (列) 向量的加法和数乘是相同的. 于是可将行 (列) 矩阵和对应的行 (列) 向量视为同一对象.

例：旋转变换

如何用矩阵表示平面 $\mathbb{R}^2$ 上的旋转?

如何用矩阵表示平面 $\mathbb{R}^2$ 上的旋转？设 $A(x_1, x_2)$ 是平面上的一个点，沿着原点逆时针旋转角度 θ 变成 $B(y_1, y_2)$.

例：旋转变换

如何用矩阵表示平面 $\mathbb{R}^2$ 上的旋转？设 $A(x_1, x_2)$ 是平面上的一个点，沿着原点逆时针旋转角度 θ 变成 $B(y_1, y_2)$. 利用极坐标将 A 表示为

$$\begin{cases} x_1 = \rho\cos\alpha, \\ x_2 = \rho\sin\alpha, \end{cases}$$

例：旋转变换

如何用矩阵表示平面 $\mathbb{R}^2$ 上的旋转？设 $A(x_1, x_2)$ 是平面上的一个点，沿着原点逆时针旋转角度 θ 变成 $B(y_1, y_2)$. 利用极坐标将 A 表示为

$$\begin{cases} x_1 = \rho\cos\alpha, \\ x_2 = \rho\sin\alpha, \end{cases}$$

则

$$\begin{cases} y_1 = \rho\cos(\alpha+\theta) = \rho(\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta) = (\cos\theta)x_1 - (\sin\theta)x_2, \\ y_2 = \rho\sin(\alpha+\theta) = \rho(\cos\alpha\sin\theta + \sin\alpha\cos\theta) = (\sin\theta)x_1 + (\cos\theta)x_2. \end{cases}$$

例：旋转变换

如何用矩阵表示平面 $\mathbb{R}^2$ 上的旋转？设 $A(x_1, x_2)$ 是平面上的一个点，沿着原点逆时针旋转角度 θ 变成 $B(y_1, y_2)$. 利用极坐标将 A 表示为

$$\begin{cases} x_1 = \rho\cos\alpha, \\ x_2 = \rho\sin\alpha, \end{cases}$$

则

$$\begin{cases} y_1 = \rho\cos(\alpha+\theta) = \rho(\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta) = (\cos\theta)x_1 - (\sin\theta)x_2, \\ y_2 = \rho\sin(\alpha+\theta) = \rho(\cos\alpha\sin\theta + \sin\alpha\cos\theta) = (\sin\theta)x_1 + (\cos\theta)x_2. \end{cases}$$

因此上述旋转变换 $\mathcal{R}_\theta$ 对应的矩阵为

$$\boldsymbol{R}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

例：线性变换

- $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 表示各个分量分别放大为 λ_i 倍的线性变换.

例：线性变换

- $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 表示各个分量分别放大为 λ_i 倍的线性变换.
- $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 表示平面中沿着直线 $x_1 = x_2$ 翻转.

例：线性变换

- $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 表示各个分量分别放大为 λ_i 倍的线性变换.
- $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 表示平面中沿着直线 $x_1 = x_2$ 翻转.
- $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 表示三维空间中沿着直线 $x_1 = x_2 = x_3$ 旋转 $\dfrac{2\pi}{3}$.

例：线性变换

- $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 表示各个分量分别放大为 λ_i 倍的线性变换.
- $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 表示平面中沿着直线 $x_1 = x_2$ 翻转.
- $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 表示三维空间中沿着直线 $x_1 = x_2 = x_3$ 旋转 $\dfrac{2\pi}{3}$.
- 想一想: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 表示什么线性变换?

第二节　矩阵的线性运算、乘法和转置

- 矩阵的线性运算
- 矩阵的乘法
- 矩阵的幂
- 矩阵的转置

线性映射的加法和数乘

给定线性变换 $\mathcal{A}, \mathcal{B}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 和数 $\lambda \in \mathbb{R}$,

线性映射的加法和数乘

给定线性变换 $\mathcal{A},\mathcal{B}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 和数 $\lambda\in\mathbb{R}$, 定义

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\boldsymbol{x})=\mathcal{A}(\boldsymbol{x})+\mathcal{B}(\boldsymbol{x}),\qquad (\lambda f)(\boldsymbol{x})=\lambda(\mathcal{A}(\boldsymbol{x})).$$

给定线性变换 $\mathcal{A}, \mathcal{B} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 和数 $\lambda \in \mathbb{R}$, 定义

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\boldsymbol{x}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) + \mathcal{B}(\boldsymbol{x}), \qquad (\lambda f)(\boldsymbol{x}) = \lambda(\mathcal{A}(\boldsymbol{x})).$$

对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\boldsymbol{x}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) + \mathcal{B}(\boldsymbol{x}) \xlongequal{\text{(V1)}} \mathcal{B}(\boldsymbol{x}) + \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = (\mathcal{B}+\mathcal{A})(\boldsymbol{x}).$$

线性映射的加法和数乘

给定线性变换 $\mathcal{A}, \mathcal{B} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 和数 $\lambda \in \mathbb{R}$, 定义

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\boldsymbol{x}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) + \mathcal{B}(\boldsymbol{x}), \qquad (\lambda f)(\boldsymbol{x}) = \lambda(\mathcal{A}(\boldsymbol{x})).$$

对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\boldsymbol{x}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) + \mathcal{B}(\boldsymbol{x}) \xlongequal{\text{(V1)}} \mathcal{B}(\boldsymbol{x}) + \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = (\mathcal{B}+\mathcal{A})(\boldsymbol{x}).$$

故 (1) $\mathcal{A}+\mathcal{B} = \mathcal{B}+\mathcal{A}$.

给定线性变换 $\mathcal{A}, \mathcal{B} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 和数 $\lambda \in \mathbb{R}$, 定义

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\boldsymbol{x}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) + \mathcal{B}(\boldsymbol{x}), \qquad (\lambda f)(\boldsymbol{x}) = \lambda(\mathcal{A}(\boldsymbol{x})).$$

对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\boldsymbol{x}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) + \mathcal{B}(\boldsymbol{x}) \xlongequal{\text{(V1)}} \mathcal{B}(\boldsymbol{x}) + \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = (\mathcal{B}+\mathcal{A})(\boldsymbol{x}).$$

故 (1) $\mathcal{A}+\mathcal{B} = \mathcal{B}+\mathcal{A}$. 同理

给定线性变换 $\mathcal{A},\mathcal{B}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 和数 $\lambda\in\mathbb{R}$, 定义

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\boldsymbol{x})=\mathcal{A}(\boldsymbol{x})+\mathcal{B}(\boldsymbol{x}),\qquad (\lambda f)(\boldsymbol{x})=\lambda(\mathcal{A}(\boldsymbol{x})).$$

对任意 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$,

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\boldsymbol{x})=\mathcal{A}(\boldsymbol{x})+\mathcal{B}(\boldsymbol{x})\overset{\text{(V1)}}{=\!=\!=}\mathcal{B}(\boldsymbol{x})+\mathcal{A}(\boldsymbol{x})=(\mathcal{B}+\mathcal{A})(\boldsymbol{x}).$$

故 (1) $\mathcal{A}+\mathcal{B}=\mathcal{B}+\mathcal{A}$. 同理

给定线性变换 $\mathcal{A}, \mathcal{B} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 和数 $\lambda \in \mathbb{R}$, 定义

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\boldsymbol{x}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) + \mathcal{B}(\boldsymbol{x}), \qquad (\lambda f)(\boldsymbol{x}) = \lambda(\mathcal{A}(\boldsymbol{x})).$$

对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\boldsymbol{x}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) + \mathcal{B}(\boldsymbol{x}) \xlongequal{\text{(V1)}} \mathcal{B}(\boldsymbol{x}) + \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = (\mathcal{B}+\mathcal{A})(\boldsymbol{x}).$$

故 (1) $\mathcal{A}+\mathcal{B} = \mathcal{B}+\mathcal{A}$. 同理

(2) $(\mathcal{A}+\mathcal{B})+\mathcal{C} = \mathcal{A}+(\mathcal{B}+\mathcal{C})$;

给定线性变换 $\mathcal{A},\mathcal{B}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 和数 $\lambda\in\mathbb{R}$, 定义

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\boldsymbol{x})=\mathcal{A}(\boldsymbol{x})+\mathcal{B}(\boldsymbol{x}),\qquad (\lambda f)(\boldsymbol{x})=\lambda(\mathcal{A}(\boldsymbol{x})).$$

对任意 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$,

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\boldsymbol{x})=\mathcal{A}(\boldsymbol{x})+\mathcal{B}(\boldsymbol{x})\xlongequal{\text{(V1)}}\mathcal{B}(\boldsymbol{x})+\mathcal{A}(\boldsymbol{x})=(\mathcal{B}+\mathcal{A})(\boldsymbol{x}).$$

故 (1) $\mathcal{A}+\mathcal{B}=\mathcal{B}+\mathcal{A}$. 同理

(2) $(\mathcal{A}+\mathcal{B})+\mathcal{C}=\mathcal{A}+(\mathcal{B}+\mathcal{C})$;

(3) $\mathcal{A}+\mathcal{O}=\mathcal{A}$, 这里 $\mathcal{O}$ 表示零映射: $\mathcal{O}(\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$;

给定线性变换 $\mathcal{A}, \mathcal{B} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 和数 $\lambda \in \mathbb{R}$, 定义

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\boldsymbol{x}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) + \mathcal{B}(\boldsymbol{x}), \qquad (\lambda f)(\boldsymbol{x}) = \lambda(\mathcal{A}(\boldsymbol{x})).$$

对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\boldsymbol{x}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) + \mathcal{B}(\boldsymbol{x}) \overset{\text{(V1)}}{=\!=\!=} \mathcal{B}(\boldsymbol{x}) + \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = (\mathcal{B}+\mathcal{A})(\boldsymbol{x}).$$

故 (1) $\mathcal{A}+\mathcal{B} = \mathcal{B}+\mathcal{A}$. 同理

(2) $(\mathcal{A}+\mathcal{B})+\mathcal{C} = \mathcal{A}+(\mathcal{B}+\mathcal{C})$;

(3) $\mathcal{A}+\mathcal{O} = \mathcal{A}$, 这里 $\mathcal{O}$ 表示零映射: $\mathcal{O}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$;

(4) 对任意线性映射 $\mathcal{A}$, 存在线性映射 $\mathcal{B} = (-1)\mathcal{A}$ 使得 $\mathcal{A}+\mathcal{B} = \mathcal{O}$;

线性映射的加法和数乘

给定线性变换 $\mathcal{A}, \mathcal{B} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 和数 $\lambda \in \mathbb{R}$, 定义

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\boldsymbol{x}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) + \mathcal{B}(\boldsymbol{x}), \qquad (\lambda f)(\boldsymbol{x}) = \lambda(\mathcal{A}(\boldsymbol{x})).$$

对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\boldsymbol{x}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) + \mathcal{B}(\boldsymbol{x}) \xlongequal{\text{(V1)}} \mathcal{B}(\boldsymbol{x}) + \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = (\mathcal{B}+\mathcal{A})(\boldsymbol{x}).$$

故 (1) $\mathcal{A}+\mathcal{B} = \mathcal{B}+\mathcal{A}$. 同理

(2) $(\mathcal{A}+\mathcal{B})+\mathcal{C} = \mathcal{A}+(\mathcal{B}+\mathcal{C})$;

(3) $\mathcal{A}+\mathcal{O} = \mathcal{A}$, 这里 $\mathcal{O}$ 表示零映射: $\mathcal{O}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$;

(4) 对任意线性映射 $\mathcal{A}$, 存在线性映射 $\mathcal{B} = (-1)\mathcal{A}$ 使得 $\mathcal{A}+\mathcal{B} = \mathcal{O}$;

(5) $(\lambda\mu)\mathcal{A} = \lambda(\mu\mathcal{A}) = \mu(\lambda\mathcal{A})$;

给定线性变换 $\mathcal{A}, \mathcal{B}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 和数 $\lambda \in \mathbb{R}$, 定义

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\boldsymbol{x}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) + \mathcal{B}(\boldsymbol{x}), \qquad (\lambda f)(\boldsymbol{x}) = \lambda(\mathcal{A}(\boldsymbol{x})).$$

对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\boldsymbol{x}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) + \mathcal{B}(\boldsymbol{x}) \xlongequal{\text{(V1)}} \mathcal{B}(\boldsymbol{x}) + \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = (\mathcal{B}+\mathcal{A})(\boldsymbol{x}).$$

故 (1) $\mathcal{A}+\mathcal{B} = \mathcal{B}+\mathcal{A}$. 同理

(2) $(\mathcal{A}+\mathcal{B})+\mathcal{C} = \mathcal{A}+(\mathcal{B}+\mathcal{C})$;

(3) $\mathcal{A}+\mathcal{O} = \mathcal{A}$, 这里 $\mathcal{O}$ 表示零映射: $\mathcal{O}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$;

(4) 对任意线性映射 $\mathcal{A}$, 存在线性映射 $\mathcal{B} = (-1)\mathcal{A}$ 使得 $\mathcal{A}+\mathcal{B} = \mathcal{O}$;

(5) $(\lambda\mu)\mathcal{A} = \lambda(\mu\mathcal{A}) = \mu(\lambda\mathcal{A})$;

(6) $(\lambda+\mu)\mathcal{A} = \lambda\mathcal{A} + \mu\mathcal{A}$;

给定线性变换 $\mathcal{A},\mathcal{B}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 和数 $\lambda\in\mathbb{R}$, 定义

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\boldsymbol{x})=\mathcal{A}(\boldsymbol{x})+\mathcal{B}(\boldsymbol{x}),\qquad (\lambda f)(\boldsymbol{x})=\lambda(\mathcal{A}(\boldsymbol{x})).$$

对任意 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$,

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\boldsymbol{x})=\mathcal{A}(\boldsymbol{x})+\mathcal{B}(\boldsymbol{x})\xlongequal{\text{(V1)}}\mathcal{B}(\boldsymbol{x})+\mathcal{A}(\boldsymbol{x})=(\mathcal{B}+\mathcal{A})(\boldsymbol{x}).$$

故 (1) $\mathcal{A}+\mathcal{B}=\mathcal{B}+\mathcal{A}$. 同理

(2) $(\mathcal{A}+\mathcal{B})+\mathcal{C}=\mathcal{A}+(\mathcal{B}+\mathcal{C})$;

(3) $\mathcal{A}+\mathcal{O}=\mathcal{A}$, 这里 $\mathcal{O}$ 表示零映射: $\mathcal{O}(\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$;

(4) 对任意线性映射 $\mathcal{A}$, 存在线性映射 $\mathcal{B}=(-1)\mathcal{A}$ 使得 $\mathcal{A}+\mathcal{B}=\mathcal{O}$;

(5) $(\lambda\mu)\mathcal{A}=\lambda(\mu\mathcal{A})=\mu(\lambda\mathcal{A})$;

(6) $(\lambda+\mu)\mathcal{A}=\lambda\mathcal{A}+\mu\mathcal{A}$;

(7) $\lambda(\mathcal{A}+\mathcal{B})=\lambda\mathcal{A}+\lambda\mathcal{B}$;

给定线性变换 $\mathcal{A},\mathcal{B}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 和数 $\lambda\in\mathbb{R}$, 定义

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\boldsymbol{x})=\mathcal{A}(\boldsymbol{x})+\mathcal{B}(\boldsymbol{x}),\qquad (\lambda f)(\boldsymbol{x})=\lambda(\mathcal{A}(\boldsymbol{x})).$$

对任意 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$,

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\boldsymbol{x})=\mathcal{A}(\boldsymbol{x})+\mathcal{B}(\boldsymbol{x})\overset{\text{(V1)}}{=\!=\!=}\mathcal{B}(\boldsymbol{x})+\mathcal{A}(\boldsymbol{x})=(\mathcal{B}+\mathcal{A})(\boldsymbol{x}).$$

故 (1) $\mathcal{A}+\mathcal{B}=\mathcal{B}+\mathcal{A}$. 同理

(2) $(\mathcal{A}+\mathcal{B})+\mathcal{C}=\mathcal{A}+(\mathcal{B}+\mathcal{C})$;

(3) $\mathcal{A}+\mathcal{O}=\mathcal{A}$, 这里 $\mathcal{O}$ 表示零映射: $\mathcal{O}(\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$;

(4) 对任意线性映射 $\mathcal{A}$, 存在线性映射 $\mathcal{B}=(-1)\mathcal{A}$ 使得 $\mathcal{A}+\mathcal{B}=\mathcal{O}$;

(5) $(\lambda\mu)\mathcal{A}=\lambda(\mu\mathcal{A})=\mu(\lambda\mathcal{A})$;

(6) $(\lambda+\mu)\mathcal{A}=\lambda\mathcal{A}+\mu\mathcal{A}$;

(7) $\lambda(\mathcal{A}+\mathcal{B})=\lambda\mathcal{A}+\lambda\mathcal{B}$;

(8) $1\cdot\mathcal{A}=\mathcal{A}$, $0\cdot\mathcal{A}=\mathcal{O}$,$\lambda\cdot\mathcal{O}=\mathcal{O}$.

由此得到对应的矩阵的加法和数乘:

由此得到对应的矩阵的加法和数乘:

定义. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}, \boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$, $\lambda\in\mathbb{R}$. 定义

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}, \qquad (\lambda f)(\boldsymbol{x})=\lambda(f(\boldsymbol{x})).$$

由此得到对应的矩阵的加法和数乘:

定义. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}, \boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$, $\lambda\in\mathbb{R}$. 定义

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}, \qquad (\lambda f)(\boldsymbol{x})=\lambda(f(\boldsymbol{x})).$$

只有同型矩阵(行列数都相同的矩阵) 才能相加.

由此得到对应的矩阵的加法和数乘:

定义. **设** $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$, $\lambda\in\mathbb{R}$. **定义**

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n},\qquad (\lambda f)(\boldsymbol{x})=\lambda(f(\boldsymbol{x})).$$

只有同型矩阵(行列数都相同的矩阵) 才能相加. 行 (列) 矩阵的加法和数乘就是其对应的行 (列) 向量的加法和数乘.

由此得到对应的矩阵的加法和数乘:

定义. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}, \boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$, $\lambda\in\mathbb{R}$. 定义

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}, \qquad (\lambda f)(\boldsymbol{x})=\lambda(f(\boldsymbol{x})).$$

只有同型矩阵(行列数都相同的矩阵) 才能相加. 行 (列) 矩阵的加法和数乘就是其对应的行 (列) 向量的加法和数乘.

自然地, 矩阵的减法为

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}.$$

矩阵加法的性质

由线性映射的相应性质可知:

矩阵加法的性质

由线性映射的相应性质可知:

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;

矩阵加法的性质

由线性映射的相应性质可知:

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$;

由线性映射的相应性质可知:

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$;

(3) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$;

矩阵加法的性质

由线性映射的相应性质可知:

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$;

(3) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$;

(4) 对于任意矩阵 $\boldsymbol{A}$, 存在矩阵 $B=(-1)\boldsymbol{A}$ 使得 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$. 称 B 为 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵, 记作 $-\boldsymbol{A}$.

矩阵加法的性质

由线性映射的相应性质可知:

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$;

(3) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$;

(4) 对于任意矩阵 $\boldsymbol{A}$, 存在矩阵 $\boldsymbol{B}=(-1)\boldsymbol{A}$ 使得 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$. 称 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵, 记作 $-\boldsymbol{A}$.

(5) $(\lambda\mu)\boldsymbol{A}=\lambda(\mu\boldsymbol{A})=\mu(\lambda\boldsymbol{A})$;

由线性映射的相应性质可知:

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$;

(3) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$;

(4) 对于任意矩阵 $\boldsymbol{A}$, 存在矩阵 $\boldsymbol{B}=(-1)\boldsymbol{A}$ 使得 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$. 称 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵, 记作 $-\boldsymbol{A}$.

(5) $(\lambda\mu)\boldsymbol{A}=\lambda(\mu\boldsymbol{A})=\mu(\lambda\boldsymbol{A})$;

(6) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$;

矩阵加法的性质

由线性映射的相应性质可知:

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$;

(3) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$;

(4) 对于任意矩阵 $\boldsymbol{A}$, 存在矩阵 $\boldsymbol{B}=(-1)\boldsymbol{A}$ 使得 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$. 称 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵, 记作 $-\boldsymbol{A}$.

(5) $(\lambda\mu)\boldsymbol{A}=\lambda(\mu\boldsymbol{A})=\mu(\lambda\boldsymbol{A})$;

(6) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$;

(7) $\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$;

矩阵加法的性质

由线性映射的相应性质可知:

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$;

(3) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$;

(4) 对于任意矩阵 $\boldsymbol{A}$, 存在矩阵 $\boldsymbol{B}=(-1)\boldsymbol{A}$ 使得 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$. 称 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵, 记作 $-\boldsymbol{A}$.

(5) $(\lambda\mu)\boldsymbol{A}=\lambda(\mu\boldsymbol{A})=\mu(\lambda\boldsymbol{A})$;

(6) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$;

(7) $\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$;

(8) $1\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}, 0\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}, \lambda\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}$.

矩阵线性运算的应用：图像处理

矩阵线性运算的应用：图像处理

一张图片由一些像素构成，上图包含 341×512 个像素.

矩阵线性运算的应用：图像处理

一张图片由一些像素构成，上图包含 341×512 个像素. 在 $\overset{\text{红绿蓝}}{\text{RGB}}$ 颜色模式下，每个像素包含红绿蓝三个通道，每个通道为一个 $0 \sim 255$ 之间的整数，数值越高对应颜色越亮.

一张图片由一些像素构成，上图包含 341×512 个像素．在 $\overset{\text{红绿蓝}}{\text{RGB}}$ 颜色模式下，每个像素包含红绿蓝三个通道，每个通道为一个 $0 \sim 255$ 之间的整数，数值越高对应颜色越亮．例如

一张图片由一些像素构成，上图包含 341×512 个像素．在 $\overset{\text{红绿蓝}}{\text{RGB}}$ 颜色模式下，每个像素包含红绿蓝三个通道，每个通道为一个 $0 \sim 255$ 之间的整数，数值越高对应颜色越亮．例如

- $R = 0$, $G = 0$, $B = 0$ 表示纯黑色；

矩阵线性运算的应用：图像处理

一张图片由一些像素构成，上图包含 341×512 个像素. 在 RGB（红绿蓝）颜色模式下，每个像素包含红绿蓝三个通道，每个通道为一个 $0 \sim 255$ 之间的整数，数值越高对应颜色越亮. 例如

- $R = 0$, $G = 0$, $B = 0$ 表示纯黑色;
- $R = 255$, $G = 255$, $B = 255$ 表示纯白色;

矩阵线性运算的应用：图像处理

一张图片由一些像素构成，上图包含 341×512 个像素. 在 $\overset{\text{红绿蓝}}{\text{RGB}}$ 颜色模式下，每个像素包含红绿蓝三个通道，每个通道为一个 $0 \sim 255$ 之间的整数，数值越高对应颜色越亮. 例如

- $R = 0$, $G = 0$, $B = 0$ 表示纯黑色；
- $R = 255$, $G = 255$, $B = 255$ 表示纯白色；
- $R = 255$, $G = 0$, $B = 255$ 表示纯紫色.

矩阵线性运算的应用：图像处理

一张图片由一些像素构成，上图包含 341×512 个像素．在 $\overset{\text{红绿蓝}}{\text{RGB}}$ 颜色模式下，每个像素包含红绿蓝三个通道，每个通道为一个 $0 \sim 255$ 之间的整数，数值越高对应颜色越亮．例如

- $R = 0$, $G = 0$, $B = 0$ 表示纯黑色；
- $R = 255$, $G = 255$, $B = 255$ 表示纯白色；
- $R = 255$, $G = 0$, $B = 255$ 表示纯紫色．

若三个通道相同，图片就是一张灰色的图．此时图片对应一个 341×512 的矩阵 $\boldsymbol{A}$．

想一想：如何将这个图像变亮？

矩阵线性运算的应用：图像处理

想一想：如何将这个图像变亮？

$\Longrightarrow$

想一想：如何将这个图像变亮？

$\Longrightarrow$

我们只需要增加每个元素的值，例如 (超过 255 的需要修正为 255)

$$\boldsymbol{A}+\begin{pmatrix}50&\cdots&50\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 50&\cdots&50\end{pmatrix},\qquad 1.5\boldsymbol{A},\qquad \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{A}+\begin{pmatrix}255&\cdots&255\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 255&\cdots&255\end{pmatrix}\right).$$

矩阵线性运算的应用：图像处理

如何让图像反色？

如何让图像反色?

$$\Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 255 & \cdots & 255 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 255 & \cdots & 255 \end{pmatrix} - \boldsymbol{A}.$$

设线性映射

$$\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad \mathcal{B} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n, \quad \mathcal{C} = \mathcal{A} \circ \mathcal{B} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$$

对应的矩阵为 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m \times n}, \boldsymbol{B} = (b_{ij})_{n \times p}, \boldsymbol{C} = (c_{ij})_{m \times p}.$

设线性映射

$$\mathcal{A}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m,\quad \mathcal{B}:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^n,\quad \mathcal{C}=\mathcal{A}\circ\mathcal{B}:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^m$$

对应的矩阵为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times p},\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times p}$. 如何用 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 来表示 $\boldsymbol{C}$ 呢?

设线性映射

$$\mathcal{A}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m,\quad \mathcal{B}:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^n,\quad \mathcal{C}=\mathcal{A}\circ\mathcal{B}:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^m$$

对应的矩阵为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times p},\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times p}$. 如何用 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 来表示 $\boldsymbol{C}$ 呢?

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_p)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^p$, 则

$$\mathcal{B}(\boldsymbol{x})=(y_1,\ldots,y_n)^{\mathrm{T}},\quad y_k=\sum_{j=1}^{p}b_{kj}x_j.$$

线性变换的复合

设线性映射

$$\mathcal{A}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m,\quad \mathcal{B}:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^n,\quad \mathcal{C}=\mathcal{A}\circ\mathcal{B}:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^m$$

对应的矩阵为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times p},\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times p}$. 如何用 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 来表示 $\boldsymbol{C}$ 呢?

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_p)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^p$, 则

$$\mathcal{B}(\boldsymbol{x})=(y_1,\ldots,y_n)^{\mathrm{T}},\quad y_k=\sum_{j=1}^{p}b_{kj}x_j.$$

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}(\boldsymbol{x}))=(z_1,\ldots,z_m)^{\mathrm{T}},\quad z_i=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}y_k=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\sum_{j=1}^{p}b_{kj}x_j=\sum_{j=1}^{p}\Big(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\Big)x_j.$$

线性变换的复合

设线性映射

$$\mathcal{A}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m,\quad \mathcal{B}:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^n,\quad \mathcal{C}=\mathcal{A}\circ\mathcal{B}:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^m$$

对应的矩阵为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times p},\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times p}$. 如何用 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 来表示 $\boldsymbol{C}$ 呢?

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_p)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^p$, 则

$$\mathcal{B}(\boldsymbol{x})=(y_1,\ldots,y_n)^{\mathrm{T}},\quad y_k=\sum_{j=1}^{p}b_{kj}x_j.$$

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}(\boldsymbol{x}))=(z_1,\ldots,z_m)^{\mathrm{T}},\quad z_i=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}y_k=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\sum_{j=1}^{p}b_{kj}x_j=\sum_{j=1}^{p}\Big(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\Big)x_j.$$

$$\Longrightarrow\ \boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times p},\qquad c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}.$$

设线性映射

$$\mathcal{A}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m,\quad \mathcal{B}:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^n,\quad \mathcal{C}=\mathcal{A}\circ\mathcal{B}:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^m$$

对应的矩阵为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times p},\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times p}$. 如何用 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 来表示 $\boldsymbol{C}$ 呢?

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_p)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^p$, 则

$$\mathcal{B}(\boldsymbol{x})=(y_1,\ldots,y_n)^{\mathrm{T}},\quad y_k=\sum_{j=1}^{p}b_{kj}x_j.$$

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}(\boldsymbol{x}))=(z_1,\ldots,z_m)^{\mathrm{T}},\quad z_i=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}y_k=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\sum_{j=1}^{p}b_{kj}x_j=\sum_{j=1}^{p}\Big(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\Big)x_j.$$

$$\Longrightarrow\ \boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times p},\qquad c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}.$$

我们把它定义为矩阵的乘法 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$.

矩阵乘法的定义

定义. 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}, \boldsymbol{B} = (b_{ij})_{n\times p}$. 定义矩阵的**乘法**为 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} = (c_{ij})_{m\times p}$, 其中

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

矩阵乘法的定义

定义. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times p}$. 定义矩阵的**乘法**为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}=(c_{ij})_{m\times p}$, 其中

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}.$$

只有第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数才能相乘.

定义. 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}, \boldsymbol{B} = (b_{ij})_{n\times p}$. 定义矩阵的**乘法**为 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} = (c_{ij})_{m\times p}$, 其中

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

只有第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数才能相乘.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = ?$$

矩阵乘法的定义

定义. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times p}$. 定义矩阵的**乘法**为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}=(c_{ij})_{m\times p}$, 其中

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}.$$

只有第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数才能相乘.

$$\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=?$$

不能相乘!

定义. 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$, $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{n\times p}$. 定义矩阵的**乘法**为 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} = (c_{ij})_{m\times p}$, 其中

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

只有第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数才能相乘.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = ? \qquad \text{不能相乘!}$$

简单来说, $\boldsymbol{AB}$ 的 (i, j) 元就是 $\boldsymbol{A}$ 的 i 行和 $\boldsymbol{B}$ 的 j 列对应分量相乘后求和得到的.

行向量与列向量的乘法

设 $\boldsymbol{A}=(a_1,\ldots,a_n)$ 是 n 维行向量, $\boldsymbol{B}=(b_1,\ldots,b_n)^{\mathrm{T}}$ 是 n 维列向量.

行向量与列向量的乘法

设 $\boldsymbol{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ 是 n 维行向量, $\boldsymbol{B} = (b_1, \ldots, b_n)^{\mathrm{T}}$ 是 n 维列向量. $\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{BA} = ?$

行向量与列向量的乘法

设 $\boldsymbol{A}=(a_1,\ldots,a_n)$ 是 n 维行向量, $\boldsymbol{B}=(b_1,\ldots,b_n)^{\mathrm{T}}$ 是 n 维列向量. $\boldsymbol{AB},\boldsymbol{BA}=?$

$$\boldsymbol{AB}=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i,\qquad \boldsymbol{BA}=(b_ia_j)_{n\times n}\in M_n.$$

行向量与列向量的乘法

设 $\boldsymbol{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ 是 n 维行向量, $\boldsymbol{B} = (b_1, \ldots, b_n)^{\mathrm{T}}$ 是 n 维列向量. $\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{BA} =?$

$$\boldsymbol{AB} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i, \qquad \boldsymbol{BA} = (b_i a_j)_{n\times n} \in M_n.$$

对于矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}, \boldsymbol{B} = (b_{ij})_{n\times p}$.

设 $\boldsymbol{A}=(a_1,\ldots,a_n)$ 是 n 维行向量，$\boldsymbol{B}=(b_1,\ldots,b_n)^{\mathrm{T}}$ 是 n 维列向量. $\boldsymbol{AB},\boldsymbol{BA}=?$

$$\boldsymbol{AB}=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i,\qquad \boldsymbol{BA}=(b_ia_j)_{n\times n}\in M_n.$$

对于矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times p}$. $\boldsymbol{AB}$ 的 (i,j) 元其实就是 $\boldsymbol{A}$ 第 i 行对应的行向量和 $\boldsymbol{B}$ 第 j 列对应的列向量相乘得到的数 (1 阶方阵包含的唯一元素):

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m\end{pmatrix}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_p)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\beta}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\beta}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\beta}_p\\ \boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\beta}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\beta}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\beta}_p\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m\boldsymbol{\beta}_1 & \boldsymbol{\alpha}_m\boldsymbol{\beta}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_m\boldsymbol{\beta}_p\end{pmatrix}.$$

例：矩阵乘法的计算

例. 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0&-1\\2&1&4&0\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&1\\-2&3&1\\1&5&0\\1&-3&4\end{pmatrix}$ 的乘积 $\boldsymbol{AB}$.

例. 求矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ 的乘积 $\boldsymbol{AB}$.

解答.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \end{pmatrix}.$$

例. 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 4 & 0\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ -2 & 3 & 1\\ 1 & 5 & 0\\ 1 & -3 & 4\end{pmatrix}$ 的乘积 $\boldsymbol{AB}$.

解答.

$$\begin{pmatrix}\boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{0} & \boxed{-1}\\ 2 & 1 & 4 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boxed{2} & 0 & 1\\ \boxed{-2} & 3 & 1\\ \boxed{1} & 5 & 0\\ \boxed{1} & -3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & & \\ & & \end{pmatrix}.$$

例：矩阵乘法的计算

例. 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0&-1\\2&1&4&0\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&1\\-2&3&1\\1&5&0\\1&-3&4\end{pmatrix}$ 的乘积 $\boldsymbol{AB}$.

解答.

$$\begin{pmatrix}\boxed{1}&\boxed{2}&\boxed{0}&\boxed{-1}\\2&1&4&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boxed{2}&0&1\\\boxed{-2}&3&1\\\boxed{1}&5&0\\\boxed{1}&-3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boxed{-3}&&\\&&\end{pmatrix}.$$

例：矩阵乘法的计算

例. 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 4 & 0\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ -2 & 3 & 1\\ 1 & 5 & 0\\ 1 & -3 & 4\end{pmatrix}$ 的乘积 $\boldsymbol{AB}$.

解答.

$$\begin{pmatrix}\boxed{1 & 2 & 0 & -1}\\ 2 & 1 & 4 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & \boxed{0} & 1\\ -2 & \boxed{3} & 1\\ 1 & \boxed{5} & 0\\ 1 & \boxed{-3} & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & \boxed{9} & \\ & & \end{pmatrix}.$$

例：矩阵乘法的计算

例. 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0&-1\\2&1&4&0\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&1\\-2&3&1\\1&5&0\\1&-3&4\end{pmatrix}$ 的乘积 $\boldsymbol{AB}$.

解答.

$$\begin{pmatrix}\boxed{1\quad 2\quad 0\quad -1}\\2\quad 1\quad 4\quad 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&\boxed{\begin{matrix}1\\1\\0\\4\end{matrix}}\\-2&3&\\1&5&\\1&-3&\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&9&\boxed{-1}\\&&\end{pmatrix}.$$

例：矩阵乘法的计算

例. 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 4 & 0\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ -2 & 3 & 1\\ 1 & 5 & 0\\ 1 & -3 & 4\end{pmatrix}$ 的乘积 $\boldsymbol{AB}$.

解答.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 4 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ -2 & 3 & 1\\ 1 & 5 & 0\\ 1 & -3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 9 & -1\\ \boxed{6} & & \end{pmatrix}.$$

例：矩阵乘法的计算

例. 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0&-1\\2&1&4&0\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&1\\-2&3&1\\1&5&0\\1&-3&4\end{pmatrix}$ 的乘积 $\boldsymbol{AB}$.

解答.

$$\begin{pmatrix}1&2&0&-1\\ \boxed{2\quad 1\quad 4\quad 0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&\boxed{\begin{matrix}0\\3\\5\\-3\end{matrix}}&1\\-2&&1\\1&&0\\1&&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&9&-1\\6&\boxed{23}&\end{pmatrix}.$$

例：矩阵乘法的计算

例. 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 4 & 0\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ -2 & 3 & 1\\ 1 & 5 & 0\\ 1 & -3 & 4\end{pmatrix}$ 的乘积 $\boldsymbol{AB}$.

解答.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & -1\\ \boxed{2 \quad 1 \quad 4 \quad 0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & \boxed{\begin{matrix}1\\1\\0\\4\end{matrix}}\\ -2 & 3 & \\ 1 & 5 & \\ 1 & -3 & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 9 & -1\\ 6 & 23 & \boxed{3}\end{pmatrix}.$$

线性映射满足如下性质:

矩阵乘法的性质

线性映射满足如下性质:

(1) $(\mathcal{A} \circ \mathcal{B}) \circ \mathcal{C} = \mathcal{A} \circ (\mathcal{B} \circ \mathcal{C})$;

矩阵乘法的性质

线性映射满足如下性质:

(1) $(\mathcal{A}\circ\mathcal{B})\circ\mathcal{C}=\mathcal{A}\circ(\mathcal{B}\circ\mathcal{C})$;

(2) $\lambda(\mathcal{A}\circ\mathcal{B})=(\lambda\mathcal{A})\circ\mathcal{B}=\mathcal{A}\circ(\lambda\mathcal{B})$;

矩阵乘法的性质

线性映射满足如下性质:

(1) $(\mathcal{A} \circ \mathcal{B}) \circ \mathcal{C} = \mathcal{A} \circ (\mathcal{B} \circ \mathcal{C})$;

(2) $\lambda(\mathcal{A} \circ \mathcal{B}) = (\lambda\mathcal{A}) \circ \mathcal{B} = \mathcal{A} \circ (\lambda\mathcal{B})$;

(3) $\mathcal{A} \circ (\mathcal{B} + \mathcal{C}) = \mathcal{A} \circ \mathcal{B} + \mathcal{A} \circ \mathcal{C}$;

线性映射满足如下性质:

(1) $(\mathcal{A} \circ \mathcal{B}) \circ \mathcal{C} = \mathcal{A} \circ (\mathcal{B} \circ \mathcal{C})$;

(2) $\lambda(\mathcal{A} \circ \mathcal{B}) = (\lambda\mathcal{A}) \circ \mathcal{B} = \mathcal{A} \circ (\lambda\mathcal{B})$;

(3) $\mathcal{A} \circ (\mathcal{B} + \mathcal{C}) = \mathcal{A} \circ \mathcal{B} + \mathcal{A} \circ \mathcal{C}$;

(4) $\mathcal{E}_m \circ \mathcal{A} = \mathcal{A} \circ \mathcal{E}_n = \mathcal{A}$, 这里 $\mathcal{E}$ 表示恒等映射: $\mathcal{E}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$;

线性映射满足如下性质:

(1) $(\mathcal{A}\circ\mathcal{B})\circ\mathcal{C}=\mathcal{A}\circ(\mathcal{B}\circ\mathcal{C})$;

(2) $\lambda(\mathcal{A}\circ\mathcal{B})=(\lambda\mathcal{A})\circ\mathcal{B}=\mathcal{A}\circ(\lambda\mathcal{B})$;

(3) $\mathcal{A}\circ(\mathcal{B}+\mathcal{C})=\mathcal{A}\circ\mathcal{B}+\mathcal{A}\circ\mathcal{C}$;

(4) $\mathcal{E}_m\circ\mathcal{A}=\mathcal{A}\circ\mathcal{E}_n=\mathcal{A}$, 这里 $\mathcal{E}$ 表示恒等映射: $\mathcal{E}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}$;

(5) $\mathcal{O}\circ\mathcal{A}=\mathcal{A}\circ\mathcal{O}=\mathcal{O}$.

矩阵乘法的性质

线性映射满足如下性质:

(1) $(\mathcal{A} \circ \mathcal{B}) \circ \mathcal{C} = \mathcal{A} \circ (\mathcal{B} \circ \mathcal{C})$;

(2) $\lambda(\mathcal{A} \circ \mathcal{B}) = (\lambda\mathcal{A}) \circ \mathcal{B} = \mathcal{A} \circ (\lambda\mathcal{B})$;

(3) $\mathcal{A} \circ (\mathcal{B} + \mathcal{C}) = \mathcal{A} \circ \mathcal{B} + \mathcal{A} \circ \mathcal{C}$;

(4) $\mathcal{E}_m \circ \mathcal{A} = \mathcal{A} \circ \mathcal{E}_n = \mathcal{A}$, 这里 $\mathcal{E}$ 表示恒等映射: $\mathcal{E}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$;

(5) $\mathcal{O} \circ \mathcal{A} = \mathcal{A} \circ \mathcal{O} = \mathcal{O}$.

由此可知矩阵乘法满足如下性质:

线性映射满足如下性质:

(1) $(\mathcal{A}\circ\mathcal{B})\circ\mathcal{C}=\mathcal{A}\circ(\mathcal{B}\circ\mathcal{C})$;

(2) $\lambda(\mathcal{A}\circ\mathcal{B})=(\lambda\mathcal{A})\circ\mathcal{B}=\mathcal{A}\circ(\lambda\mathcal{B})$;

(3) $\mathcal{A}\circ(\mathcal{B}+\mathcal{C})=\mathcal{A}\circ\mathcal{B}+\mathcal{A}\circ\mathcal{C}$;

(4) $\mathcal{E}_m\circ\mathcal{A}=\mathcal{A}\circ\mathcal{E}_n=\mathcal{A}$, 这里 $\mathcal{E}$ 表示恒等映射: $\mathcal{E}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}$;

(5) $\mathcal{O}\circ\mathcal{A}=\mathcal{A}\circ\mathcal{O}=\mathcal{O}$.

由此可知矩阵乘法满足如下性质:

(1) $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})$;

矩阵乘法的性质

线性映射满足如下性质:

(1) $(\mathcal{A}\circ\mathcal{B})\circ\mathcal{C}=\mathcal{A}\circ(\mathcal{B}\circ\mathcal{C})$;

(2) $\lambda(\mathcal{A}\circ\mathcal{B})=(\lambda\mathcal{A})\circ\mathcal{B}=\mathcal{A}\circ(\lambda\mathcal{B})$;

(3) $\mathcal{A}\circ(\mathcal{B}+\mathcal{C})=\mathcal{A}\circ\mathcal{B}+\mathcal{A}\circ\mathcal{C}$;

(4) $\mathcal{E}_m\circ\mathcal{A}=\mathcal{A}\circ\mathcal{E}_n=\mathcal{A}$, 这里 $\mathcal{E}$ 表示恒等映射: $\mathcal{E}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}$;

(5) $\mathcal{O}\circ\mathcal{A}=\mathcal{A}\circ\mathcal{O}=\mathcal{O}$.

由此可知矩阵乘法满足如下性质:

(1) $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$;

(2) $\lambda(\boldsymbol{AB})=(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})$;

线性映射满足如下性质:

(1) $(\mathcal{A}\circ\mathcal{B})\circ\mathcal{C}=\mathcal{A}\circ(\mathcal{B}\circ\mathcal{C})$;
(2) $\lambda(\mathcal{A}\circ\mathcal{B})=(\lambda\mathcal{A})\circ\mathcal{B}=\mathcal{A}\circ(\lambda\mathcal{B})$;
(3) $\mathcal{A}\circ(\mathcal{B}+\mathcal{C})=\mathcal{A}\circ\mathcal{B}+\mathcal{A}\circ\mathcal{C}$;
(4) $\mathcal{E}_m\circ\mathcal{A}=\mathcal{A}\circ\mathcal{E}_n=\mathcal{A}$, 这里 $\mathcal{E}$ 表示恒等映射: $\mathcal{E}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}$;
(5) $\mathcal{O}\circ\mathcal{A}=\mathcal{A}\circ\mathcal{O}=\mathcal{O}$.

由此可知矩阵乘法满足如下性质:

(1) $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})$;
(2) $\lambda(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})$;
(3) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$;

线性映射满足如下性质:

(1) $(\mathcal{A}\circ\mathcal{B})\circ\mathcal{C}=\mathcal{A}\circ(\mathcal{B}\circ\mathcal{C})$;

(2) $\lambda(\mathcal{A}\circ\mathcal{B})=(\lambda\mathcal{A})\circ\mathcal{B}=\mathcal{A}\circ(\lambda\mathcal{B})$;

(3) $\mathcal{A}\circ(\mathcal{B}+\mathcal{C})=\mathcal{A}\circ\mathcal{B}+\mathcal{A}\circ\mathcal{C}$;

(4) $\mathcal{E}_m\circ\mathcal{A}=\mathcal{A}\circ\mathcal{E}_n=\mathcal{A}$, 这里 $\mathcal{E}$ 表示恒等映射: $\mathcal{E}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}$;

(5) $\mathcal{O}\circ\mathcal{A}=\mathcal{A}\circ\mathcal{O}=\mathcal{O}$.

由此可知矩阵乘法满足如下性质:

(1) $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$;

(2) $\lambda(\boldsymbol{AB})=(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})$;

(3) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$;

(4) 若 $\boldsymbol{A}\in M_{m\times n}$, 则 $\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_n=\boldsymbol{A}$.

矩阵乘法的性质

线性映射满足如下性质:

(1) $(\mathcal{A}\circ\mathcal{B})\circ\mathcal{C}=\mathcal{A}\circ(\mathcal{B}\circ\mathcal{C})$;

(2) $\lambda(\mathcal{A}\circ\mathcal{B})=(\lambda\mathcal{A})\circ\mathcal{B}=\mathcal{A}\circ(\lambda\mathcal{B})$;

(3) $\mathcal{A}\circ(\mathcal{B}+\mathcal{C})=\mathcal{A}\circ\mathcal{B}+\mathcal{A}\circ\mathcal{C}$;

(4) $\mathcal{E}_m\circ\mathcal{A}=\mathcal{A}\circ\mathcal{E}_n=\mathcal{A}$, 这里 $\mathcal{E}$ 表示恒等映射: $\mathcal{E}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}$;

(5) $\mathcal{O}\circ\mathcal{A}=\mathcal{A}\circ\mathcal{O}=\mathcal{O}$.

由此可知矩阵乘法满足如下性质:

(1) $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$;

(2) $\lambda(\boldsymbol{AB})=(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})$;

(3) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$;

(4) 若 $\boldsymbol{A}\in M_{m\times n}$, 则 $\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_n=\boldsymbol{A}$.

(5) 若 $\boldsymbol{A}\in M_{m\times n}$, 则 $\boldsymbol{O}_{p\times m}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}_{p\times n}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{O}_{n\times p}=\boldsymbol{O}_{m\times p}$.

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应的线性变换就是

$$\mathcal{A}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m,\ \boldsymbol{x}\mapsto\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}.$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应的线性变换就是

$$\mathcal{A}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}.$$

因此解线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + \cdots + a_{1n}\ x_n = b_1 \\ a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + \cdots + a_{2n}\ x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应的线性变换就是

$$\mathcal{A}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m,\ \boldsymbol{x}\mapsto\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}.$$

因此解线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}\ x_1+a_{12}\ x_2+\cdots+a_{1n}\ x_n=b_1\\ a_{21}\ x_1+a_{22}\ x_2+\cdots+a_{2n}\ x_n=b_2\\ \qquad\qquad\vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

等价于解矩阵方阵 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$, 其中

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}.$$

矩阵乘法无交换律和消去律

矩阵的乘法不能随意交换顺序.

矩阵的乘法不能随意交换顺序. 一般称 $\boldsymbol{AB}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 左乘 $\boldsymbol{B}$, 或者 $\boldsymbol{B}$ 右乘 $\boldsymbol{A}$.

矩阵乘法无交换律和消去律

矩阵的乘法不能随意交换顺序. 一般称 $\boldsymbol{AB}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 左乘 $\boldsymbol{B}$, 或者 $\boldsymbol{B}$ 右乘 $\boldsymbol{A}$.

若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$, 则称 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是**可交换**的.

矩阵乘法无交换律和消去律

矩阵的乘法不能随意交换顺序. 一般称 $\boldsymbol{AB}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 左乘 $\boldsymbol{B}$, 或者 $\boldsymbol{B}$ 右乘 $\boldsymbol{A}$.

若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$, 则称 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是可交换的. 此时 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 必为同阶方阵.

矩阵乘法无交换律和消去律

矩阵的乘法不能随意交换顺序. 一般称 $\boldsymbol{AB}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 左乘 $\boldsymbol{B}$, 或者 $\boldsymbol{B}$ 右乘 $\boldsymbol{A}$.

若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$, 则称 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是可交换的. 此时 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 必为同阶方阵. 例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

矩阵乘法无交换律和消去律

矩阵的乘法不能随意交换顺序. 一般称 $\boldsymbol{AB}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 左乘 $\boldsymbol{B}$, 或者 $\boldsymbol{B}$ 右乘 $\boldsymbol{A}$.

若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$, 则称 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是可交换的. 此时 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 必为同阶方阵. 例如

$$\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&5\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$$

方阵总和同阶单位阵交换.

矩阵乘法无交换律和消去律

矩阵的乘法不能随意交换顺序. 一般称 $\boldsymbol{AB}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 左乘 $\boldsymbol{B}$, 或者 $\boldsymbol{B}$ 右乘 $\boldsymbol{A}$.

若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$, 则称 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是可交换的. 此时 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 必为同阶方阵. 例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

方阵总和同阶单位阵交换.

矩阵乘法也没有消去律: $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$ 推不出 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{O}$.

矩阵的乘法不能随意交换顺序. 一般称 $\boldsymbol{AB}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 左乘 $\boldsymbol{B}$, 或者 $\boldsymbol{B}$ 右乘 $\boldsymbol{A}$.

若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$, 则称 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是可交换的. 此时 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 必为同阶方阵. 例如

$$\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&5\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$$

方阵总和同阶单位阵交换.

矩阵乘法也没有消去律: $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 推不出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$. 例如

$$\begin{pmatrix}2&4\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-2\\-1&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{O}_2.$$

矩阵乘法无交换律和消去律

矩阵的乘法不能随意交换顺序. 一般称 $\boldsymbol{AB}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 左乘 $\boldsymbol{B}$, 或者 $\boldsymbol{B}$ 右乘 $\boldsymbol{A}$.

若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$, 则称 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是可交换的. 此时 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 必为同阶方阵. 例如

$$\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&5\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$$

方阵总和同阶单位阵交换.

矩阵乘法也没有消去律: $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 推不出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$. 例如

$$\begin{pmatrix}2&4\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-2\\-1&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{O}_2.$$

由此可知: $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{BC}$ 推不出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

矩阵的乘法不能随意交换顺序. 一般称 $\boldsymbol{AB}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 左乘 $\boldsymbol{B}$, 或者 $\boldsymbol{B}$ 右乘 $\boldsymbol{A}$.

若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$, 则称 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是可交换的. 此时 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 必为同阶方阵. 例如

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

方阵总和同阶单位阵交换.

矩阵乘法也没有消去律: $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 推不出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$. 例如

$$\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\boldsymbol{O}_2.$$

由此可知: $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{BC}$ 推不出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

练习. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 $n>1$ 阶方阵, 则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{AB}=($ $)$.

(A) $\boldsymbol{A}(1+\boldsymbol{B})$ (B) $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}$ (C) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})$ (D) 以上都不对

矩阵的乘法不能随意交换顺序. 一般称 $\boldsymbol{AB}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 左乘 $\boldsymbol{B}$, 或者 $\boldsymbol{B}$ 右乘 $\boldsymbol{A}$.

若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$, 则称 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是可交换的. 此时 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 必为同阶方阵. 例如

$$\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&5\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$$

方阵总和同阶单位阵交换.

矩阵乘法也没有消去律: $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 推不出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$. 例如

$$\begin{pmatrix}2&4\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-2\\-1&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{O}_2.$$

由此可知: $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{BC}$ 推不出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

练习. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 $n>1$ 阶方阵, 则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{AB}=($ C $)$.

(A) $\boldsymbol{A}(1+\boldsymbol{B})$ (B) $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}$ (C) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})$ (D) 以上都不对

例: 与给定矩阵可交换

例. 求与矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$ 可交换的所有矩阵.

例: 与给定矩阵可交换

例. 求与矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$ 可交换的所有矩阵.

解答. 设 $\boldsymbol{B} = (a_{ij})_{3\times 3}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 可交换, 则

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{BA} = \begin{pmatrix} 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{21} & a_{22} \\ 0 & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix},$$

例: 与给定矩阵可交换

例. 求与矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$ 可交换的所有矩阵.

解答. 设 $\boldsymbol{B} = (a_{ij})_{3\times 3}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 可交换, 则

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{BA} = \begin{pmatrix} 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{21} & a_{22} \\ 0 & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix},$$

$$a_{21} = a_{31} = a_{32} = 0, \quad a_{11} = a_{22} = a_{33}, \quad a_{23} = a_{12},$$

例: 与给定矩阵可交换

例. 求与矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ & 0 & 1\\ & & 0\end{pmatrix}$ 可交换的所有矩阵.

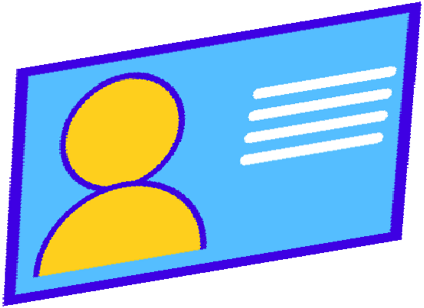
解答. 设 $\boldsymbol{B}=(a_{ij})_{3\times 3}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 可交换, 则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}0 & a_{11} & a_{12}\\ 0 & a_{21} & a_{22}\\ 0 & a_{31} & a_{32}\end{pmatrix},$$

$$a_{21}=a_{31}=a_{32}=0,\quad a_{11}=a_{22}=a_{33},\quad a_{23}=a_{12},$$

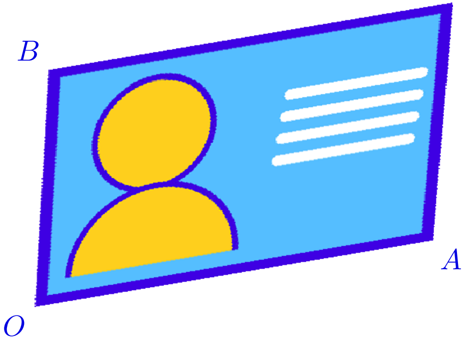
即 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ & a_{11} & a_{12}\\ & & a_{11}\end{pmatrix}.$

某位同学拍身份证照片拍成了下图的样子，如何才能修复好呢？



矩阵乘法的应用：图像校正

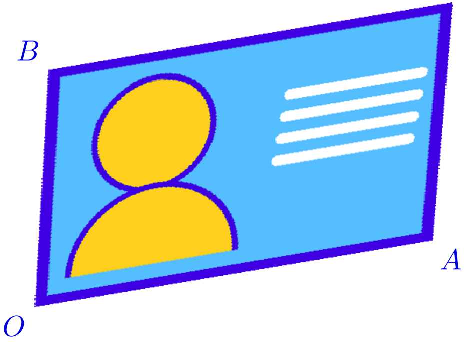
某位同学拍身份证照片拍成了下图的样子，如何才能修复好呢？



以左下角为原点，通过测量发现 A 坐标为 $(521, 88)$，B 坐标为 $(19, 311)$.

矩阵乘法的应用：图像校正

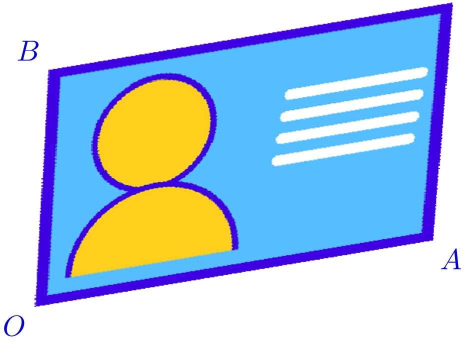
某位同学拍身份证照片拍成了下图的样子，如何才能修复好呢？



以左下角为原点，通过测量发现 A 坐标为 $(521, 88)$，B 坐标为 $(19, 311)$．

经过查询知道身份证长宽比为 $42.7 : 27$．

某位同学拍身份证照片拍成了下图的样子，如何才能修复好呢？



以左下角为原点，通过测量发现 A 坐标为 $(521, 88)$，B 坐标为 $(19, 311)$.

经过查询知道身份证长宽比为 $42.7 : 27$. 令 $A' = (427, 0)$, $B' = (0, 270)$. 我们希望找到一个线性变换，将 A, B 变为 A', B'.

设该线性变换对应的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，则

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 521 & 19 \\ 88 & 311 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 427 & 0 \\ 0 & 270 \end{pmatrix},$$

矩阵乘法的应用：图像校正

设该线性变换对应的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，则

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 521 & 19 \\ 88 & 311 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 427 & 0 \\ 0 & 270 \end{pmatrix}, \qquad \text{即} \quad \begin{cases} 521a+\ 88\,b=427 \\ 19\,a+311\,b=\ 0 \\ 521\,c+\ 88\,d=\ 0 \\ 19\,c+311d=270 \end{cases}$$

设该线性变换对应的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，则

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 521 & 19 \\ 88 & 311 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 427 & 0 \\ 0 & 270 \end{pmatrix},\qquad \text{即}\quad \begin{cases} 521a+\ 88\,b=427 \\ 19\,a+311\,b=\ \ 0 \\ 521\,c+\ 88\,d=\ \ 0 \\ 19\ c+311d=270 \end{cases}$$

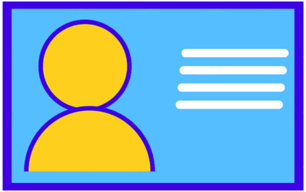
解得 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0.828 & -0.051 \\ -0.148 & 0.877 \end{pmatrix}$.

矩阵乘法的应用：图像校正

设该线性变换对应的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，则

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 521 & 19 \\ 88 & 311 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 427 & 0 \\ 0 & 270 \end{pmatrix},\qquad \text{即}\qquad \begin{cases} 521a+\ 88\,b=427 \\ 19\,a+311b=\ \ 0 \\ 521c+\ 88\,d=\ \ 0 \\ 19\,c+311d=270 \end{cases}$$

解得 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0.828 & -0.051 \\ -0.148 & 0.877 \end{pmatrix}$. 通过应用该变换，图片被修复成如下效果:



矩阵幂的定义

定义. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 定义 $\boldsymbol{A}$ 的**幂**

$$\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{E}_n, \quad \boldsymbol{A}^k = \underbrace{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \cdots \cdot \boldsymbol{A}}_{k \text{ 个}}.$$

矩阵幂的定义

定义. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 定义 $\boldsymbol{A}$ 的**幂**

$$\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{E}_n, \quad \boldsymbol{A}^k = \underbrace{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \cdots \cdot \boldsymbol{A}}_{k \text{ 个}}.$$

矩阵幂满足如下性质 (k, ℓ 为非负整数):

矩阵幂的定义

定义. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 定义 $\boldsymbol{A}$ 的**幂**

$$\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{E}_n, \quad \boldsymbol{A}^k = \underbrace{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \cdots \cdot \boldsymbol{A}}_{k\text{ 个}}.$$

矩阵幂满足如下性质 (k, ℓ 为非负整数):

(1) $\boldsymbol{A}^{k+\ell} = \boldsymbol{A}^k \cdot \boldsymbol{A}^\ell$;

矩阵幂的定义

定义. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 定义 $\boldsymbol{A}$ 的幂

$$\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{E}_n, \quad \boldsymbol{A}^k = \underbrace{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \cdots \cdot \boldsymbol{A}}_{k \text{ 个}}.$$

矩阵幂满足如下性质 (k, ℓ 为非负整数):

(1) $\boldsymbol{A}^{k+\ell} = \boldsymbol{A}^k \cdot \boldsymbol{A}^\ell$;

(2) $\boldsymbol{A}^{k\ell} = (\boldsymbol{A}^k)^\ell$.

矩阵幂的定义

定义. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 定义 $\boldsymbol{A}$ 的**幂**

$$\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{E}_n, \quad \boldsymbol{A}^k = \underbrace{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \cdots \cdot \boldsymbol{A}}_{k \text{ 个}}.$$

矩阵幂满足如下性质 (k, ℓ 为非负整数):

(1) $\boldsymbol{A}^{k+\ell} = \boldsymbol{A}^k \cdot \boldsymbol{A}^\ell$;

(2) $\boldsymbol{A}^{k\ell} = (\boldsymbol{A}^k)^\ell$.

注意 $(\boldsymbol{AB})^k$ 一般不等于 $\boldsymbol{A}^k \cdot \boldsymbol{B}^k$.

矩阵幂的定义

定义. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 定义 $\boldsymbol{A}$ 的幂

$$\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{E}_n, \quad \boldsymbol{A}^k = \underbrace{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \cdots \cdot \boldsymbol{A}}_{k\ \text{个}}.$$

矩阵幂满足如下性质 (k, ℓ 为非负整数):

(1) $\boldsymbol{A}^{k+\ell} = \boldsymbol{A}^k \cdot \boldsymbol{A}^\ell$;

(2) $\boldsymbol{A}^{k\ell} = (\boldsymbol{A}^k)^\ell$.

注意 $(\boldsymbol{AB})^k$ 一般不等于 $\boldsymbol{A}^k \cdot \boldsymbol{B}^k$. 想一想: 下面的等式成立吗?

$$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{B}^2? \qquad (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^2 = \boldsymbol{A}^2 + 2\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{B}^2?$$

矩阵幂的定义

定义. 设 A 为 n 阶方阵, 定义 A 的**幂**

$$\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{E}_n, \quad \boldsymbol{A}^k = \underbrace{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \cdots \cdot \boldsymbol{A}}_{k\text{ 个}}.$$

矩阵幂满足如下性质 (k, ℓ 为非负整数):

(1) $\boldsymbol{A}^{k+\ell} = \boldsymbol{A}^k \cdot \boldsymbol{A}^\ell$;

(2) $\boldsymbol{A}^{k\ell} = (\boldsymbol{A}^k)^\ell$.

注意 $(\boldsymbol{AB})^k$ 一般不等于 $\boldsymbol{A}^k \cdot \boldsymbol{B}^k$. 想一想: 下面的等式成立吗?

$$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{B}^2? \qquad (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^2 = \boldsymbol{A}^2 + 2\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{B}^2?$$

当且仅当 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$ 时成立.

例：矩阵幂的计算

例. 设 $\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. 求 $\boldsymbol{A}^k$.

例：矩阵幂的计算

例. 设 $\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. 求 $\boldsymbol{A}^k$.

解答.

$$\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} = \mathrm{diag}(\lambda_1^2, \cdots, \lambda_n^2),$$

例. 设 $\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. 求 $\boldsymbol{A}^k$.

解答.

$$\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} = \mathrm{diag}(\lambda_1^2, \cdots, \lambda_n^2),$$

$$\boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^2 = \mathrm{diag}(\lambda_1^3, \cdots, \lambda_n^3),$$

例：矩阵幂的计算

例. 设 $\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. 求 $\boldsymbol{A}^k$.

解答.

$$\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} = \mathrm{diag}(\lambda_1^2, \cdots, \lambda_n^2),$$

$$\boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^2 = \mathrm{diag}(\lambda_1^3, \cdots, \lambda_n^3),$$

递推下去可知

$$\boldsymbol{A}^k = \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \cdots, \lambda_n^k).$$

例：矩阵幂的计算

例. 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{pmatrix}$. 求 $\boldsymbol{A}^k$.

例：矩阵幂的计算

例. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ & \lambda & 1\\ & & \lambda\end{pmatrix}$. 求 $\boldsymbol{A}^k$.

解答.

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ & \lambda & 1\\ & & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ & \lambda & 1\\ & & \lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^2 & 2\lambda & 1\\ & \lambda^2 & 2\lambda\\ & & \lambda^2\end{pmatrix},$$

例：矩阵幂的计算

例. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ & \lambda & 1\\ & & \lambda\end{pmatrix}$. 求 $\boldsymbol{A}^k$.

解答.

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ & \lambda & 1\\ & & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ & \lambda & 1\\ & & \lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^2 & 2\lambda & 1\\ & \lambda^2 & 2\lambda\\ & & \lambda^2\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^3=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ & \lambda & 1\\ & & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda^2 & 2\lambda & 1\\ & \lambda^2 & 2\lambda\\ & & \lambda^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda\\ & \lambda^3 & 3\lambda^2\\ & & \lambda^3\end{pmatrix}.$$

例：矩阵幂的计算

例. 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{pmatrix}$. 求 $\boldsymbol{A}^k$.

解答.

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 \\ & \lambda^2 & 2\lambda \\ & & \lambda^2 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^3 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 \\ & \lambda^2 & 2\lambda \\ & & \lambda^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda \\ & \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ & & \lambda^3 \end{pmatrix}.$$

归纳可知 $\boldsymbol{A}^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{1}{2}k(k-1)\lambda^{k-2} \\ & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ & & \lambda^k \end{pmatrix}$.

例：矩阵幂的计算

另解. 设 $\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{N}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{N}^3 = \boldsymbol{O}$.

例：矩阵幂的计算

另解. 设 $\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{N}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{N}^3 = \boldsymbol{O}$. 由于 $\boldsymbol{A} = \lambda \boldsymbol{E} + \boldsymbol{N}$ 且 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 可交换,

例：矩阵幂的计算

另解. 设 $\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{N}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{N}^3 = \boldsymbol{O}$. 由于 $\boldsymbol{A} = \lambda\boldsymbol{E} + \boldsymbol{N}$ 且 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 可交换, 因此

$$\boldsymbol{A}^k = (\lambda\boldsymbol{E} + \boldsymbol{N})^k = \lambda^k\boldsymbol{E} + \mathrm{C}_k^1\lambda^{k-1}\boldsymbol{N} + \mathrm{C}_k^2\lambda^{k-2}\boldsymbol{N}^2$$

例：矩阵幂的计算

另解. 设 $\boldsymbol{N}=\begin{pmatrix}0&1&0\\&0&1\\&&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{N}^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\&0&0\\&&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{N}^3=\boldsymbol{O}$. 由于 $\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{N}$ 且 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 可交换，因此

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^k&=(\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{N})^k=\lambda^k\boldsymbol{E}+\mathrm{C}_k^1\lambda^{k-1}\boldsymbol{N}+\mathrm{C}_k^2\lambda^{k-2}\boldsymbol{N}^2\\&=\begin{pmatrix}\lambda^k&k\lambda^{k-1}&\frac{1}{2}k(k-1)\lambda^{k-2}\\&\lambda^k&k\lambda^{k-1}\\&&\lambda^k\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

例：矩阵幂的计算

例. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$. 求 $\boldsymbol{A}^k$.

例. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$. 求 $\boldsymbol{A}^k$.

解答. 注意到 $\boldsymbol{A}$ 对应平面 $\mathbb{R}^2$ 上的线性变换是逆时针旋转 θ, 所以 $\boldsymbol{A}^k$ 就是逆时针旋转 $n\theta$, 对应的矩阵为

$$\boldsymbol{A}^k=\begin{pmatrix}\cos k\theta & -\sin k\theta\\ \sin k\theta & \cos k\theta\end{pmatrix}.$$

例：矩阵幂的计算

例. 设 $\boldsymbol{A} = (1, 2, 3), \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. 求 $(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})^k$.

例: 矩阵幂的计算

例. 设 $\boldsymbol{A} = (1,2,3), \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. 求 $(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})^k$.

解答. 注意到 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = 3$,

例：矩阵幂的计算

例. 设 $\boldsymbol{A}=(1,2,3), \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$. 求 $(\boldsymbol{BA})^k$.

解答. 注意到 $\boldsymbol{AB}=3$, 因此

$$(\boldsymbol{BA})^k=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{AB})^{k-1}\boldsymbol{A}$$

例. 设 $\boldsymbol{A}=(1,2,3), \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$. 求 $(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})^k$.

解答. 注意到 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=3$, 因此

$$(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})^k=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{k-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\cdot 3^{k-1}\cdot\boldsymbol{A}=3^{k-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$$

例: 矩阵幂的计算

例. 设 $\boldsymbol{A}=(1,2,3), \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$. 求 $(\boldsymbol{BA})^k$.

解答. 注意到 $\boldsymbol{AB}=3$, 因此

$$(\boldsymbol{BA})^k=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{AB})^{k-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\cdot 3^{k-1}\cdot\boldsymbol{A}=3^{k-1}\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}-3^{k-1} & -2\cdot 3^{k-1} & -3^k\\ 2\cdot 3^{k-1} & 4\cdot 3^{k-1} & 2\cdot 3^k\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

例: 矩阵幂的计算

例. 设 $\boldsymbol{A} = (1,2,3), \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. 求 $(\boldsymbol{BA})^k$.

解答. 注意到 $\boldsymbol{AB} = 3$, 因此

$$(\boldsymbol{BA})^k = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{AB})^{k-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \cdot 3^{k-1} \cdot \boldsymbol{A} = 3^{k-1}\boldsymbol{BA} = \begin{pmatrix} -3^{k-1} & -2 \cdot 3^{k-1} & -3^k \\ 2 \cdot 3^{k-1} & 4 \cdot 3^{k-1} & 2 \cdot 3^k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

把数 λ 看成一阶方阵时, 它右乘一列向量、或左乘一行向量和数乘效果一样.

例：矩阵幂的计算

例. 设 $\boldsymbol{A}=(1,2,3), \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$. 求 $(\boldsymbol{BA})^k$.

解答. 注意到 $\boldsymbol{AB}=3$, 因此

$$(\boldsymbol{BA})^k=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{AB})^{k-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\cdot 3^{k-1}\cdot\boldsymbol{A}=3^{k-1}\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}-3^{k-1} & -2\cdot 3^{k-1} & -3^k\\ 2\cdot 3^{k-1} & 4\cdot 3^{k-1} & 2\cdot 3^k\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

把数 λ 看成一阶方阵时，它右乘一列向量、或左乘一行向量和数乘效果一样.

该方法可用于计算每行之间成比例的方阵的幂.

练习. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}$. 求 $\boldsymbol{A}^k$.

练习. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}$. 求 $\boldsymbol{A}^k$.

答案. 注意到 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}(1,2,3)$, 因此 $\boldsymbol{A}^k=14^{k-1}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}14^{k-1}&2\cdot 14^{k-1}&3\cdot 14^{k-1}\\2\cdot 14^{k-1}&4\cdot 14^{k-1}&6\cdot 14^{k-1}\\3\cdot 14^{k-1}&6\cdot 14^{k-1}&9\cdot 14^{k-1}\end{pmatrix}$.

例：矩阵幂的计算

练习. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}$. 求 $\boldsymbol{A}^k$.

答案. 注意到 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}(1,2,3)$, 因此 $\boldsymbol{A}^k=14^{k-1}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}14^{k-1}&2\cdot 14^{k-1}&3\cdot 14^{k-1}\\2\cdot 14^{k-1}&4\cdot 14^{k-1}&6\cdot 14^{k-1}\\3\cdot 14^{k-1}&6\cdot 14^{k-1}&9\cdot 14^{k-1}\end{pmatrix}$.

想一想: $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$ 能推出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$ 或 $-\boldsymbol{E}$ 吗?

设

$$f(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0$$

是一个多项式.

方阵的多项式

设

$$f(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0$$

是一个多项式. 对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$, 定义

$$f(\boldsymbol{A}) = a_m \boldsymbol{A}^m + \cdots + a_1 \boldsymbol{A} + a_0 \boldsymbol{E}.$$

设

$$f(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0$$

是一个多项式. 对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$, 定义

$$f(\boldsymbol{A}) = a_m \boldsymbol{A}^m + \cdots + a_1 \boldsymbol{A} + a_0 \boldsymbol{E}.$$

和幂的计算类似, 我们有

方阵的多项式

设

$$f(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0$$

是一个多项式. 对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$, 定义

$$f(\boldsymbol{A}) = a_m \boldsymbol{A}^m + \cdots + a_1 \boldsymbol{A} + a_0 \boldsymbol{E}.$$

和幂的计算类似, 我们有

(1) $f\big(\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\big) = \operatorname{diag}\big(f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n)\big).$

设

$$f(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0$$

是一个多项式. 对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$, 定义

$$f(\boldsymbol{A}) = a_m \boldsymbol{A}^m + \cdots + a_1 \boldsymbol{A} + a_0 \boldsymbol{E}.$$

和幂的计算类似, 我们有

(1) $f\big(\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\big) = \mathrm{diag}\big(f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n)\big)$.

(2) $f(\lambda \boldsymbol{E} + \boldsymbol{N}) = f(\lambda)\boldsymbol{E} + f'(\lambda)\boldsymbol{N} + \dfrac{1}{2!} f''(\lambda)\boldsymbol{N}^2 + \cdots + \dfrac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)} \boldsymbol{N}^{n-1}$.

设

$$f(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0$$

是一个多项式. 对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$, 定义

$$f(\boldsymbol{A}) = a_m \boldsymbol{A}^m + \cdots + a_1 \boldsymbol{A} + a_0 \boldsymbol{E}.$$

和幂的计算类似, 我们有

(1) $f\big(\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\big) = \mathrm{diag}\big(f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n)\big)$.

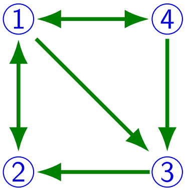
(2) $f(\lambda \boldsymbol{E} + \boldsymbol{N}) = f(\lambda)\boldsymbol{E} + f'(\lambda)\boldsymbol{N} + \dfrac{1}{2!} f''(\lambda)\boldsymbol{N}^2 + \cdots + \dfrac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)} \boldsymbol{N}^{n-1}$.

(3) 若 $a_0 = 0$, 则 $f(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}) = \dfrac{f(\lambda)}{\lambda}\boldsymbol{A}$, 其中 $\lambda = \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$.

矩阵幂的应用：换乘

网上订票系统里记录了所有能直飞的航班线路. 对于不能直达的城市, 该怎么确定是否有换乘方案呢?

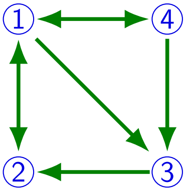
网上订票系统里记录了所有能直飞的航班线路. 对于不能直达的城市, 该怎么确定是否有换乘方案呢? 例如 4 个城市之间的航线如图所示:



矩阵幂的应用：换乘

非考试内容

网上订票系统里记录了所有能直飞的航班线路. 对于不能直达的城市, 该怎么确定是否有换乘方案呢? 例如 4 个城市之间的航线如图所示:



$$\Longleftrightarrow \text{邻接矩阵 } \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

邻接矩阵中 $a_{ij} = 1$ 表示从 i 到 j 有直飞航线.

于是 $\boldsymbol{A}^2$ 的 (i,j) 元

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{4} a_{ik}a_{kj}$$

就是从 i 到 j 换乘一次的方案数.

于是 $\boldsymbol{A}^2$ 的 (i,j) 元

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{4} a_{ik}a_{kj}$$

就是从 i 到 j 换乘一次的方案数. 例如从②$\Longrightarrow$③:

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{1} & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

矩阵幂的应用：换乘

于是 $\boldsymbol{A}^2$ 的 (i,j) 元

$$b_{ij}=\sum_{k=1}^{4}a_{ik}a_{kj}$$

就是从 i 到 j 换乘一次的方案数. 例如从②$\Longrightarrow$③:

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&1&0\\0&1&\boxed{1}&1\\1&0&0&0\\0&2&1&1\end{pmatrix}.$$

由于 $b_{23}=1$, 因此可通过②$\Longrightarrow$①$\Longrightarrow$③换乘一次到达.

于是 $\boldsymbol{A}^2$ 的 (i,j) 元

$$b_{ij}=\sum_{k=1}^{4}a_{ik}a_{kj}$$

就是从 i 到 j 换乘一次的方案数. 例如从②$\Longrightarrow$③:

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&1&0\\0&1&\boxed{1}&1\\1&0&0&0\\0&2&1&1\end{pmatrix}.$$

由于 $b_{23}=1$, 因此可通过② $\Longrightarrow$ ① $\Longrightarrow$ ③换乘一次到达.

想一想: 如何从③到达④?

矩阵幂的应用: 换乘

于是 $\boldsymbol{A}^2$ 的 (i,j) 元

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{4} a_{ik}a_{kj}$$

就是从 i 到 j 换乘一次的方案数. 例如从②$\Longrightarrow$③:

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{1} & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

由于 $b_{23} = 1$, 因此可通过②$\Longrightarrow$①$\Longrightarrow$③换乘一次到达.

想一想: 如何从③到达④? 考虑 $\boldsymbol{A}^3$, 即换乘两次即可.

矩阵转置的定义

若 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$, 称

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = (a_{ji})_{n\times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{n\times m}$$

为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**转置**.

矩阵转置的定义

若 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$，称

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = (a_{ji})_{n\times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{n\times m}$$

为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**转置**. 如同我们之前使用过的写法, 行向量的转置就是列向量

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (a_1, \ldots, a_n)^{\mathrm{T}}.$$

矩阵转置的定义

若 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$, 称

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = (a_{ji})_{n\times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{n\times m}$$

为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**转置**. 如同我们之前使用过的写法, 行向量的转置就是列向量

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (a_1, \dots, a_n)^{\mathrm{T}}.$$

方阵的转置还是方阵, 上三角阵的转置是下三角阵.

矩阵转置的定义

若 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, 称

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(a_{ji})_{n\times m}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\in M_{n\times m}$$

为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**转置**. 如同我们之前使用过的写法, 行向量的转置就是列向量

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}=(a_1,\ldots,a_n)^{\mathrm{T}}.$$

方阵的转置还是方阵, 上三角阵的转置是下三角阵.

$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 对应的线性变换是 $\boldsymbol{A}$ 对应的线性变换诱导的对偶空间上的线性变换, 感兴趣的可自行阅读有关材料.

矩阵转置的性质

矩阵的转置满足如下性质:

矩阵转置的性质

矩阵的转置满足如下性质:

(1) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$;

矩阵转置的性质

矩阵的转置满足如下性质:

(1) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$;

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$;

矩阵转置的性质

矩阵的转置满足如下性质:

(1) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$;

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$;

(3) $(\lambda\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\lambda\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$;

矩阵转置的性质

矩阵的转置满足如下性质:

(1) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$;

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$;

(3) $(\lambda \boldsymbol{A})^{\mathrm{T}} = \lambda \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$;

(4) $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

矩阵转置的性质

矩阵的转置满足如下性质:

(1) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$;

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$;

(3) $(\lambda\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\lambda\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$;

(4) $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

例如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

矩阵的转置满足如下性质:

(1) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$;

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$;

(3) $(\lambda\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}} = \lambda\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$;

(4) $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

例如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

两边取转置得到

$$(b_1, b_2, b_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = (c_1, c_2, c_3).$$

对称阵和反对称阵

定义.

对称阵和反对称阵

定义.

- 若方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$, 称 $\boldsymbol{A}$ 为对称阵;

对称阵和反对称阵

定义.

- 若方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$, 称 $\boldsymbol{A}$ 为对称阵;
- 若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$, 称 $\boldsymbol{A}$ 为反对称阵.

定义.

- 若方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$, 称 $\boldsymbol{A}$ 为**对称阵**;
- 若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$, 称 $\boldsymbol{A}$ 为**反对称阵**.

例如 $\begin{pmatrix} 12 & 6 & 1 \\ 6 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ 是对称阵.

定义.

- 若方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$, 称 $\boldsymbol{A}$ 为**对称阵**;
- 若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$, 称 $\boldsymbol{A}$ 为**反对称阵**.

例如 $\begin{pmatrix} 12 & 6 & 1 \\ 6 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ 是对称阵. 对角矩阵都是对称阵.

对称阵和反对称阵

定义.

- 若方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$, 称 $\boldsymbol{A}$ 为对称阵;
- 若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$, 称 $\boldsymbol{A}$ 为反对称阵.

例如 $\begin{pmatrix} 12 & 6 & 1 \\ 6 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ 是对称阵. 对角矩阵都是对称阵.

例如 $\begin{pmatrix} 0 & 6 & 1 \\ -6 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 是反对称阵.

对称阵和反对称阵

定义.

- 若方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$, 称 $\boldsymbol{A}$ 为对称阵;
- 若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$, 称 $\boldsymbol{A}$ 为反对称阵.

例如 $\begin{pmatrix} 12 & 6 & 1 \\ 6 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ 是对称阵. 对角矩阵都是对称阵.

例如 $\begin{pmatrix} 0 & 6 & 1 \\ -6 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 是反对称阵. 反对称阵的对角线均为 0.

例. 证明: 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{AB}$ 都是对称阵, 则 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$.

例. 证明：若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{AB}$ 都是对称阵，则 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$.

证明. 由题设可知 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}$,

$$\boldsymbol{AB} = (\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{BA}. \qquad \square$$

对称阵和反对称阵

例. 证明: 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{AB}$ 都是对称阵, 则 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$.

证明. 由题设可知 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}$,

$$\boldsymbol{AB} = (\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{BA}.$$

□

想一想: 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{AB}$ 中有一个对称阵和两个反对称阵呢?

例. 证明: 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{AB}$ 都是对称阵, 则 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$.

证明. 由题设可知 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}$,

$$\boldsymbol{AB} = (\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{BA}. \qquad \square$$

想一想: 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{AB}$ 中有一个对称阵和两个反对称阵呢? 同理 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$.

例. 证明: 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{AB}$ 都是对称阵, 则 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$.

证明. 由题设可知 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}$,

$$\boldsymbol{AB} = (\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{BA}. \qquad \square$$

想一想: 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{AB}$ 中有一个对称阵和两个反对称阵呢? 同理 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$.

练习. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, (　　)一定是对称阵?

(A) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$　　(B) $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$　　(C) $\boldsymbol{A}^2$　　(D) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{A}$

对称阵和反对称阵

例. 证明：若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{AB}$ 都是对称阵，则 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$.

证明. 由题设可知 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}$,

$$\boldsymbol{AB} = (\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{BA}.$$

□

想一想：若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{AB}$ 中有一个对称阵和两个反对称阵呢？同理 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$.

练习. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，(A)一定是对称阵？

(A) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$　　(B) $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$　　(C) $\boldsymbol{A}^2$　　(D) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{A}$

对称阵和反对称阵

例. 证明: 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{AB}$ 都是对称阵, 则 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$.

证明. 由题设可知 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}$,

$$\boldsymbol{AB} = (\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{BA}.$$

□

想一想: 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{AB}$ 中有一个对称阵和两个反对称阵呢? 同理 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$.

练习. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, (A)一定是对称阵?

(A) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ (B) $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ (C) $\boldsymbol{A}^2$ (D) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{A}$

一般地, 若 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}$, $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}$ 是 m 阶对称阵, $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是 n 阶对称阵.

例. 证明: 任一方阵均可写成一对称阵和一反对称阵之和.

例. 证明: 任一方阵均可写成一对称阵和一反对称阵之和.

证明.

$$A = \frac{A + A^{\mathrm{T}}}{2} + \frac{A - A^{\mathrm{T}}}{2}.$$

□

任一方阵可表为对称阵与反对称阵之和

例. 证明: 任一方阵均可写成一对称阵和一反对称阵之和.

证明.

$$A = \frac{A + A^{\mathrm{T}}}{2} + \frac{A - A^{\mathrm{T}}}{2}. \qquad \square$$

想一想:

任一方阵可表为对称阵与反对称阵之和

例. 证明: 任一方阵均可写成一对称阵和一反对称阵之和.

证明.

$$A = \frac{A + A^{\mathrm{T}}}{2} + \frac{A - A^{\mathrm{T}}}{2}. \qquad \square$$

想一想:

- 若函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称, 则 $f(x)$ 可以表示成一个偶函数和一个奇函数之和.

任一方阵可表为对称阵与反对称阵之和

例. 证明: 任一方阵均可写成一对称阵和一反对称阵之和.

证明.

$$\boldsymbol{A}=\frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}{2}+\frac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}{2}.$$

□

想一想:

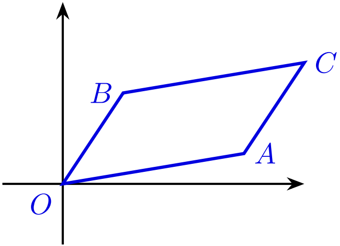
- 若函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称, 则 $f(x)$ 可以表示成一个偶函数和一个奇函数之和.
- 复数 z 可以写成 z_1+z_2, 其中 $\overline{z_1}=z_1, \overline{z_2}=-z_2$.

第三节　方阵的行列式

- 行列式的定义
- 行列式的性质
- 拉普拉斯展开
- 行列式的计算举例
- 三对角和范德蒙型行列式

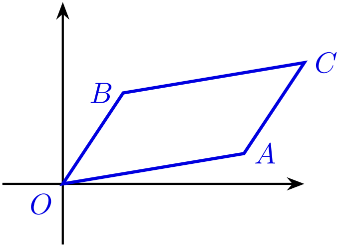
引例：平行四边形的面积

设平面上有 $\varnudge OACB$, 其中 A, B 坐标分别为 $\boldsymbol{u} = (a, b)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{v} = (c, d)^{\mathrm{T}}$.



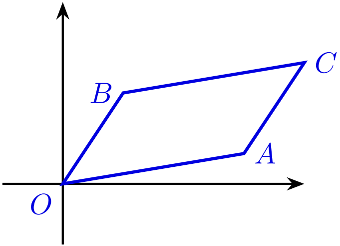
引例：平行四边形的面积

设平面上有 $\square OACB$, 其中 A, B 坐标分别为 $\boldsymbol{u}=(a,b)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{v}=(c,d)^{\mathrm{T}}$. 如果 $\boldsymbol{u}=(1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{v}=(0,1)^{\mathrm{T}}$, 那么面积为 1.



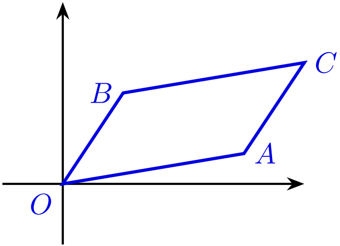
引例：平行四边形的面积

设平面上有 $\square OACB$, 其中 A, B 坐标分别为 $\boldsymbol{u}=(a,b)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{v}=(c,d)^{\mathrm{T}}$. 如果 $\boldsymbol{u}=(1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{v}=(0,1)^{\mathrm{T}}$, 那么面积为 1. 如果将 $\boldsymbol{u}$ 换成 $k\boldsymbol{u}$, 那么面积变为 $|k|$ 倍.

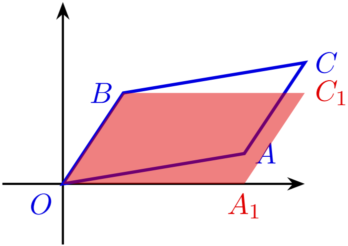


引例：平行四边形的面积

设平面上有 $\varparallelogram OACB$, 其中 A, B 坐标分别为 $\boldsymbol{u} = (a, b)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{v} = (c, d)^{\mathrm{T}}$. 如果 $\boldsymbol{u} = (1, 0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{v} = (0, 1)^{\mathrm{T}}$, 那么面积为 1. 如果将 $\boldsymbol{u}$ 换成 $k\boldsymbol{u}$, 那么面积变为 $|k|$ 倍. 如果将 $\boldsymbol{u}$ 拆分为 $(a, 0)^{\mathrm{T}} + (0, b)^{\mathrm{T}}$, 那么得到的三个平行四边形的面积有什么联系呢?



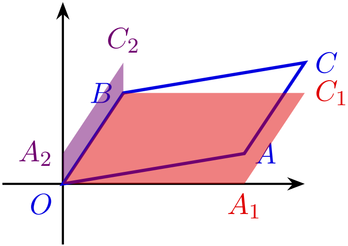
设平面上有 $\varOmega OACB$, 其中 A, B 坐标分别为 $\boldsymbol{u} = (a, b)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{v} = (c, d)^{\mathrm{T}}$. 如果 $\boldsymbol{u} = (1, 0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{v} = (0, 1)^{\mathrm{T}}$, 那么面积为 1. 如果将 $\boldsymbol{u}$ 换成 $k\boldsymbol{u}$, 那么面积变为 $|k|$ 倍. 如果将 $\boldsymbol{u}$ 拆分为 $(a, 0)^{\mathrm{T}} + (0, b)^{\mathrm{T}}$, 那么得到的三个平行四边形的面积有什么联系呢?



令 $A_1(a, 0)$, 并作 $\varOmega OA_1C_1B$;

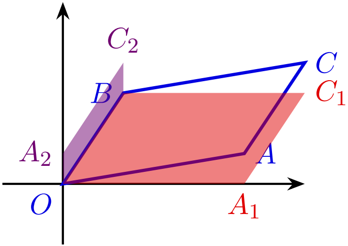
引例: 平行四边形的面积

设平面上有 $\square OACB$, 其中 A, B 坐标分别为 $\boldsymbol{u}=(a,b)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{v}=(c,d)^{\mathrm{T}}$. 如果 $\boldsymbol{u}=(1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{v}=(0,1)^{\mathrm{T}}$, 那么面积为 1. 如果将 $\boldsymbol{u}$ 换成 $k\boldsymbol{u}$, 那么面积变为 $|k|$ 倍. 如果将 $\boldsymbol{u}$ 拆分为 $(a,0)^{\mathrm{T}}+(0,b)^{\mathrm{T}}$, 那么得到的三个平行四边形的面积有什么联系呢?



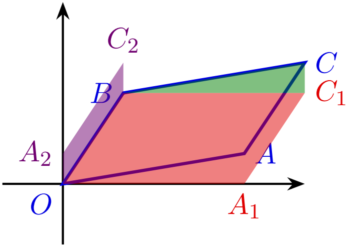
令 $A_1(a,0)$, 并作 $\square OA_1C_1B$; 令 $A_2(0,b)$, 并作 $\square OA_2C_2B$.

设平面上有 $\varrho OACB$, 其中 A, B 坐标分别为 $\boldsymbol{u}=(a,b)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{v}=(c,d)^{\mathrm{T}}$. 如果 $\boldsymbol{u}=(1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{v}=(0,1)^{\mathrm{T}}$, 那么面积为 1. 如果将 $\boldsymbol{u}$ 换成 $k\boldsymbol{u}$, 那么面积变为 $|k|$ 倍. 如果将 $\boldsymbol{u}$ 拆分为 $(a,0)^{\mathrm{T}}+(0,b)^{\mathrm{T}}$, 那么得到的三个平行四边形的面积有什么联系呢?



令 $A_1(a,0)$, 并作 ϱOA_1C_1B; 令 $A_2(0,b)$, 并作 ϱOA_2C_2B. 那么 $\varrho OACB$ 的面积是这两个相加还是相减?

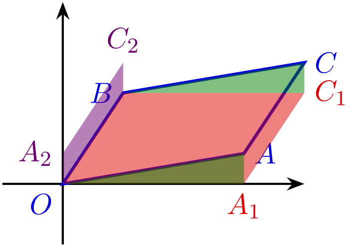
设平面上有 $\square OACB$, 其中 A, B 坐标分别为 $\boldsymbol{u} = (a, b)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{v} = (c, d)^{\mathrm{T}}$. 如果 $\boldsymbol{u} = (1, 0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{v} = (0, 1)^{\mathrm{T}}$, 那么面积为 1. 如果将 $\boldsymbol{u}$ 换成 $k\boldsymbol{u}$, 那么面积变为 $|k|$ 倍. 如果将 $\boldsymbol{u}$ 拆分为 $(a, 0)^{\mathrm{T}} + (0, b)^{\mathrm{T}}$, 那么得到的三个平行四边形的面积有什么联系呢?



令 $A_1(a, 0)$, 并作 $\square OA_1C_1B$; 令 $A_2(0, b)$, 并作 $\square OA_2C_2B$. 那么 $\square OACB$ 的面积是这两个相加还是相减?

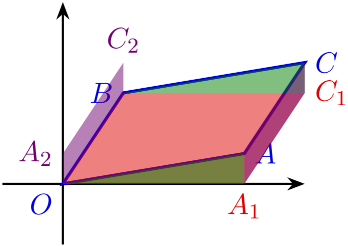
引例：平行四边形的面积

设平面上有 $\varnothing OACB$, 其中 A, B 坐标分别为 $\boldsymbol{u} = (a, b)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{v} = (c, d)^{\mathrm{T}}$. 如果 $\boldsymbol{u} = (1, 0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{v} = (0, 1)^{\mathrm{T}}$, 那么面积为 1. 如果将 $\boldsymbol{u}$ 换成 $k\boldsymbol{u}$, 那么面积变为 $|k|$ 倍. 如果将 $\boldsymbol{u}$ 拆分为 $(a, 0)^{\mathrm{T}} + (0, b)^{\mathrm{T}}$, 那么得到的三个平行四边形的面积有什么联系呢?



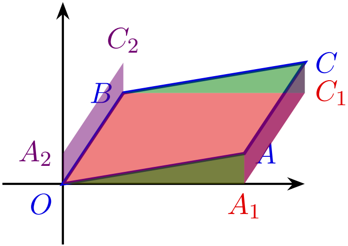
令 $A_1(a, 0)$, 并作 $\varnothing OA_1C_1B$; 令 $A_2(0, b)$, 并作 $\varnothing OA_2C_2B$. 那么 $\varnothing OACB$ 的面积是这两个相加还是相减?

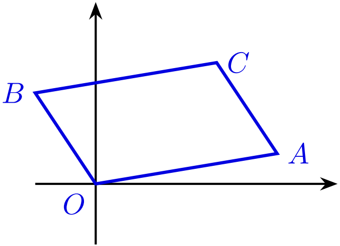
设平面上有 $\square OACB$, 其中 A, B 坐标分别为 $\boldsymbol{u}=(a,b)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{v}=(c,d)^{\mathrm{T}}$. 如果 $\boldsymbol{u}=(1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{v}=(0,1)^{\mathrm{T}}$, 那么面积为 1. 如果将 $\boldsymbol{u}$ 换成 $k\boldsymbol{u}$, 那么面积变为 $|k|$ 倍. 如果将 $\boldsymbol{u}$ 拆分为 $(a,0)^{\mathrm{T}}+(0,b)^{\mathrm{T}}$, 那么得到的三个平行四边形的面积有什么联系呢?



令 $A_1(a,0)$, 并作 $\square OA_1C_1B$; 令 $A_2(0,b)$, 并作 $\square OA_2C_2B$. 那么 $\square OACB$ 的面积是这两个相加还是相减? 使用割补法可知为**二者相减**.

设平面上有 $\square OACB$, 其中 A, B 坐标分别为 $\boldsymbol{u}=(a,b)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{v}=(c,d)^{\mathrm{T}}$. 如果 $\boldsymbol{u}=(1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{v}=(0,1)^{\mathrm{T}}$, 那么面积为 1. 如果将 $\boldsymbol{u}$ 换成 $k\boldsymbol{u}$, 那么面积变为 $|k|$ 倍. 如果将 $\boldsymbol{u}$ 拆分为 $(a,0)^{\mathrm{T}}+(0,b)^{\mathrm{T}}$, 那么得到的三个平行四边形的面积有什么联系呢?



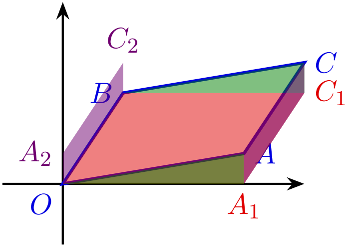


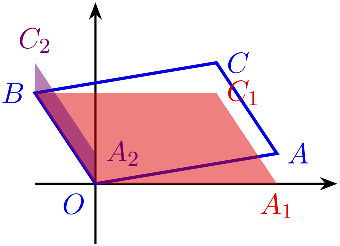
令 $A_1(a,0)$, 并作 $\square OA_1C_1B$; 令 $A_2(0,b)$, 并作 $\square OA_2C_2B$. 那么 $\square OACB$ 的面积是这两个相加还是相减? 使用割补法可知为二者相减.

如果 A 在第一象限, B 在第二象限.

引例：平行四边形的面积

设平面上有 $\square OACB$, 其中 A, B 坐标分别为 $\boldsymbol{u}=(a,b)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{v}=(c,d)^{\mathrm{T}}$. 如果 $\boldsymbol{u}=(1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{v}=(0,1)^{\mathrm{T}}$, 那么面积为 1. 如果将 $\boldsymbol{u}$ 换成 $k\boldsymbol{u}$, 那么面积变为 $|k|$ 倍. 如果将 $\boldsymbol{u}$ 拆分为 $(a,0)^{\mathrm{T}}+(0,b)^{\mathrm{T}}$, 那么得到的三个平行四边形的面积有什么联系呢?

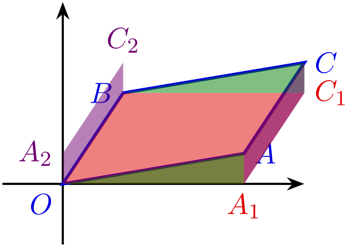


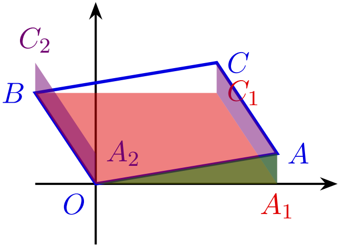


令 $A_1(a,0)$, 并作 $\square OA_1C_1B$; 令 $A_2(0,b)$, 并作 $\square OA_2C_2B$. 那么 $\square OACB$ 的面积是这两个相加还是相减? 使用割补法可知为**二者相减**.

如果 A 在第一象限, B 在第二象限. 那么 $\square OACB$ 的面积是这两个相加还是相减?

设平面上有 $\square OACB$, 其中 A, B 坐标分别为 $\boldsymbol{u}=(a,b)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{v}=(c,d)^{\mathrm{T}}$. 如果 $\boldsymbol{u}=(1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{v}=(0,1)^{\mathrm{T}}$, 那么面积为 1. 如果将 $\boldsymbol{u}$ 换成 $k\boldsymbol{u}$, 那么面积变为 $|k|$ 倍. 如果将 $\boldsymbol{u}$ 拆分为 $(a,0)^{\mathrm{T}}+(0,b)^{\mathrm{T}}$, 那么得到的三个平行四边形的面积有什么联系呢?

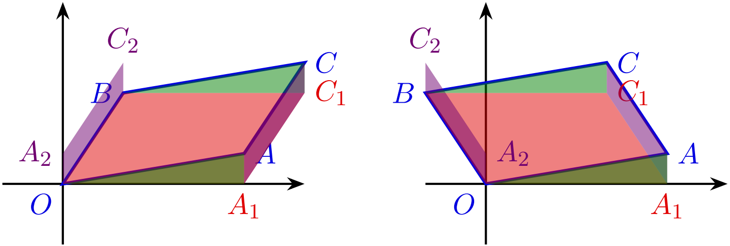




令 $A_1(a,0)$, 并作 $\square OA_1C_1B$; 令 $A_2(0,b)$, 并作 $\square OA_2C_2B$. 那么 $\square OACB$ 的面积是这两个相加还是相减? 使用割补法可知为**二者相减**.

如果 A 在第一象限, B 在第二象限. 那么 $\square OACB$ 的面积是这两个相加还是相减?

设平面上有 $\square OACB$, 其中 A, B 坐标分别为 $\boldsymbol{u}=(a,b)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{v}=(c,d)^{\mathrm{T}}$. 如果 $\boldsymbol{u}=(1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{v}=(0,1)^{\mathrm{T}}$, 那么面积为 1. 如果将 $\boldsymbol{u}$ 换成 $k\boldsymbol{u}$, 那么面积变为 $|k|$ 倍. 如果将 $\boldsymbol{u}$ 拆分为 $(a,0)^{\mathrm{T}}+(0,b)^{\mathrm{T}}$, 那么得到的三个平行四边形的面积有什么联系呢?



令 $A_1(a,0)$, 并作 $\square OA_1C_1B$; 令 $A_2(0,b)$, 并作 $\square OA_2C_2B$. 那么 $\square OACB$ 的面积是这两个相加还是相减? 使用割补法可知为二者相减.

如果 A 在第一象限, B 在第二象限. 那么 $\square OACB$ 的面积是这两个相加还是相减?使用割补法可知为二者相加.

为何第一种情形是相减而第二种情形是相加呢?

为何第一种情形是相减而第二种情形是相加呢? 观察发现: 这些平行四边形中只有第一种情形的 $\square OA_2C_2B$, 从 OA_2 到 OB 是顺时针方向.

为何第一种情形是相减而第二种情形是相加呢? 观察发现: 这些平行四边形中只有第一种情形的 $\square OA_2C_2B$, 从 OA_2 到 OB 是顺时针方向. 如果定义**有向面积**并记为

$$|\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}| = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \begin{cases} S_{\square OACB}, & \text{从 } OA \text{ 到 } OB \text{ 是逆时针;} \\ -S_{\square OACB}, & \text{从 } OA \text{ 到 } OB \text{ 是顺时针.} \end{cases}$$

为何第一种情形是相减而第二种情形是相加呢? 观察发现: 这些平行四边形中只有第一种情形的 $\square OA_2C_2B$, 从 OA_2 到 OB 是顺时针方向. 如果定义**有向面积**并记为

$$|\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}| = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \begin{cases} S_{\square OACB}, & \text{从 } OA \text{ 到 } OB \text{ 是逆时针;} \\ -S_{\square OACB}, & \text{从 } OA \text{ 到 } OB \text{ 是顺时针.} \end{cases}$$

那么

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & c \\ b & d \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & c \\ 0 & d \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} 0 & c \\ 1 & d \end{vmatrix}.$$

为何第一种情形是相减而第二种情形是相加呢? 观察发现: 这些平行四边形中只有第一种情形的 $\square OA_2C_2B$, 从 OA_2 到 OB 是顺时针方向. 如果定义**有向面积**并记为

$$|\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}| = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \begin{cases} S_{\square OACB}, & \text{从 } OA \text{ 到 } OB \text{ 是逆时针;} \\ -S_{\square OACB}, & \text{从 } OA \text{ 到 } OB \text{ 是顺时针.} \end{cases}$$

那么

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & c \\ b & d \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & c \\ 0 & d \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} 0 & c \\ 1 & d \end{vmatrix}.$$

换言之, $\boldsymbol{v}$ 固定时, 则 $|\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}|$ 关于 $\boldsymbol{u}$ 是线性的.

为何第一种情形是相减而第二种情形是相加呢? 观察发现: 这些平行四边形中只有第一种情形的 $\square OA_2C_2B$, 从 OA_2 到 OB 是顺时针方向. 如果定义**有向面积**并记为

$$|\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}| = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \begin{cases} S_{\square OACB}, & \text{从 } OA \text{ 到 } OB \text{ 是逆时针;} \\ -S_{\square OACB}, & \text{从 } OA \text{ 到 } OB \text{ 是顺时针.} \end{cases}$$

那么

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & c \\ b & d \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 1 & c \\ 0 & d \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} 0 & c \\ 1 & d \end{vmatrix}.$$

换言之, $\boldsymbol{v}$ 固定时, 则 $|\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}|$ 关于 $\boldsymbol{u}$ 是线性的. 同理, $\boldsymbol{u}$ 固定时, $|\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}|$ 关于 $\boldsymbol{v}$ 也是线性的.

将上述概念推广到 n 维情形.

平行多面体情形

将上述概念推广到 n 维情形. 考虑 n 维空间中由从原点出发的向量 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ 张成的平行多面体.

将上述概念推广到 n 维情形. 考虑 n 维空间中由从原点出发的向量 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ 张成的平行多面体. 如果 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ 就是按顺序各个分量上的单位向量

$$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)^{\mathrm{T}},$$

则有向面积为 1.

将上述概念推广到 n 维情形. 考虑 n 维空间中由从原点出发的向量 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ 张成的平行多面体. 如果 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ 就是按顺序各个分量上的单位向量

$$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, \dots, 0)^{\mathrm{T}}, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{e}_n = (0, 0, \dots, 1)^{\mathrm{T}},$$

则有向面积为 1. 如果交换 $\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j$ 的位置, 有向面积相差 -1 倍.

平行多面体情形

将上述概念推广到 n 维情形. 考虑 n 维空间中由从原点出发的向量 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ 张成的平行多面体. 如果 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ 就是按顺序各个分量上的单位向量

$$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)^{\mathrm{T}},$$

则有向面积为 1. 如果交换 $\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j$ 的位置, 有向面积相差 -1 倍. 于是得到 n 维情形的有向面积 $|\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n|$ 应当满足:

平行多面体情形

将上述概念推广到 n 维情形. 考虑 n 维空间中由从原点出发的向量 $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n$ 张成的平行多面体. 如果 $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n$ 就是按顺序各个分量上的单位向量

$$\boldsymbol{e}_1=(1,0,\dots,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{e}_2=(0,1,\dots,0)^{\mathrm{T}},\quad \cdots,\quad \boldsymbol{e}_n=(0,0,\dots,1)^{\mathrm{T}},$$

则有向面积为 1. 如果交换 $\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_j$ 的位置, 有向面积相差 -1 倍. 于是得到 n 维情形的有向面积 $|\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n|$ 应当满足:

(1) $|\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n|=1$;

平行多面体情形

将上述概念推广到 n 维情形. 考虑 n 维空间中由从原点出发的向量 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ 张成的平行多面体. 如果 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ 就是按顺序各个分量上的单位向量

$$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)^{\mathrm{T}},$$

则有向面积为 1. 如果交换 $\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j$ 的位置, 有向面积相差 -1 倍. 于是得到 n 维情形的有向面积 $|\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n|$ 应当满足:

(1) $|\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n| = 1$;

(2) 反对称性: $|\cdots, \boldsymbol{v}_i, \cdots, \boldsymbol{v}_j, \cdots| = -|\cdots, \boldsymbol{v}_j, \cdots, \boldsymbol{v}_i, \cdots|$;

平行多面体情形

将上述概念推广到 n 维情形. 考虑 n 维空间中由从原点出发的向量 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ 张成的平行多面体. 如果 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ 就是按顺序各个分量上的单位向量

$$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)^{\mathrm{T}},$$

则有向面积为 1. 如果交换 $\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j$ 的位置, 有向面积相差 -1 倍. 于是得到 n 维情形的有向面积 $|\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n|$ 应当满足:

(1) $|\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n| = 1$;

(2) 反对称性: $|\cdots, \boldsymbol{v}_i, \cdots, \boldsymbol{v}_j, \cdots| = -|\cdots, \boldsymbol{v}_j, \cdots, \boldsymbol{v}_i, \cdots|$;

(3) $|\cdots, k\boldsymbol{\alpha}, \cdots| = k|\cdots, \boldsymbol{\alpha}, \cdots|$;

将上述概念推广到 n 维情形. 考虑 n 维空间中由从原点出发的向量 $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n$ 张成的平行多面体. 如果 $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n$ 就是按顺序各个分量上的单位向量

$$\boldsymbol{e}_1=(1,0,\dots,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{e}_2=(0,1,\dots,0)^{\mathrm{T}},\quad \cdots,\quad \boldsymbol{e}_n=(0,0,\dots,1)^{\mathrm{T}},$$

则有向面积为 1. 如果交换 $\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_j$ 的位置, 有向面积相差 -1 倍. 于是得到 n 维情形的有向面积 $|\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n|$ 应当满足:

(1) $|\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n|=1$;

(2) 反对称性: $|\cdots,\boldsymbol{v}_i,\cdots,\boldsymbol{v}_j,\cdots|=-|\cdots,\boldsymbol{v}_j,\cdots,\boldsymbol{v}_i,\cdots|$;

(3) $|\cdots,k\boldsymbol{\alpha},\cdots|=k|\cdots,\boldsymbol{\alpha},\cdots|$;

(4) $|\cdots,\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\cdots|=|\cdots,\boldsymbol{\alpha},\cdots|+|\cdots,\boldsymbol{\beta},\cdots|$.

行列式的定义

设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 的各列形成的向量为 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$,

行列式的定义

设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 的各列形成的向量为 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$, 称有向面积 $|\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n|$ 就是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式.

设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 的各列形成的向量为 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$, 称有向面积 $|\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n|$ 就是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式. 注意到

$$\boldsymbol{v}_j = a_{1j}\boldsymbol{e}_1 + a_{2j}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_{nj}\boldsymbol{e}_n,$$

设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的各列形成的向量为 $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n$, 称有向面积 $|\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n|$ 就是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式. 注意到

$$\boldsymbol{v}_j=a_{1j}\boldsymbol{e}_1+a_{2j}\boldsymbol{e}_2+\cdots+a_{nj}\boldsymbol{e}_n,$$

利用线性性质将行列式展开将会得到 n^n 项

$$\sum_{k_1,k_2,\dots,k_n=1}^{n}|\boldsymbol{e}_{k_1},\cdots,\boldsymbol{e}_{k_n}|a_{k_1 1}a_{k_2 2}\cdots a_{k_n n}.$$

行列式的定义

设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的各列形成的向量为 $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n$, 称有向面积 $|\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n|$ 就是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式. 注意到

$$\boldsymbol{v}_j=a_{1j}\boldsymbol{e}_1+a_{2j}\boldsymbol{e}_2+\cdots+a_{nj}\boldsymbol{e}_n,$$

利用线性性质将行列式展开将会得到 n^n 项

$$\sum_{k_1,k_2,\ldots,k_n=1}^{n}|\boldsymbol{e}_{k_1},\cdots,\boldsymbol{e}_{k_n}|a_{k_1 1}a_{k_2 2}\cdots a_{k_n n}.$$

如果 $k_i=k_j$, 则交换 $\boldsymbol{e}_{k_i},\boldsymbol{e}_{k_j}$ 可知 $|\boldsymbol{e}_{k_1},\cdots,\boldsymbol{e}_{k_n}|=0$.

设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的各列形成的向量为 $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n$, 称有向面积 $|\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n|$ 就是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式. 注意到

$$\boldsymbol{v}_j=a_{1j}\boldsymbol{e}_1+a_{2j}\boldsymbol{e}_2+\cdots+a_{nj}\boldsymbol{e}_n,$$

利用线性性质将行列式展开将会得到 n^n 项

$$\sum_{k_1,k_2,\dots,k_n=1}^{n}|\boldsymbol{e}_{k_1},\cdots,\boldsymbol{e}_{k_n}|a_{k_1 1}a_{k_2 2}\cdots a_{k_n n}.$$

如果 $k_i=k_j$, 则交换 $\boldsymbol{e}_{k_i},\boldsymbol{e}_{k_j}$ 可知 $|\boldsymbol{e}_{k_1},\cdots,\boldsymbol{e}_{k_n}|=0$. 从而只剩下 $k_1,k_2,\dots,k_n$ 是 $1,2,\dots,n$ 的排列时的那些项.

行列式的定义

设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的各列形成的向量为 $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n$, 称有向面积 $|\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n|$ 就是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式. 注意到

$$\boldsymbol{v}_j=a_{1j}\boldsymbol{e}_1+a_{2j}\boldsymbol{e}_2+\cdots+a_{nj}\boldsymbol{e}_n,$$

利用线性性质将行列式展开将会得到 n^n 项

$$\sum_{k_1,k_2,\ldots,k_n=1}^{n}|\boldsymbol{e}_{k_1},\cdots,\boldsymbol{e}_{k_n}|a_{k_1 1}a_{k_2 2}\cdots a_{k_n n}.$$

如果 $k_i=k_j$, 则交换 $\boldsymbol{e}_{k_i},\boldsymbol{e}_{k_j}$ 可知 $|\boldsymbol{e}_{k_1},\cdots,\boldsymbol{e}_{k_n}|=0$. 从而只剩下 $k_1,k_2,\ldots,k_n$ 是 $1,2,\ldots,n$ 的排列时的那些项. 例如:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}&=|a_{11}\boldsymbol{e}_1,a_{12}\boldsymbol{e}_1+a_{22}\boldsymbol{e}_2|+|a_{21}\boldsymbol{e}_2,a_{12}\boldsymbol{e}_1+a_{22}\boldsymbol{e}_2|\\&=a_{11}a_{12}|\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1|+a_{11}a_{22}|\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2|+a_{21}a_{12}|\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1|+a_{21}a_{22}|\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2|\\&=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}.\end{aligned}$$

设 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 是 $1, 2, \ldots, n$ 的排列.

行列式的展开形式

设 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 是 $1, 2, \ldots, n$ 的排列. 如果排列 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 需要奇数次对换变成 $1, 2, \ldots, n$, 记 $\operatorname{sgn}(k_1, \ldots, k_n) = -1$; 否则 $\operatorname{sgn}(k_1, \ldots, k_n) = +1$.

行列式的展开形式

设 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 是 $1, 2, \ldots, n$ 的排列. 如果排列 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 需要奇数次对换变成 $1, 2, \ldots, n$, 记 $\operatorname{sgn}(k_1, \ldots, k_n) = -1$; 否则 $\operatorname{sgn}(k_1, \ldots, k_n) = +1$. 根据反对称性,

$$|\boldsymbol{e}_{k_1}, \cdots, \boldsymbol{e}_{k_n}| = \operatorname{sgn}(k_1, \ldots, k_n)|\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n| = \operatorname{sgn}(k_1, \ldots, k_n).$$

设 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 是 $1, 2, \ldots, n$ 的排列. 如果排列 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 需要奇数次对换变成 $1, 2, \ldots, n$, 记 $\operatorname{sgn}(k_1, \ldots, k_n) = -1$; 否则 $\operatorname{sgn}(k_1, \ldots, k_n) = +1$. 根据反对称性,

$$|\boldsymbol{e}_{k_1}, \cdots, \boldsymbol{e}_{k_n}| = \operatorname{sgn}(k_1, \ldots, k_n)|\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n| = \operatorname{sgn}(k_1, \ldots, k_n).$$

定义. 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 是 n 阶方阵. 定义 $\boldsymbol{A}$ 的**行列式**为

$$|\boldsymbol{A}| = \sum \operatorname{sgn}(k_1, \ldots, k_n) a_{k_1 1} a_{k_2 2} \cdots a_{k_n n},$$

其中 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 取遍 $1, 2, \ldots, n$ 的全体排列.

$2, 3$ 阶行列式

当 $n = 2$ 时, $\operatorname{sgn}(12) = 1, \operatorname{sgn}(21) = -1,$

当 $n = 2$ 时, $\operatorname{sgn}(12) = 1, \operatorname{sgn}(21) = -1$, 于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

当 $n=2$ 时, $\operatorname{sgn}(12)=1, \operatorname{sgn}(21)=-1$, 于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

当 $n = 2$ 时, $\operatorname{sgn}(12) = 1, \operatorname{sgn}(21) = -1$, 于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

当 $n = 3$ 时,

$$\operatorname{sgn}(123) = \operatorname{sgn}(231) = \operatorname{sgn}(312) = 1,$$

$$\operatorname{sgn}(132) = \operatorname{sgn}(213) = \operatorname{sgn}(321) = -1,$$

当 $n=2$ 时, $\operatorname{sgn}(12)=1, \operatorname{sgn}(21)=-1$, 于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

当 $n=3$ 时,

$$\operatorname{sgn}(123)=\operatorname{sgn}(231)=\operatorname{sgn}(312)=1,$$

$$\operatorname{sgn}(132)=\operatorname{sgn}(213)=\operatorname{sgn}(321)=-1,$$

于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

当 $n=2$ 时, $\mathrm{sgn}(12)=1, \mathrm{sgn}(21)=-1$, 于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

当 $n=3$ 时,

$$\mathrm{sgn}(123)=\mathrm{sgn}(231)=\mathrm{sgn}(312)=1,$$

$$\mathrm{sgn}(132)=\mathrm{sgn}(213)=\mathrm{sgn}(321)=-1,$$

于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

当 $n=2$ 时, $\operatorname{sgn}(12)=1, \operatorname{sgn}(21)=-1$, 于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

当 $n=3$ 时,

$$\operatorname{sgn}(123)=\operatorname{sgn}(231)=\operatorname{sgn}(312)=1,$$

$$\operatorname{sgn}(132)=\operatorname{sgn}(213)=\operatorname{sgn}(321)=-1,$$

于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

当 $n=2$ 时, $\operatorname{sgn}(12)=1, \operatorname{sgn}(21)=-1$, 于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

当 $n=3$ 时,

$$\operatorname{sgn}(123)=\operatorname{sgn}(231)=\operatorname{sgn}(312)=1,$$

$$\operatorname{sgn}(132)=\operatorname{sgn}(213)=\operatorname{sgn}(321)=-1,$$

于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

当 $n=2$ 时, $\operatorname{sgn}(12)=1, \operatorname{sgn}(21)=-1$, 于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

当 $n=3$ 时,

$$\operatorname{sgn}(123)=\operatorname{sgn}(231)=\operatorname{sgn}(312)=1,$$

$$\operatorname{sgn}(132)=\operatorname{sgn}(213)=\operatorname{sgn}(321)=-1,$$

于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

当 $n=2$ 时, $\operatorname{sgn}(12)=1, \operatorname{sgn}(21)=-1$, 于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

当 $n=3$ 时,

$$\operatorname{sgn}(123)=\operatorname{sgn}(231)=\operatorname{sgn}(312)=1,$$

$$\operatorname{sgn}(132)=\operatorname{sgn}(213)=\operatorname{sgn}(321)=-1,$$

于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

当 $n=2$ 时, $\operatorname{sgn}(12)=1, \operatorname{sgn}(21)=-1$, 于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

当 $n=3$ 时,

$$\operatorname{sgn}(123)=\operatorname{sgn}(231)=\operatorname{sgn}(312)=1,$$

$$\operatorname{sgn}(132)=\operatorname{sgn}(213)=\operatorname{sgn}(321)=-1,$$

于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

例.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

例.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot(-5)\cdot 4 + 3\cdot 1\cdot 2 + 2\cdot 3\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot 1 - 3\cdot 3\cdot 4 - 2\cdot(-5)\cdot 2$$

例.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot(-5)\cdot 4 + 3\cdot 1\cdot 2 + 2\cdot 3\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot 1 - 3\cdot 3\cdot 4 - 2\cdot(-5)\cdot 2$$

$$= -20 + 6 + 6 - 1 - 36 + 20 = -25.$$

例.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot(-5)\cdot 4 + 3\cdot 1\cdot 2 + 2\cdot 3\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot 1 - 3\cdot 3\cdot 4 - 2\cdot(-5)\cdot 2$$

$$= -20 + 6 + 6 - 1 - 36 + 20 = -25.$$

练习. 若 $k > 0$ 且 $\begin{vmatrix} k & 2 & 1 \\ 2 & k & 1 \\ k & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$, 则 $k =$______.

例.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot(-5)\cdot 4 + 3\cdot 1\cdot 2 + 2\cdot 3\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot 1 - 3\cdot 3\cdot 4 - 2\cdot(-5)\cdot 2$$

$$= -20 + 6 + 6 - 1 - 36 + 20 = -25.$$

练习. 若 $k > 0$ 且 $\begin{vmatrix} k & 2 & 1 \\ 2 & k & 1 \\ k & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$, 则 $k =$ ____2____.

注记

(1) 行列式将一个方阵映射到一个数.

(1) 行列式将一个方阵映射到一个数.

(2) 1 阶行列式就是方阵里面唯一的那个元素, 尽管也记作 $|\cdot|$, 但注意和绝对值区分.

(1) 行列式将一个方阵映射到一个数.

(2) 1 阶行列式就是方阵里面唯一的那个元素, 尽管也记作 $|\cdot|$, 但注意和绝对值区分.

(3) $2, 3$ 阶行列式可以用对角线法直接得到展开式, 但是更高阶的没有这种表示方法.

注记

(1) 行列式将一个方阵映射到一个数.

(2) 1 阶行列式就是方阵里面唯一的那个元素, 尽管也记作 $|\cdot|$, 但注意和绝对值区分.

(3) $2, 3$ 阶行列式可以用对角线法直接得到展开式, 但是更高阶的没有这种表示方法.

(4) **对角阵**的行列式

$$\left|\mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)\right| = a_1 a_2 \cdots a_n,$$

特别地 $|\boldsymbol{E}_n| = 1, |\boldsymbol{O}_n| = 0.$

(1) 行列式将一个方阵映射到一个数.

(2) 1 阶行列式就是方阵里面唯一的那个元素, 尽管也记作 $|\cdot|$, 但注意和绝对值区分.

(3) $2,3$ 阶行列式可以用对角线法直接得到展开式, 但是更高阶的没有这种表示方法.

(4) 对角阵的行列式

$$\left|\operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)\right| = a_1 a_2 \cdots a_n,$$

特别地 $|\boldsymbol{E}_n| = 1, |\boldsymbol{O}_n| = 0$.

(5) $|\boldsymbol{A}|$ 是由一些 $\pm a_{k_1 1} a_{k_2 2} \cdots a_{k_n n}$ 相加得到, 其中 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 取遍 $1, 2, \ldots, n$ 的所有排列, 一共有 $n!$ 个这样的项, 其中一半取 $+$, 一半取 $-$ $(n \geqslant 2)$.

注记

(1) 行列式将一个方阵映射到一个数.

(2) 1 阶行列式就是方阵里面唯一的那个元素, 尽管也记作 $|\cdot|$, 但注意和绝对值区分.

(3) $2,3$ 阶行列式可以用对角线法直接得到展开式, 但是更高阶的没有这种表示方法.

(4) 对角阵的行列式

$$\left|\mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)\right| = a_1 a_2 \cdots a_n,$$

特别地 $|\boldsymbol{E}_n| = 1, |\boldsymbol{O}_n| = 0$.

(5) $|\boldsymbol{A}|$ 是由一些 $\pm a_{k_1 1} a_{k_2 2} \cdots a_{k_n n}$ 相加得到, 其中 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 取遍 $1, 2, \ldots, n$ 的所有排列, 一共有 $n!$ 个这样的项, 其中一半取 $+$, 一半取 $-$ $(n \geqslant 2)$.

(6) $|\boldsymbol{A}|$ 对应的线性变换 (常数倍) 是 $\boldsymbol{A}$ 对应的线性变换 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 诱导的 n 次外代数上的线性变换 $\bigwedge^n \mathbb{R}^n \to \bigwedge^n \mathbb{R}^n$, 感兴趣的可自行阅读有关材料.

行列式的乘性

(1) $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}|$.

行列式的乘性

(1) $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}|$.

证明. 设 $f(\boldsymbol{X}) := |\boldsymbol{AX}|$, 即 $f(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = |\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_n|$.

□

行列式的乘性

(1) $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}|$.

证明. 设 $f(\boldsymbol{X}) := |\boldsymbol{AX}|$, 即 $f(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = |\boldsymbol{Av}_1, \ldots, \boldsymbol{Av}_n|$. 容易知道 f 也满足反对称性, 且对任意 $\boldsymbol{v}_i$ 是线性的. □

(1) $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}|$.

证明. 设 $f(\boldsymbol{X}) := |\boldsymbol{AX}|$, 即 $f(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = |\boldsymbol{Av}_1, \ldots, \boldsymbol{Av}_n|$. 容易知道 f 也满足反对称性, 且对任意 $\boldsymbol{v}_i$ 是线性的. 类似于行列式展开可知, 对于 $\boldsymbol{X} = (a_{ij})$,

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{X}) &= \sum f(\boldsymbol{e}_{k_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{k_n}) a_{k_1 1} a_{k_2 2} \cdots a_{k_n n} \\
&= \sum f(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) \operatorname{sgn}(k_1, \ldots, k_n) a_{k_1 1} a_{k_2 2} \cdots a_{k_n n} \\
&= f(\boldsymbol{E}) |\boldsymbol{X}| = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{X}|,
\end{aligned}
$$

其中 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 取遍 $1, 2, \ldots, n$ 的全体排列. □

(1) $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}|$.

证明. 设 $f(\boldsymbol{X}) := |\boldsymbol{AX}|$, 即 $f(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = |\boldsymbol{Av}_1, \ldots, \boldsymbol{Av}_n|$. 容易知道 f 也满足反对称性, 且对任意 $\boldsymbol{v}_i$ 是线性的. 类似于行列式展开可知, 对于 $\boldsymbol{X} = (a_{ij})$,

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{X}) &= \sum f(\boldsymbol{e}_{k_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{k_n}) a_{k_1 1} a_{k_2 2} \cdots a_{k_n n} \\
&= \sum f(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) \operatorname{sgn}(k_1, \ldots, k_n) a_{k_1 1} a_{k_2 2} \cdots a_{k_n n} \\
&= f(\boldsymbol{E}) |\boldsymbol{X}| = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{X}|,
\end{aligned}
$$

其中 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 取遍 $1, 2, \ldots, n$ 的全体排列. 故 $|\boldsymbol{AB}| = f(\boldsymbol{B}) = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}|$. □

(1) $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}|$.

证明. 设 $f(\boldsymbol{X}) := |\boldsymbol{AX}|$, 即 $f(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = |\boldsymbol{Av}_1, \ldots, \boldsymbol{Av}_n|$. 容易知道 f 也满足反对称性, 且对任意 $\boldsymbol{v}_i$ 是线性的. 类似于行列式展开可知, 对于 $\boldsymbol{X} = (a_{ij})$,

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{X}) &= \sum f(\boldsymbol{e}_{k_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{k_n}) a_{k_1 1} a_{k_2 2} \cdots a_{k_n n} \\ &= \sum f(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) \operatorname{sgn}(k_1, \ldots, k_n) a_{k_1 1} a_{k_2 2} \cdots a_{k_n n} \\ &= f(\boldsymbol{E}) |\boldsymbol{X}| = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{X}|, \end{aligned}$$

其中 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 取遍 $1, 2, \ldots, n$ 的全体排列. 故 $|\boldsymbol{AB}| = f(\boldsymbol{B}) = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}|$. □

由此可知, 对于平行多面体 $V \subset \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{A}$ 对应的线性映射将其面积变为 $|\boldsymbol{A}|$ 倍.

例：行列式的乘性

例. 证明：
$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

例：行列式的乘性

例. 证明：
$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

证明.
$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$
□

例：行列式的乘性

例. 证明：$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$

证明.

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

□

行列式的转置不变性

行列式的转置不变性

(2) **转置不改变行列式:** $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{A}|$.

(2) **转置不改变行列式:** $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{A}|$.

一个排列 $k_1, \ldots, k_n$ 可以看成是集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 到自身的双射 $i \mapsto k_i$.

(2) **转置不改变行列式: $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{A}|$.**

一个排列 $k_1, \ldots, k_n$ 可以看成是集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 到自身的双射 $i \mapsto k_i$. 设它的逆映射对应的排列是 $\ell_1, \ldots, \ell_n$, 则 $\ell_{k_i} = i$.

行列式的转置不变性

(2) **转置不改变行列式: $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{A}|$.**

一个排列 $k_1, \ldots, k_n$ 可以看成是集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 到自身的双射 $i \mapsto k_i$. 设它的逆映射对应的排列是 $\ell_1, \ldots, \ell_n$, 则 $\ell_{k_i} = i$. 由于

$$|\boldsymbol{A}| = \sum \operatorname{sgn}(k_1, \ldots, k_n) a_{k_1 1} \cdots a_{k_n n} = \sum \operatorname{sgn}(k_1, \ldots, k_n) a_{1\ell_1} \cdots a_{n\ell_n},$$

$$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = \sum \operatorname{sgn}(\ell_1, \ldots, \ell_n) a_{1\ell_1} \cdots a_{n\ell_n},$$

行列式的转置不变性

(2) **转置不改变行列式: $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{A}|$.**

一个排列 $k_1, \ldots, k_n$ 可以看成是集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 到自身的双射 $i \mapsto k_i$. 设它的逆映射对应的排列是 $\ell_1, \ldots, \ell_n$, 则 $\ell_{k_i} = i$. 由于

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{A}| &= \sum \operatorname{sgn}(k_1, \ldots, k_n) a_{k_1 1} \cdots a_{k_n n} = \sum \operatorname{sgn}(k_1, \ldots, k_n) a_{1\ell_1} \cdots a_{n\ell_n}, \\
|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| &= \sum \operatorname{sgn}(\ell_1, \ldots, \ell_n) a_{1\ell_1} \cdots a_{n\ell_n},
\end{aligned}
$$

我们只需说明 $\operatorname{sgn}(k_1, \ldots, k_n) = \operatorname{sgn}(\ell_1, \ldots, \ell_n)$.

(2) **转置不改变行列式: $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{A}|$.**

一个排列 $k_1, \ldots, k_n$ 可以看成是集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 到自身的双射 $i \mapsto k_i$. 设它的逆映射对应的排列是 $\ell_1, \ldots, \ell_n$, 则 $\ell_{k_i} = i$. 由于

$$|\boldsymbol{A}| = \sum \operatorname{sgn}(k_1, \ldots, k_n) a_{k_1 1} \cdots a_{k_n n} = \sum \operatorname{sgn}(k_1, \ldots, k_n) a_{1\ell_1} \cdots a_{n\ell_n},$$
$$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = \sum \operatorname{sgn}(\ell_1, \ldots, \ell_n) a_{1\ell_1} \cdots a_{n\ell_n},$$

我们只需说明 $\operatorname{sgn}(k_1, \ldots, k_n) = \operatorname{sgn}(\ell_1, \ldots, \ell_n)$. 设

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{e}_{k_1}, \boldsymbol{e}_{k_2}, \ldots, \boldsymbol{e}_{k_n})$$

的 k_i 行 i 列为 1, 其余项为零.

(2) **转置不改变行列式: $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$.**

一个排列 $k_1,\dots,k_n$ 可以看成是集合 $\{1,2,\dots,n\}$ 到自身的双射 $i\mapsto k_i$. 设它的逆映射对应的排列是 $\ell_1,\dots,\ell_n$, 则 $\ell_{k_i}=i$. 由于

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{A}|&=\sum\operatorname{sgn}(k_1,\dots,k_n)a_{k_1 1}\cdots a_{k_n n}=\sum\operatorname{sgn}(k_1,\dots,k_n)a_{1\ell_1}\cdots a_{n\ell_n},\\
|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|&=\sum\operatorname{sgn}(\ell_1,\dots,\ell_n)a_{1\ell_1}\cdots a_{n\ell_n},
\end{aligned}
$$

我们只需说明 $\operatorname{sgn}(k_1,\dots,k_n)=\operatorname{sgn}(\ell_1,\dots,\ell_n)$. 设

$$
\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e}_{k_1},\boldsymbol{e}_{k_2},\dots,\boldsymbol{e}_{k_n})
$$

的 k_i 行 i 列为 1, 其余项为零. 那么 $|\boldsymbol{P}|=\operatorname{sgn}(k_1,\dots,k_n)$, $|\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}|=\operatorname{sgn}(\ell_1,\dots,\ell_n)$.

(2) **转置不改变行列式: $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{A}|$.**

一个排列 $k_1, \ldots, k_n$ 可以看成是集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 到自身的双射 $i \mapsto k_i$. 设它的逆映射对应的排列是 $\ell_1, \ldots, \ell_n$, 则 $\ell_{k_i} = i$. 由于

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{A}| &= \sum \operatorname{sgn}(k_1, \ldots, k_n) a_{k_1 1} \cdots a_{k_n n} = \sum \operatorname{sgn}(k_1, \ldots, k_n) a_{1\ell_1} \cdots a_{n\ell_n}, \\ |\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| &= \sum \operatorname{sgn}(\ell_1, \ldots, \ell_n) a_{1\ell_1} \cdots a_{n\ell_n}, \end{aligned}$$

我们只需说明 $\operatorname{sgn}(k_1, \ldots, k_n) = \operatorname{sgn}(\ell_1, \ldots, \ell_n)$. 设

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{e}_{k_1}, \boldsymbol{e}_{k_2}, \ldots, \boldsymbol{e}_{k_n})$$

的 k_i 行 i 列为 1, 其余项为零. 那么 $|\boldsymbol{P}| = \operatorname{sgn}(k_1, \ldots, k_n)$, $|\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}| = \operatorname{sgn}(\ell_1, \ldots, \ell_n)$. 由于 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{E}$, 因此 $|\boldsymbol{P}| \cdot |\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{E}| = 1$.

(2) **转置不改变行列式: $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{A}|$.**

一个排列 $k_1, \ldots, k_n$ 可以看成是集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 到自身的双射 $i \mapsto k_i$. 设它的逆映射对应的排列是 $\ell_1, \ldots, \ell_n$, 则 $\ell_{k_i} = i$. 由于

$$|\boldsymbol{A}| = \sum \operatorname{sgn}(k_1, \ldots, k_n) a_{k_1 1} \cdots a_{k_n n} = \sum \operatorname{sgn}(k_1, \ldots, k_n) a_{1\ell_1} \cdots a_{n\ell_n},$$
$$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = \sum \operatorname{sgn}(\ell_1, \ldots, \ell_n) a_{1\ell_1} \cdots a_{n\ell_n},$$

我们只需说明 $\operatorname{sgn}(k_1, \ldots, k_n) = \operatorname{sgn}(\ell_1, \ldots, \ell_n)$. 设

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{e}_{k_1}, \boldsymbol{e}_{k_2}, \ldots, \boldsymbol{e}_{k_n})$$

的 k_i 行 i 列为 1, 其余项为零. 那么 $|\boldsymbol{P}| = \operatorname{sgn}(k_1, \ldots, k_n)$, $|\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}| = \operatorname{sgn}(\ell_1, \ldots, \ell_n)$. 由于 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{E}$, 因此 $|\boldsymbol{P}| \cdot |\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{E}| = 1$. 而 $|\boldsymbol{P}| = \pm 1$, 因此 $|\boldsymbol{P}| = |\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}|$.

例: 方阵的行列式

例. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$, 求 $|\boldsymbol{A}|$.

例：方阵的行列式

例. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$，求 $|\boldsymbol{A}|$.

解答. 这题可以直接硬算，不过我们可以利用一点小技巧：

例：方阵的行列式

例. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$，求 $|\boldsymbol{A}|$.

解答. 这题可以直接硬算，不过我们可以利用一点小技巧：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix}=(a^2+b^2+c^2+d^2)\boldsymbol{E}.$$

例：方阵的行列式

例. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$，求 $|\boldsymbol{A}|$.

解答. 这题可以直接硬算，不过我们可以利用一点小技巧：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix}=(a^2+b^2+c^2+d^2)\boldsymbol{E}.$$

因此 $|\boldsymbol{A}|=\pm(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$.

例. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$，求 $|\boldsymbol{A}|$.

解答. 这题可以直接硬算，不过我们可以利用一点小技巧：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix}=(a^2+b^2+c^2+d^2)\boldsymbol{E}.$$

因此 $|\boldsymbol{A}|=\pm(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$. 因为 $|\boldsymbol{A}|$ 一定有 a^4 项，所以 $|\boldsymbol{A}|=(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$.

再根据行列式关于每个列向量的线性性和反对称性有:

行列式线性性

再根据行列式关于每个列向量的线性性和反对称性有:

再根据行列式关于每个列向量的线性性和反对称性有:

(3) **互换两行 (列) 后, 方阵的行列式变为 -1 倍.**

行列式线性性

再根据行列式关于每个列向量的线性性和反对称性有:

(3) **互换两行 (列) 后, 方阵的行列式变为 -1 倍.**

(4) **方阵的某一行 (列) 乘 k 后, 方阵的行列式变为 k 倍.**

再根据行列式关于每个列向量的线性性和反对称性有:

(3) **互换两行 (列) 后, 方阵的行列式变为 -1 倍.**

(4) **方阵的某一行 (列) 乘 k 后, 方阵的行列式变为 k 倍.**

(5) **将方阵某一行 (列) 对应向量写成两个向量之和, 则行列式也可对应拆成两个行列式之和.**

再根据行列式关于每个列向量的线性性和反对称性有:

(3) **互换两行 (列) 后, 方阵的行列式变为 -1 倍.**

(4) **方阵的某一行 (列) 乘 k 后, 方阵的行列式变为 k 倍.**

(5) **将方阵某一行 (列) 对应向量写成两个向量之和, 则行列式也可对应拆成两个行列式之和.**

推论.

行列式线性性

再根据行列式关于每个列向量的线性性和反对称性有:

(3) 互换两行 (列) 后, 方阵的行列式变为 -1 倍.

(4) 方阵的某一行 (列) 乘 k 后, 方阵的行列式变为 k 倍.

(5) 将方阵某一行 (列) 对应向量写成两个向量之和, 则行列式也可对应拆成两个行列式之和.

推论.

(1) 具有相同的两行 (列) 的方阵的行列式为零: $|\cdots, \boldsymbol{v}, \cdots, \boldsymbol{v}, \cdots| = 0$.

再根据行列式关于每个列向量的线性性和反对称性有:

(3) **互换两行 (列) 后, 方阵的行列式变为 -1 倍.**
(4) **方阵的某一行 (列) 乘 k 后, 方阵的行列式变为 k 倍.**
(5) **将方阵某一行 (列) 对应向量写成两个向量之和, 则行列式也可对应拆成两个行列式之和.**

推论.
(1) **具有相同的两行 (列) 的方阵的行列式为零:** $|\cdots,\boldsymbol{v},\cdots,\boldsymbol{v},\cdots|=0$.
(2) **若方阵有一行 (列) 全为零, 则行列式为零:** $|\cdots,\boldsymbol{0},\cdots|=0$.

再根据行列式关于每个列向量的线性性和反对称性有:

(3) 互换两行 (列) 后, 方阵的行列式变为 -1 倍.

(4) 方阵的某一行 (列) 乘 k 后, 方阵的行列式变为 k 倍.

(5) 将方阵某一行 (列) 对应向量写成两个向量之和, 则行列式也可对应拆成两个行列式之和.

推论.

(1) 具有相同的两行 (列) 的方阵的行列式为零: $|\cdots, \boldsymbol{v}, \cdots, \boldsymbol{v}, \cdots| = 0$.

(2) 若方阵有一行 (列) 全为零, 则行列式为零: $|\cdots, \mathbf{0}, \cdots| = 0$.

(3) 若方阵有两行 (列) 成比例, 则行列式为零: $|\cdots, \boldsymbol{v}, \cdots, k\boldsymbol{v}, \cdots| = 0$.

再根据行列式关于每个列向量的线性性和反对称性有:

(3) 互换两行 (列) 后, 方阵的行列式变为 -1 倍.
(4) 方阵的某一行 (列) 乘 k 后, 方阵的行列式变为 k 倍.
(5) 将方阵某一行 (列) 对应向量写成两个向量之和, 则行列式也可对应拆成两个行列式之和.

推论.

(1) 具有相同的两行 (列) 的方阵的行列式为零: $|\cdots,\boldsymbol{v},\cdots,\boldsymbol{v},\cdots|=0$.
(2) 若方阵有一行 (列) 全为零, 则行列式为零: $|\cdots,\boldsymbol{0},\cdots|=0$.
(3) 若方阵有两行 (列) 成比例, 则行列式为零: $|\cdots,\boldsymbol{v},\cdots,k\boldsymbol{v},\cdots|=0$.
(4) 行列式中某一行 (列) 的公因子可以提到行列式外面.

初等变换

计算行列式可以通过实施下列变换来化简:

计算行列式可以通过实施下列变换来化简:

定义.初等变换

计算行列式可以通过实施下列变换来化简:

定义.初等变换

(1) **互换两行 (列):** $r_i \leftrightarrow r_j, c_i \leftrightarrow c_j$, **行列式变号;**

计算行列式可以通过实施下列变换来化简:

定义.初等变换

(1) **互换两行 (列): $\boldsymbol{r_i \leftrightarrow r_j, c_i \leftrightarrow c_j}$, 行列式变号;**

(2) **一行 (列) 乘非零常数 k: $\boldsymbol{kr_i, kc_i}$, 行列式变为 k 倍;**

计算行列式可以通过实施下列变换来化简:

定义.初等变换

(1) 互换两行 (列): $\boldsymbol{r_i \leftrightarrow r_j, c_i \leftrightarrow c_j}$, 行列式变号;

(2) 一行 (列) 乘**非零常数** k: $\boldsymbol{kr_i, kc_i}$, 行列式变为 k 倍;

(3) j 行 (列) 乘 k 加到 i 行 (列): $\boldsymbol{r_i + kr_j, c_i + kc_j}$, 行列式不变.

计算行列式可以通过实施下列变换来化简:

定义.初等变换

(1) **互换两行 (列): $r_i \leftrightarrow r_j, c_i \leftrightarrow c_j$, 行列式变号;**

(2) **一行 (列) 乘非零常数 k: kr_i, kc_i, 行列式变为 k 倍;**

(3) **j 行 (列) 乘 k 加到 i 行 (列): $r_i + kr_j, c_i + kc_j$, 行列式不变.**

实施第三类初等变换 $c_i + kc_j$ 时, 第 j 列不变, 改变的是第 i 列.

初等变换

计算行列式可以通过实施下列变换来化简:

定义.初等变换

(1) **互换两行 (列): $\boldsymbol{r_i \leftrightarrow r_j, c_i \leftrightarrow c_j}$, 行列式变号;**

(2) **一行 (列) 乘非零常数 k: $\boldsymbol{kr_i, kc_i}$, 行列式变为 k 倍;**

(3) **j 行 (列) 乘 k 加到 i 行 (列): $\boldsymbol{r_i + kr_j, c_i + kc_j}$, 行列式不变.**

实施第三类初等变换 $c_i + kc_j$ 时, 第 j 列不变, 改变的是第 i 列. 由于

$$\begin{aligned} \left|\cdots, \boldsymbol{v}_i, \cdots, \boldsymbol{v}_j, \cdots\right| &= \left|\cdots, \boldsymbol{v}_i, \cdots, \boldsymbol{v}_j, \cdots\right| + \left|\cdots, k\boldsymbol{v}_j, \cdots, \boldsymbol{v}_j, \cdots\right| \\ &= \left|\cdots, \boldsymbol{v}_i + k\boldsymbol{v}_j, \cdots, \boldsymbol{v}_j, \cdots\right|, \end{aligned}$$

初等变换

计算行列式可以通过实施下列变换来化简:

定义.初等变换

(1) 互换两行 (列): $\boldsymbol{r_i \leftrightarrow r_j, c_i \leftrightarrow c_j}$, 行列式变号;

(2) 一行 (列) 乘**非零常数** k: $\boldsymbol{kr_i, kc_i}$, 行列式变为 k 倍;

(3) j 行 (列) 乘 k 加到 i 行 (列): $\boldsymbol{r_i + kr_j, c_i + kc_j}$, 行列式不变.

实施第三类初等变换 $c_i + kc_j$ 时, 第 j 列不变, 改变的是第 i 列. 由于

$$\begin{aligned} \left|\cdots, \boldsymbol{v}_i, \cdots, \boldsymbol{v}_j, \cdots\right| &= \left|\cdots, \boldsymbol{v}_i, \cdots, \boldsymbol{v}_j, \cdots\right| + \left|\cdots, k\boldsymbol{v}_j, \cdots, \boldsymbol{v}_j, \cdots\right| \\ &= \left|\cdots, \boldsymbol{v}_i + k\boldsymbol{v}_j, \cdots, \boldsymbol{v}_j, \cdots\right|, \end{aligned}$$

因此第三类初等变换不改变行列式的值.

例：使用初等变换计算行列式

练习.

练习.

(1) 判断题：$|\lambda \boldsymbol{A}| = \lambda |\boldsymbol{A}|$.

例：使用初等变换计算行列式

练习.

(1) 判断题：$|\lambda \boldsymbol{A}| = \lambda |\boldsymbol{A}|$. $|\lambda \boldsymbol{A}| = \lambda^n |\boldsymbol{A}|$

练习.

(1) 判断题：$|\lambda \boldsymbol{A}| = \lambda|\boldsymbol{A}|$. $|\lambda \boldsymbol{A}| = \lambda^n|\boldsymbol{A}|$

(2) 判断题：$\begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} & & & 1 \\ & & 2 & \\ & 3 & & \\ 4 & & & \end{vmatrix}$.

例：使用初等变换计算行列式

练习.

(1) 判断题：$|\lambda \boldsymbol{A}| = \lambda |\boldsymbol{A}|$. $|\lambda \boldsymbol{A}| = \lambda^n |\boldsymbol{A}|$

(2) 判断题：$\begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} & & & 1 \\ & & 2 & \\ & 3 & & \\ 4 & & & \end{vmatrix}$. $|\boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1| = 1$

例：使用初等变换计算行列式

练习.

(1) 判断题：$|\lambda \boldsymbol{A}| = \lambda|\boldsymbol{A}|$. $|\lambda \boldsymbol{A}| = \lambda^n|\boldsymbol{A}|$

(2) 判断题：$\begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} & & & 1 \\ & & 2 & \\ & 3 & & \\ 4 & & & \end{vmatrix}$. $|\boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1| = 1$

(3) 计算 $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+d_1 & d_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+d_2 & d_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+d_3 & d_3+a_3 \\ a_4+b_4 & b_4+c_4 & c_4+d_4 & d_4+a_4 \end{vmatrix} = \underline{\qquad\qquad}.$

例：使用初等变换计算行列式

练习.

(1) 判断题：$|\lambda \boldsymbol{A}| = \lambda|\boldsymbol{A}|$. $|\lambda \boldsymbol{A}| = \lambda^n|\boldsymbol{A}|$

(2) 判断题：$\begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} & & & 1 \\ & & 2 & \\ & 3 & & \\ 4 & & & \end{vmatrix}$. $|\boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1| = 1$

(3) 计算 $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+d_1 & d_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+d_2 & d_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+d_3 & d_3+a_3 \\ a_4+b_4 & b_4+c_4 & c_4+d_4 & d_4+a_4 \end{vmatrix} = \underline{\quad 0 \quad}$.

例：使用初等变换计算行列式

练习.

(1) 判断题：$|\lambda \boldsymbol{A}| = \lambda|\boldsymbol{A}|$. $|\lambda \boldsymbol{A}| = \lambda^n|\boldsymbol{A}|$

(2) 判断题：$\begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} & & & 1 \\ & & 2 & \\ & 3 & & \\ 4 & & & \end{vmatrix}$. $|\boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1| = 1$

(3) 计算 $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+d_1 & d_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+d_2 & d_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+d_3 & d_3+a_3 \\ a_4+b_4 & b_4+c_4 & c_4+d_4 & d_4+a_4 \end{vmatrix} = \underline{\quad 0 \quad}$.

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 5 阶方阵，$|\boldsymbol{A}| = -1$，则 $|2\boldsymbol{A}| = \underline{\qquad}$，$||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}| = \underline{\qquad}$.

例：使用初等变换计算行列式

练习.

(1) 判断题：$|\lambda \boldsymbol{A}| = \lambda |\boldsymbol{A}|$. $|\lambda \boldsymbol{A}| = \lambda^n |\boldsymbol{A}|$

(2) 判断题：$\begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} & & & 1 \\ & & 2 & \\ & 3 & & \\ 4 & & & \end{vmatrix}$. $|\boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1| = 1$

(3) 计算 $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+d_1 & d_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+d_2 & d_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+d_3 & d_3+a_3 \\ a_4+b_4 & b_4+c_4 & c_4+d_4 & d_4+a_4 \end{vmatrix} = \underline{\quad 0 \quad}$.

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 5 阶方阵, $|\boldsymbol{A}| = -1$, 则 $|2\boldsymbol{A}| = \underline{\quad -32 \quad}$, $||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}| = \underline{\qquad\qquad}$.

练习.

(1) 判断题：$|\lambda \boldsymbol{A}| = \lambda|\boldsymbol{A}|$. $|\lambda \boldsymbol{A}| = \lambda^n|\boldsymbol{A}|$

(2) 判断题：$\begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} & & & 1 \\ & & 2 & \\ & 3 & & \\ 4 & & & \end{vmatrix}$. $|\boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1| = 1$

(3) 计算 $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+d_1 & d_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+d_2 & d_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+d_3 & d_3+a_3 \\ a_4+b_4 & b_4+c_4 & c_4+d_4 & d_4+a_4 \end{vmatrix} = \underline{\quad 0 \quad}$.

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 5 阶方阵，$|\boldsymbol{A}| = -1$，则 $|2\boldsymbol{A}| = \underline{\quad -32 \quad}$，$||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}| = \underline{\quad 1 \quad}$.

例：方阵的行列式

例. 计算
$$\begin{vmatrix} 2\sin a\cos a & \sin a\cos b+\cos a\sin b & \sin a\cos c+\cos a\sin c \\ \sin b\cos a+\cos b\sin a & 2\sin b\cos b & \sin b\cos c+\cos b\sin c \\ \sin c\cos a+\cos c\sin a & \sin c\cos b+\cos c\sin b & 2\sin c\cos c \end{vmatrix}.$$

例. 计算 $\begin{vmatrix} 2\sin a\cos a & \sin a\cos b+\cos a\sin b & \sin a\cos c+\cos a\sin c \\ \sin b\cos a+\cos b\sin a & 2\sin b\cos b & \sin b\cos c+\cos b\sin c \\ \sin c\cos a+\cos c\sin a & \sin c\cos b+\cos c\sin b & 2\sin c\cos c \end{vmatrix}$.

容易看出该方阵可写成两个方阵之和

$$\begin{pmatrix} \sin a\cos a & \sin a\cos b & \sin a\cos c \\ \sin b\cos a & \sin b\cos b & \sin b\cos c \\ \sin c\cos a & \sin c\cos b & \sin c\cos c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos a\sin a & \cos a\sin b & \cos a\sin c \\ \cos b\sin a & \cos b\sin b & \cos b\sin c \\ \cos c\sin a & \cos c\sin b & \cos c\sin c \end{pmatrix}.$$

例. 计算 $\begin{vmatrix} 2\sin a\cos a & \sin a\cos b+\cos a\sin b & \sin a\cos c+\cos a\sin c \\ \sin b\cos a+\cos b\sin a & 2\sin b\cos b & \sin b\cos c+\cos b\sin c \\ \sin c\cos a+\cos c\sin a & \sin c\cos b+\cos c\sin b & 2\sin c\cos c \end{vmatrix}$.

容易看出该方阵可写成两个方阵之和

$$\begin{pmatrix} \sin a\cos a & \sin a\cos b & \sin a\cos c \\ \sin b\cos a & \sin b\cos b & \sin b\cos c \\ \sin c\cos a & \sin c\cos b & \sin c\cos c \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \cos a\sin a & \cos a\sin b & \cos a\sin c \\ \cos b\sin a & \cos b\sin b & \cos b\sin c \\ \cos c\sin a & \cos c\sin b & \cos c\sin c \end{pmatrix}.$$

这两个方阵各自满足各行成比例，因此可分别写成

$$\begin{pmatrix} \sin a \\ \sin b \\ \sin c \end{pmatrix}(\cos a,\cos b,\cos c), \qquad \begin{pmatrix} \cos a \\ \cos b \\ \cos c \end{pmatrix}(\sin a,\sin b,\sin c).$$

因此原方阵为

$$\begin{pmatrix} \sin a & \cos a \\ \sin b & \cos b \\ \sin c & \cos c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos a & \cos b & \cos c \\ \sin a & \sin b & \sin c \end{pmatrix}.$$

因此原方阵为

$$\begin{pmatrix} \sin a & \cos a \\ \sin b & \cos b \\ \sin c & \cos c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos a & \cos b & \cos c \\ \sin a & \sin b & \sin c \end{pmatrix}.$$

解答. 原式 $= \begin{vmatrix} \sin a & \cos a & 0 \\ \sin b & \cos b & 0 \\ \sin c & \cos c & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos a & \cos b & \cos c \\ \sin a & \sin b & \sin c \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

因此原方阵为

$$\begin{pmatrix} \sin a & \cos a \\ \sin b & \cos b \\ \sin c & \cos c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos a & \cos b & \cos c \\ \sin a & \sin b & \sin c \end{pmatrix}.$$

解答. 原式 $= \begin{vmatrix} \sin a & \cos a & 0 \\ \sin b & \cos b & 0 \\ \sin c & \cos c & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos a & \cos b & \cos c \\ \sin a & \sin b & \sin c \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}, \boldsymbol{B} \in M_{n\times m}$.

因此原方阵为

$$\begin{pmatrix} \sin a & \cos a \\ \sin b & \cos b \\ \sin c & \cos c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos a & \cos b & \cos c \\ \sin a & \sin b & \sin c \end{pmatrix}.$$

解答. 原式 $= \begin{vmatrix} \sin a & \cos a & 0 \\ \sin b & \cos b & 0 \\ \sin c & \cos c & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos a & \cos b & \cos c \\ \sin a & \sin b & \sin c \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}, \boldsymbol{B} \in M_{n\times m}$. 若 $m > n$, 则

$$|\boldsymbol{AB}| = \left| (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{O}_{m\times(m-n)}) \begin{pmatrix} \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O}_{(m-n)\times m} \end{pmatrix} \right| = 0.$$

例. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 是反对称阵. 若 n 是奇数, 则 $|\boldsymbol{A}| = 0$.

例. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 是反对称阵. 若 n 是奇数, 则 $|\boldsymbol{A}|=0$.

证明. 由于 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$, 于是

$$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|-\boldsymbol{A}|=(-1)^n|\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{A}|.$$

例：方阵的行列式

例. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 是反对称阵. 若 n 是奇数, 则 $|\boldsymbol{A}| = 0$.

证明. 由于 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{A}$, 于是

$$|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = |-\boldsymbol{A}| = (-1)^n|\boldsymbol{A}| = -|\boldsymbol{A}|.$$

故 $|\boldsymbol{A}| = 0$. □

例：使用初等变换计算行列式

例. 若 $abcd=1$，证明 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a^2+a^{-2} & a & a^{-1} & 1 \\ b^2+b^{-2} & b & b^{-1} & 1 \\ c^2+c^{-2} & c & c^{-1} & 1 \\ d^2+d^{-2} & d & d^{-1} & 1 \end{pmatrix}$ 行列式为零.

例: 使用初等变换计算行列式

例. 若 $abcd = 1$, 证明 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a^2 + a^{-2} & a & a^{-1} & 1 \\ b^2 + b^{-2} & b & b^{-1} & 1 \\ c^2 + c^{-2} & c & c^{-1} & 1 \\ d^2 + d^{-2} & d & d^{-1} & 1 \end{pmatrix}$ 行列式为零.

证明.

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a^2 & a & a^{-1} & 1 \\ b^2 & b & b^{-1} & 1 \\ c^2 & c & c^{-1} & 1 \\ d^2 & d & d^{-1} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a^{-2} & a & a^{-1} & 1 \\ b^{-2} & b & b^{-1} & 1 \\ c^{-2} & c & c^{-1} & 1 \\ d^{-2} & d & d^{-1} & 1 \end{vmatrix}$$

例：使用初等变换计算行列式

例. 若 $abcd = 1$，证明 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a^2+a^{-2} & a & a^{-1} & 1 \\ b^2+b^{-2} & b & b^{-1} & 1 \\ c^2+c^{-2} & c & c^{-1} & 1 \\ d^2+d^{-2} & d & d^{-1} & 1 \end{pmatrix}$ 行列式为零.

证明.

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a^2 & a & a^{-1} & 1 \\ b^2 & b & b^{-1} & 1 \\ c^2 & c & c^{-1} & 1 \\ d^2 & d & d^{-1} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a^{-2} & a & a^{-1} & 1 \\ b^{-2} & b & b^{-1} & 1 \\ c^{-2} & c & c^{-1} & 1 \\ d^{-2} & d & d^{-1} & 1 \end{vmatrix} = abcd \begin{vmatrix} a & 1 & a^{-2} & a^{-1} \\ b & 1 & b^{-2} & b^{-1} \\ c & 1 & c^{-2} & c^{-1} \\ d & 1 & d^{-2} & d^{-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a^{-2} & 1 & a^{-1} \\ b & b^{-2} & 1 & b^{-1} \\ c & c^{-2} & 1 & c^{-1} \\ d & d^{-2} & 1 & d^{-1} \end{vmatrix}.$$

例：使用初等变换计算行列式

例. 若 $abcd = 1$，证明 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a^2+a^{-2} & a & a^{-1} & 1 \\ b^2+b^{-2} & b & b^{-1} & 1 \\ c^2+c^{-2} & c & c^{-1} & 1 \\ d^2+d^{-2} & d & d^{-1} & 1 \end{pmatrix}$ 行列式为零.

证明.

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a^2 & a & a^{-1} & 1 \\ b^2 & b & b^{-1} & 1 \\ c^2 & c & c^{-1} & 1 \\ d^2 & d & d^{-1} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a^{-2} & a & a^{-1} & 1 \\ b^{-2} & b & b^{-1} & 1 \\ c^{-2} & c & c^{-1} & 1 \\ d^{-2} & d & d^{-1} & 1 \end{vmatrix} = abcd\begin{vmatrix} a & 1 & a^{-2} & a^{-1} \\ b & 1 & b^{-2} & b^{-1} \\ c & 1 & c^{-2} & c^{-1} \\ d & 1 & d^{-2} & d^{-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a^{-2} & 1 & a^{-1} \\ b & b^{-2} & 1 & b^{-1} \\ c & c^{-2} & 1 & c^{-1} \\ d & d^{-2} & 1 & d^{-1} \end{vmatrix}.$$

由于 $abcd = 1$，且等式右侧两个行列式相差 -1 倍，因此 $|\boldsymbol{A}| = 0$. □

我们来介绍行列式与方阵子式的联系.

我们来介绍行列式与方阵子式的联系.

定义. 设 $A = (a_{ij})$ 是 $n \geqslant 2$ 阶方阵.

我们来介绍行列式与方阵子式的联系.

定义. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 $n\geqslant 2$ 阶方阵.

(1) $\boldsymbol{A}$ 去掉第 i 行和 j 列得到的 $n-1$ 阶方阵的行列式称为 $\boldsymbol{A}$ 在 (i,j) 处的余子式 (Minor), 记为 M_{ij}.

我们来介绍行列式与方阵子式的联系.

定义. 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 是 $n \geqslant 2$ 阶方阵.

(1) $\boldsymbol{A}$ 去掉第 i 行和 j 列得到的 $n-1$ 阶方阵的行列式称为 $\boldsymbol{A}$ 在 (i,j) 处的**余子式** **(Minor)**, 记为 M_{ij}.

(2) 称 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 在 (i,j) 处的**代数余子式** **(Algebraic Minor)**.

我们来介绍行列式与方阵子式的联系.

定义. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 $n\geqslant 2$ 阶方阵.

(1) $\boldsymbol{A}$ 去掉第 i 行和 j 列得到的 $n-1$ 阶方阵的行列式称为 $\boldsymbol{A}$ 在 (i,j) 处的余子式 (Minor), 记为 M_{ij}.

(2) 称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 在 (i,j) 处的代数余子式 (Algebraic Minor).

注意余子式和代数余子式是数而不是矩阵.

假设 $\boldsymbol{A}$ 的第 n 列除了 a_{nn} 都是零.

假设 $\boldsymbol{A}$ 的第 n 列除了 a_{nn} 都是零. 若 $k_n \neq n$, 则 $a_{k_1 1} \cdots a_{k_n n} = 0$; 若 $k_n = n$, 则 $\operatorname{sgn}(k_1, \ldots, k_{n-1}, n) = \operatorname{sgn}(k_1, \ldots, k_{n-1})$.

假设 $\boldsymbol{A}$ 的第 n 列除了 a_{nn} 都是零. 若 $k_n \neq n$, 则 $a_{k_1 1} \cdots a_{k_n n} = 0$; 若 $k_n = n$, 则 $\operatorname{sgn}(k_1, \ldots, k_{n-1}, n) = \operatorname{sgn}(k_1, \ldots, k_{n-1})$. 因此

$$|\boldsymbol{A}| = \sum \operatorname{sgn}(k_1, \ldots, k_{n-1}, n) a_{k_1,1} \cdots a_{k_{n-1},n-1} a_{n,n} = a_{nn} M_{nn} = a_{nn} A_{nn}.$$

假设 $\boldsymbol{A}$ 的第 n 列除了 a_{nn} 都是零. 若 $k_n \neq n$, 则 $a_{k_1 1} \cdots a_{k_n n} = 0$; 若 $k_n = n$, 则 $\operatorname{sgn}(k_1, \ldots, k_{n-1}, n) = \operatorname{sgn}(k_1, \ldots, k_{n-1})$. 因此

$$|\boldsymbol{A}| = \sum \operatorname{sgn}(k_1, \ldots, k_{n-1}, n) a_{k_1,1} \cdots a_{k_{n-1},n-1} a_{n,n} = a_{nn} M_{nn} = a_{nn} A_{nn}.$$

假设 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列除了 a_{ij} 都是零.

假设 $\boldsymbol{A}$ 的第 n 列除了 a_{nn} 都是零. 若 $k_n \neq n$, 则 $a_{k_1 1} \cdots a_{k_n n} = 0$; 若 $k_n = n$, 则 $\operatorname{sgn}(k_1, \dots, k_{n-1}, n) = \operatorname{sgn}(k_1, \dots, k_{n-1})$. 因此

$$|\boldsymbol{A}| = \sum \operatorname{sgn}(k_1, \dots, k_{n-1}, n) a_{k_1,1} \cdots a_{k_{n-1},n-1} a_{n,n} = a_{nn} M_{nn} = a_{nn} A_{nn}.$$

假设 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列除了 a_{ij} 都是零. 依次对 $\boldsymbol{A}$ 实施

$$r_i \leftrightarrow r_{i+1}, \quad r_{i+1} \leftrightarrow r_{i+2}, \quad \dots, \quad r_{n-1} \leftrightarrow r_n,$$

得到的方阵 $\boldsymbol{B}$ 就是将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行移动到第 n 行的后面得到的方阵.

假设 $\boldsymbol{A}$ 的第 n 列除了 a_{nn} 都是零. 若 $k_n \neq n$, 则 $a_{k_1 1} \cdots a_{k_n n} = 0$; 若 $k_n = n$, 则 $\operatorname{sgn}(k_1, \ldots, k_{n-1}, n) = \operatorname{sgn}(k_1, \ldots, k_{n-1})$. 因此

$$|\boldsymbol{A}| = \sum \operatorname{sgn}(k_1, \ldots, k_{n-1}, n) a_{k_1,1} \cdots a_{k_{n-1},n-1} a_{n,n} = a_{nn} M_{nn} = a_{nn} A_{nn}.$$

假设 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列除了 a_{ij} 都是零. 依次对 $\boldsymbol{A}$ 实施

$$r_i \leftrightarrow r_{i+1}, \quad r_{i+1} \leftrightarrow r_{i+2}, \quad \ldots, \quad r_{n-1} \leftrightarrow r_n,$$

得到的方阵 $\boldsymbol{B}$ 就是将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行移动到第 n 行的后面得到的方阵. 由于一共 $n-i$ 次列互换, 因此 $|\boldsymbol{B}| = (-1)^{n-i}|\boldsymbol{A}|$.

假设 $\boldsymbol{A}$ 的第 n 列除了 a_{nn} 都是零. 若 $k_n \neq n$, 则 $a_{k_1 1} \cdots a_{k_n n} = 0$; 若 $k_n = n$, 则 $\operatorname{sgn}(k_1, \dots, k_{n-1}, n) = \operatorname{sgn}(k_1, \dots, k_{n-1})$. 因此

$$|\boldsymbol{A}| = \sum \operatorname{sgn}(k_1, \dots, k_{n-1}, n) a_{k_1,1} \cdots a_{k_{n-1},n-1} a_{n,n} = a_{nn} M_{nn} = a_{nn} A_{nn}.$$

假设 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列除了 a_{ij} 都是零. 依次对 $\boldsymbol{A}$ 实施

$$r_i \leftrightarrow r_{i+1}, \quad r_{i+1} \leftrightarrow r_{i+2}, \quad \dots, \quad r_{n-1} \leftrightarrow r_n,$$

得到的方阵 $\boldsymbol{B}$ 就是将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行移动到第 n 行的后面得到的方阵. 由于一共 $n-i$ 次列互换, 因此 $|\boldsymbol{B}| = (-1)^{n-i} |\boldsymbol{A}|$.

同理, 将 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列移动到第 n 列的后面得到的方阵记为 $\boldsymbol{C}$, 则

$$|\boldsymbol{C}| = (-1)^{n-j} |\boldsymbol{B}| = (-1)^{i+j} |\boldsymbol{A}|.$$

假设 $\boldsymbol{A}$ 的第 n 列除了 a_{nn} 都是零. 若 $k_n \neq n$, 则 $a_{k_1 1}\cdots a_{k_n n}=0$; 若 $k_n=n$, 则 $\operatorname{sgn}(k_1,\dots,k_{n-1},n)=\operatorname{sgn}(k_1,\dots,k_{n-1})$. 因此

$$|\boldsymbol{A}|=\sum \operatorname{sgn}(k_1,\dots,k_{n-1},n)a_{k_1,1}\cdots a_{k_{n-1},n-1}a_{n,n}=a_{nn}M_{nn}=a_{nn}A_{nn}.$$

假设 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列除了 a_{ij} 都是零. 依次对 $\boldsymbol{A}$ 实施

$$r_i \leftrightarrow r_{i+1}, \quad r_{i+1} \leftrightarrow r_{i+2}, \quad \dots, \quad r_{n-1} \leftrightarrow r_n,$$

得到的方阵 $\boldsymbol{B}$ 就是将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行移动到第 n 行的后面得到的方阵. 由于一共 $n-i$ 次列互换, 因此 $|\boldsymbol{B}|=(-1)^{n-i}|\boldsymbol{A}|$.

同理, 将 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列移动到第 n 列的后面得到的方阵记为 $\boldsymbol{C}$, 则

$$|\boldsymbol{C}|=(-1)^{n-j}|\boldsymbol{B}|=(-1)^{i+j}|\boldsymbol{A}|.$$

注意到 $\boldsymbol{C}$ 在 (n,n) 处元素是 a_{ij}, 余子式是 M_{ij},

假设 $\boldsymbol{A}$ 的第 n 列除了 a_{nn} 都是零. 若 $k_n \neq n$, 则 $a_{k_1 1} \cdots a_{k_n n} = 0$; 若 $k_n = n$, 则 $\operatorname{sgn}(k_1, \ldots, k_{n-1}, n) = \operatorname{sgn}(k_1, \ldots, k_{n-1})$. 因此

$$|\boldsymbol{A}| = \sum \operatorname{sgn}(k_1, \ldots, k_{n-1}, n) a_{k_1,1} \cdots a_{k_{n-1},n-1} a_{n,n} = a_{nn} M_{nn} = a_{nn} A_{nn}.$$

假设 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列除了 a_{ij} 都是零. 依次对 $\boldsymbol{A}$ 实施

$$r_i \leftrightarrow r_{i+1}, \quad r_{i+1} \leftrightarrow r_{i+2}, \quad \ldots, \quad r_{n-1} \leftrightarrow r_n,$$

得到的方阵 $\boldsymbol{B}$ 就是将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行移动到第 n 行的后面得到的方阵. 由于一共 $n-i$ 次列互换, 因此 $|\boldsymbol{B}| = (-1)^{n-i} |\boldsymbol{A}|$.

同理, 将 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列移动到第 n 列的后面得到的方阵记为 $\boldsymbol{C}$, 则

$$|\boldsymbol{C}| = (-1)^{n-j} |\boldsymbol{B}| = (-1)^{i+j} |\boldsymbol{A}|.$$

注意到 $\boldsymbol{C}$ 在 (n, n) 处元素是 a_{ij}, 余子式是 M_{ij}, 因此

$$|\boldsymbol{C}| = a_{ij} M_{ij}, \qquad |\boldsymbol{A}| = (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = a_{ij} A_{ij}.$$

将 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列写成

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_{2j} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix},$$

行列式与余子式的联系

将 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列写成

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_{2j} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix},$$

根据行列式的线性性质，我们得到

$$|\boldsymbol{A}| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}.$$

将 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列写成

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_{2j} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix},$$

根据行列式的线性性质，我们得到

$$|\boldsymbol{A}| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}.$$

由于转置不改变方阵的行列式，于是得到

$$|\boldsymbol{A}| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}.$$

拉普拉斯展开

定理 (行列式沿任一行或列展开). 方阵的行列式等于任一行 (列) 的元素与其对应的代数余子式乘积的和:

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}| &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \\ &= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}.\end{aligned}$$

拉普拉斯展开

定理 (行列式沿任一行或列展开). 方阵的行列式等于任一行 (列) 的元素与其对应的代数余子式乘积的和:

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{A}| &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \\
&= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}.
\end{aligned}
$$

由此也可以看出 $i \neq k$ 时,

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0,$$

定理 (行列式沿任一行或列展开). 方阵的行列式等于任一行 (列) 的元素与其对应的代数余子式乘积的和:

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}| &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \\ &= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}.\end{aligned}$$

由此也可以看出 $i \neq k$ 时,

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0,$$

因为它是第 i, k 行相同的方阵的行列式.

例：三角阵的行列式

例.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例：三角阵的行列式

例.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & & \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例：三角阵的行列式

例.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & & \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & & \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例：三角阵的行列式

例.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & & \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & & \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例：三角阵的行列式

例.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & & \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & & \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

由于转置不改变行列式，因此上三角阵行列式也等于对角元乘积.

例：反对角阵的行列式

例. 计算 $|\boldsymbol{A}|$，其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & & \end{pmatrix}$.

例：反对角阵的行列式

例. 计算 $|\boldsymbol{A}|$, 其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & & \end{pmatrix}$.

解答.

$$|\boldsymbol{A}| = (-1)^{n+1} a_1 \begin{vmatrix} & & a_2 \\ & \iddots & \\ a_n & & \end{vmatrix}$$

例. 计算 $|\boldsymbol{A}|$, 其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & & \end{pmatrix}.$

解答.

$$|\boldsymbol{A}| = (-1)^{n+1} a_1 \begin{vmatrix} & & a_2 \\ & \iddots & \\ a_n & & \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} a_1 \cdot (-1)^n a_2 \begin{vmatrix} & & a_3 \\ & \iddots & \\ a_n & & \end{vmatrix}$$

例：反对角阵的行列式

例. 计算 $|\boldsymbol{A}|$，其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & & \end{pmatrix}$.

解答.

$$|\boldsymbol{A}| = (-1)^{n+1} a_1 \begin{vmatrix} & & a_2 \\ & \iddots & \\ a_n & & \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} a_1 \cdot (-1)^n a_2 \begin{vmatrix} & & a_3 \\ & \iddots & \\ a_n & & \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = \prod_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} a_i$$

例：反对角阵的行列式

例. 计算 $|\boldsymbol{A}|$，其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & & \end{pmatrix}$.

解答.

$$|\boldsymbol{A}| = (-1)^{n+1} a_1 \begin{vmatrix} & & a_2 \\ & \iddots & \\ a_n & & \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} a_1 \cdot (-1)^n a_2 \begin{vmatrix} & & a_3 \\ & \iddots & \\ a_n & & \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = \prod_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} a_i = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n.$$

例：利用初等变换计算行列式

对于具体的方阵，我们可以利用初等变换将其化为三角阵来计算行列式.

对于具体的方阵，我们可以利用初等变换将其化为三角阵来计算行列式. 也可以在某一行或一列只有少数非零元时用拉普拉斯展开来降阶.

例：利用初等变换计算行列式

对于具体的方阵，我们可以利用初等变换将其化为三角阵来计算行列式. 也可以在某一行或一列只有少数非零元时用拉普拉斯展开来降阶.

例.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ -4 & -5 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & -5 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

例：利用初等变换计算行列式

对于具体的方阵，我们可以利用初等变换将其化为三角阵来计算行列式. 也可以在某一行或一列只有少数非零元时用拉普拉斯展开来降阶.

例.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ -4 & -5 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & -5 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_1 - 2r_4]{\substack{r_2 + 4r_4 \\ r_3 + 3r_4}} \begin{vmatrix} 0 & 7 & 1 & 1 \\ 0 & -13 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

对于具体的方阵，我们可以利用初等变换将其化为三角阵来计算行列式．也可以在某一行或一列只有少数非零元时用拉普拉斯展开来降阶．

例.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ -4 & -5 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & -5 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_1 - 2r_4]{\substack{r_2 + 4r_4 \\ r_3 + 3r_4}} \begin{vmatrix} 0 & 7 & 1 & 1 \\ 0 & -13 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} -13 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

对于具体的方阵，我们可以利用初等变换将其化为三角阵来计算行列式．也可以在某一行或一列只有少数非零元时用拉普拉斯展开来降阶．

例.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ -4 & -5 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & -5 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_1-2r_4]{\substack{r_2+4r_4\\ r_3+3r_4}} \begin{vmatrix} 0 & 7 & 1 & 1 \\ 0 & -13 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} -13 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3+r_1} - \begin{vmatrix} -13 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \\ -6 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

例：利用初等变换计算行列式

对于具体的方阵，我们可以利用初等变换将其化为三角阵来计算行列式. 也可以在某一行或一列只有少数非零元时用拉普拉斯展开来降阶.

例.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ -4 & -5 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & -5 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_1 - 2r_4]{\substack{r_2 + 4r_4 \\ r_3 + 3r_4}} \begin{vmatrix} 0 & 7 & 1 & 1 \\ 0 & -13 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} -13 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3 + r_1} - \begin{vmatrix} -13 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \\ -6 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -5 & -5 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = -40.$$

例：利用初等变换计算行列式

练习.

例：利用初等变换计算行列式

练习.

(1) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 501 & 200 & 299 \\ 500 & 200 & 300 \end{vmatrix} = \underline{\qquad\qquad}.$

练习.

(1) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 501 & 200 & 299 \\ 500 & 200 & 300 \end{vmatrix} = \underline{\ -200\ }.$

例：利用初等变换计算行列式

练习.

(1) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 501 & 200 & 299 \\ 500 & 200 & 300 \end{vmatrix} = \underline{\ -200\ }$.

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = \underline{\qquad\qquad}$.

例：利用初等变换计算行列式

练习.

(1) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 501 & 200 & 299 \\ 500 & 200 & 300 \end{vmatrix} = \underline{\ -200\ }.$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = \underline{\quad 0 \quad}.$

例：利用初等变换计算行列式

练习.

(1) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 501 & 200 & 299 \\ 500 & 200 & 300 \end{vmatrix} = \underline{\ -200\ }.$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = \underline{\ \ 0\ \ }.$

(3) 设 $\boldsymbol{\alpha} = (1, 0, -1)$, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$, 则 $|5\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^3| = \underline{\qquad\qquad}.$

练习.

(1) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 501 & 200 & 299 \\ 500 & 200 & 300 \end{vmatrix} = \underline{\ -200\ }$.

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = \underline{\quad 0 \quad}$.

(3) 设 $\boldsymbol{\alpha} = (1, 0, -1)$, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$, 则 $|5\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^3| = \underline{\ -75\ }$.

例：利用初等变换计算行列式

练习.

(1) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 501 & 200 & 299 \\ 500 & 200 & 300 \end{vmatrix} = \underline{\quad -200 \quad}$.

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = \underline{\quad 0 \quad}$.

(3) 设 $\boldsymbol{\alpha} = (1, 0, -1)$, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$, 则 $|5\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^3| = \underline{\quad -75 \quad}$.

回忆: 若 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$, 则 $\boldsymbol{A}^k = \lambda^{k-1}\boldsymbol{A}$, 其中 $k = \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$.

例. 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}=\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1m} & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & 0 & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & & & \\ \hline * & \cdots & * & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right).$$

证明 $|\boldsymbol{C}|=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|$.

例：分块矩阵行列式

证明. 对 m 归纳.

例：分块矩阵行列式

证明. 对 m 归纳. 当 $m=1$ 时将 $|C|$ 沿第一行展开可知成立.

例：分块矩阵行列式

证明. 对 m 归纳. 当 $m=1$ 时将 $|\boldsymbol{C}|$ 沿第一行展开可知成立.

假设命题对于 $m-1$ 成立.

例：分块矩阵行列式

证明. 对 m 归纳. 当 $m=1$ 时将 $|\boldsymbol{C}|$ 沿第一行展开可知成立.

假设命题对于 $m-1$ 成立. 设 $\boldsymbol{A}$ 在 $(1,j)$ 处的余子式为 M_{1j}, $\boldsymbol{C}$ 在 $(1,j)$ 处的余子式为 N_{1j}.

例：分块矩阵行列式

证明. 对 m 归纳. 当 $m=1$ 时将 $|\boldsymbol{C}|$ 沿第一行展开可知成立.

假设命题对于 $m-1$ 成立. 设 $\boldsymbol{A}$ 在 $(1,j)$ 处的余子式为 M_{1j}, $\boldsymbol{C}$ 在 $(1,j)$ 处的余子式为 N_{1j}. 则由归纳假设 $N_{1j}=M_{1j}|\boldsymbol{B}|$.

例：分块矩阵行列式

证明. 对 m 归纳. 当 $m=1$ 时将 $|\boldsymbol{C}|$ 沿第一行展开可知成立.

假设命题对于 $m-1$ 成立. 设 $\boldsymbol{A}$ 在 $(1,j)$ 处的余子式为 M_{1j}, $\boldsymbol{C}$ 在 $(1,j)$ 处的余子式为 N_{1j}. 则由归纳假设 $N_{1j}=M_{1j}|\boldsymbol{B}|$. 因此

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{C}| &= \sum_{j=1}^{m}(-1)^{1+j}a_{1j}N_{1j} \\
&= \sum_{j=1}^{m}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j}|\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|.
\end{aligned}$$

□

例：拉普拉斯展开的应用

例. 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. 计算 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$ 和 $M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}$.

例：拉普拉斯展开的应用

例. 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. 计算 $A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44}$ 和 $M_{41} + M_{42} + M_{43} + M_{44}$.

解答. 由拉普拉斯展开可知

$$A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

例：拉普拉斯展开的应用

续解.

$$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=-A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\-1&1&-1&1\end{vmatrix}$$

续解.

$$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=-A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\-1&1&-1&1\end{vmatrix}$$

$$=7\begin{vmatrix}3&4&0\\2&2&2\\-1&-1&1\end{vmatrix}=-28.$$

续解.

$$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=-A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\-1&1&-1&1\end{vmatrix}$$

$$=7\begin{vmatrix}3&4&0\\2&2&2\\-1&-1&1\end{vmatrix}=-28.$$

练习. 若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3&f\\b_1&b_2&b_3&f\\c_1&c_2&c_3&f\\d_1&d_2&d_3&f\end{pmatrix}$, 则 $A_{11}+A_{21}+A_{31}+A_{41}=$______.

例：拉普拉斯展开的应用

续解.

$$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=-A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\-1&1&-1&1\end{vmatrix}$$

$$=7\begin{vmatrix}3&4&0\\2&2&2\\-1&-1&1\end{vmatrix}=-28.$$

练习. 若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3&f\\b_1&b_2&b_3&f\\c_1&c_2&c_3&f\\d_1&d_2&d_3&f\end{pmatrix}$，则 $A_{11}+A_{21}+A_{31}+A_{41}=\underline{\quad 0 \quad}$.

例：行和为常数的行列式

计算 n 阶矩阵的行列式可以使用初等变换将其变为三角型，也可以使用拉普拉斯展开来对其实施降阶.

计算 n 阶矩阵的行列式可以使用初等变换将其变为三角型，也可以使用拉普拉斯展开来对其实施降阶.

例.

$$\begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

例：行和为常数的行列式

计算 n 阶矩阵的行列式可以使用初等变换将其变为三角型，也可以使用拉普拉斯展开来对其实施降阶.

例.

$$\begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix} \xlongequal[i \geqslant 2]{c_1 + c_i} \begin{vmatrix} a+n-1 & 1 & \cdots & 1 \\ a+n-1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a+n-1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

计算 n 阶矩阵的行列式可以使用初等变换将其变为三角型，也可以使用拉普拉斯展开来对其实施降阶.

例.

$$\begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix} \xlongequal[i \geqslant 2]{c_1 + c_i} \begin{vmatrix} a+n-1 & 1 & \cdots & 1 \\ a+n-1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a+n-1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix} = (a+n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

计算 n 阶矩阵的行列式可以使用初等变换将其变为三角型，也可以使用拉普拉斯展开来对其实施降阶.

例.

$$\begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix} \xlongequal[i\geqslant 2]{c_1+c_i} \begin{vmatrix} a+n-1 & 1 & \cdots & 1 \\ a+n-1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a+n-1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix} = (a+n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i\geqslant 2]{r_i-r_1} (a+n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-1 \end{vmatrix}$$

例：行和为常数的行列式

计算 n 阶矩阵的行列式可以使用初等变换将其变为三角型，也可以使用拉普拉斯展开来对其实施降阶.

例.

$$\begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix} \xlongequal[i \geqslant 2]{c_1 + c_i} \begin{vmatrix} a+n-1 & 1 & \cdots & 1 \\ a+n-1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a+n-1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix} = (a+n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i \geqslant 2]{r_i - r_1} (a+n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-1 \end{vmatrix} = (a+n-1)(a-1)^{n-1}.$$

例：行和为常数的行列式

若方阵的每行 (列) 之和为常数，可用此法化简.

若方阵的每行 (列) 之和为常数，可用此法化简.

练习. 计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} =$ ________________.

例：行和为常数的行列式

若方阵的每行 (列) 之和为常数，可用此法化简.

练习. 计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} = \underline{\quad 1+a_1+\cdots+a_n \quad}$.

例：箭形行列式

例.

$$
\begin{vmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 \\
1 & 2 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
1 & 0 & \cdots & n
\end{vmatrix}
$$

例.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} \xlongequal[i \geqslant 2]{c_1 - \frac{1}{i} c_i} \begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{n} & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

例：箭形行列式

例.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} \xlongequal[i \geqslant 2]{c_1 - \frac{1}{i} c_i} \begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{n} & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = \left(1 - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{n}\right) n!.$$

例：箭形行列式

例.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} \xlongequal[i \geqslant 2]{c_1 - \frac{1}{i} c_i} \begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{n} & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = \left(1 - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{n}\right) n!.$$

一般的箭形行列式均可用此法处理.

例：特殊形状行列式

练习. 计算 n 阶行列式
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 & n \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & -(n-1) & 0 \end{vmatrix} = \underline{\qquad\qquad}.$$

练习. 计算 n 阶行列式
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 & n \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & -(n-1) & 0 \end{vmatrix} = \underline{\quad n! \quad}.$$

例：特殊形状行列式

练习. 计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 & n \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & -(n-1) & 0 \end{vmatrix} = \underline{\quad n! \quad}.$$

答案. 对该方阵实施 $r_i + r_1, i \geqslant 2$ 即可化为上三角阵.

例. 计算矩阵 $\boldsymbol{A}_n = \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{pmatrix}$ 的行列式.

例：降阶法

例. 计算矩阵 $\boldsymbol{A}_n = \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{pmatrix}$ 的行列式.

解答. 沿着第一列展开得到

$$|\boldsymbol{A}_n| = x|\boldsymbol{A}_{n-1}| + (-1)^{1+n}a_n(-1)^{n-1} = x|\boldsymbol{A}_{n-1}| + a_n,$$

例：降阶法

例. 计算矩阵 $\boldsymbol{A}_n = \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{pmatrix}$ 的行列式.

解答. 沿着第一列展开得到

$$|\boldsymbol{A}_n| = x|\boldsymbol{A}_{n-1}| + (-1)^{1+n}a_n(-1)^{n-1} = x|\boldsymbol{A}_{n-1}| + a_n,$$

递推或归纳可知

$$|\boldsymbol{A}_n| = x(x|\boldsymbol{A}_{n-2}| + a_{n-1}) + a_n = \cdots = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n.$$

例：降阶法计算三对角矩阵行列式

例. 计算矩阵 $\boldsymbol{A}_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的行列式.

例：降阶法计算三对角矩阵行列式

解答. 设 $D_n = |\boldsymbol{A}_n|$.

例：降阶法计算三对角矩阵行列式

解答. 设 $D_n = |\boldsymbol{A}_n|$. 沿着第一行展开得到

$$|\boldsymbol{A}_n| = 2|\boldsymbol{A}_{n-1}| - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}_{n-1} = 2|\boldsymbol{A}_{n-1}| - |\boldsymbol{A}_{n-2}|,$$

例：降阶法计算三对角矩阵行列式

解答. 设 $D_n = |\boldsymbol{A}_n|$. 沿着第一行展开得到

$$|\boldsymbol{A}_n| = 2|\boldsymbol{A}_{n-1}| - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}_{n-1} = 2|\boldsymbol{A}_{n-1}| - |\boldsymbol{A}_{n-2}|,$$

因此

$$|\boldsymbol{A}_n| - |\boldsymbol{A}_{n-1}| = |\boldsymbol{A}_{n-1}| - |\boldsymbol{A}_{n-2}| = \cdots = |\boldsymbol{A}_2| - |\boldsymbol{A}_1| = 1,$$

例：降阶法计算三对角矩阵行列式

解答. 设 $D_n = |\boldsymbol{A}_n|$. 沿着第一行展开得到

$$|\boldsymbol{A}_n| = 2|\boldsymbol{A}_{n-1}| - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}_{n-1} = 2|\boldsymbol{A}_{n-1}| - |\boldsymbol{A}_{n-2}|,$$

因此

$$|\boldsymbol{A}_n| - |\boldsymbol{A}_{n-1}| = |\boldsymbol{A}_{n-1}| - |\boldsymbol{A}_{n-2}| = \cdots = |\boldsymbol{A}_2| - |\boldsymbol{A}_1| = 1,$$

从而 $|\boldsymbol{A}_n| = n - 1 + |\boldsymbol{A}_1| = n + 1.$

例：降阶法计算三对角矩阵行列式

若主对角线元素均为 a, 上下副对角线元素均为 b 和 c, 则

$$|\boldsymbol{A}_n| - a|\boldsymbol{A}_{n-1}| + bc|\boldsymbol{A}_{n-2}| = 0.$$

例：降阶法计算三对角矩阵行列式

若主对角线元素均为 a, 上下副对角线元素均为 b 和 c, 则

$$|\boldsymbol{A}_n| - a|\boldsymbol{A}_{n-1}| + bc|\boldsymbol{A}_{n-2}| = 0.$$

设 $\lambda^2 - a\lambda + bc = 0$ 的两个根为 λ_1, λ_2, 则归纳可知

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{A}_n| &= \lambda_1^n + \lambda_1^{n-1}\lambda_2 + \cdots + \lambda_1\lambda_2^{n-1} + \lambda_2^n \\ &= \begin{cases} \dfrac{\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}}{\lambda_1 - \lambda_2}, & \text{若 } \lambda_1 \neq \lambda_2; \\ (n+1)\left(\dfrac{a}{2}\right)^n, & \text{若 } \lambda_1 = \lambda_2 = \dfrac{a}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

例：范德蒙行列式

范德蒙行列式 设 $\boldsymbol{A}_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$. 证明 $|\boldsymbol{A}_n| = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (x_j - x_i)$.

例：范德蒙行列式

范德蒙行列式 设 $\boldsymbol{A}_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$. 证明 $|\boldsymbol{A}_n| = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (x_j - x_i)$.

证明. 归纳证明.

例：范德蒙行列式

范德蒙行列式 设 $\boldsymbol{A}_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$. 证明 $|\boldsymbol{A}_n| = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$.

证明. 归纳证明. 当 $n = 1, 2$ 时显然成立.

例：范德蒙行列式

范德蒙行列式 设 $\boldsymbol{A}_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$. 证明 $|\boldsymbol{A}_n| = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$.

证明. 归纳证明. 当 $n = 1, 2$ 时显然成立. 设 $n \geqslant 3$, 由 $r_n - x_1 r_{n-1}, \ldots, r_2 - x_1 r_1$ 得到

$$|\boldsymbol{A}_n| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}.$$

例：范德蒙行列式

续证.

续证. 沿着第一列展开，然后提取每一列的公因式 $(x_j - x_1)$ 得到

$$|\boldsymbol{A}_n| = \prod_{j=2}^{n}(x_j - x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

续证. 沿着第一列展开，然后提取每一列的公因式 $(x_j - x_1)$ 得到

$$|\boldsymbol{A}_n| = \prod_{j=2}^{n}(x_j - x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

由归纳假设可知

$$|\boldsymbol{A}_n| = \prod_{j=2}^{n}(x_j - x_1) \cdot \prod_{2\leqslant i<j\leqslant n}(x_j - x_i) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j - x_i).$$

□

练习.

例：范德蒙行列式的应用

练习.

(1) $\begin{vmatrix} x_1^{-3} & x_2^{-3} & x_3^{-3} & x_4^{-3} \\ x_1^{-1} & x_2^{-1} & x_3^{-1} & x_4^{-1} \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix} = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}.$

例：范德蒙行列式的应用

练习.

(1) $\begin{vmatrix} x_1^{-3} & x_2^{-3} & x_3^{-3} & x_4^{-3} \\ x_1^{-1} & x_2^{-1} & x_3^{-1} & x_4^{-1} \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{10cm}}.$

练习.

(1) $$\begin{vmatrix} x_1^{-3} & x_2^{-3} & x_3^{-3} & x_4^{-3} \\ x_1^{-1} & x_2^{-1} & x_3^{-1} & x_4^{-1} \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix} = \underline{x_1^{-3}x_2^{-3}x_3^{-3}x_4^{-3}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant 4}(x_j^2 - x_i^2)}.$$

例：范德蒙行列式的应用

练习.

(1) $\begin{vmatrix} x_1^{-3} & x_2^{-3} & x_3^{-3} & x_4^{-3} \\ x_1^{-1} & x_2^{-1} & x_3^{-1} & x_4^{-1} \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix} = \underline{x_1^{-3}x_2^{-3}x_3^{-3}x_4^{-3}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant 4}(x_j^2-x_i^2)}.$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 65 \end{vmatrix} = \underline{\qquad\qquad}.$

练习.

(1) $$\begin{vmatrix} x_1^{-3} & x_2^{-3} & x_3^{-3} & x_4^{-3} \\ x_1^{-1} & x_2^{-1} & x_3^{-1} & x_4^{-1} \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix} = \underline{x_1^{-3}x_2^{-3}x_3^{-3}x_4^{-3}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant 4}(x_j^2-x_i^2)}.$$

(2) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 65 \end{vmatrix} = \underline{\quad 14 \quad}. = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

例：范德蒙行列式的应用

练习.

(1) $\begin{vmatrix} x_1^{-3} & x_2^{-3} & x_3^{-3} & x_4^{-3} \\ x_1^{-1} & x_2^{-1} & x_3^{-1} & x_4^{-1} \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix} = \underline{x_1^{-3}x_2^{-3}x_3^{-3}x_4^{-3}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant 4}(x_j^2 - x_i^2)}.$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 65 \end{vmatrix} = \underline{\quad 14 \quad}. = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

(3) 设 a, b, c 两两不等，且 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = 0$，则 $a+b+c = \underline{\qquad}$.

例：范德蒙行列式的应用

练习.

(1) $\begin{vmatrix} x_1^{-3} & x_2^{-3} & x_3^{-3} & x_4^{-3} \\ x_1^{-1} & x_2^{-1} & x_3^{-1} & x_4^{-1} \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix} = \underline{x_1^{-3}x_2^{-3}x_3^{-3}x_4^{-3}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant 4}(x_j^2 - x_i^2)}.$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 65 \end{vmatrix} = \underline{\quad 14 \quad}. = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

(3) 设 a, b, c 两两不等，且 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = 0$，则 $a+b+c = \underline{\quad 0 \quad}$.

例：范德蒙行列式

范德蒙行列式还有另一种证明方式，这种思路对于其它行列式的计算也有帮助.

例：范德蒙行列式

范德蒙行列式还有另一种证明方式，这种思路对于其它行列式的计算也有帮助.

证明. $f = |\boldsymbol{A}_n|$ 是 $x_1, \ldots, x_n$ 的多项式，且次数不超过 $1 + 2 + \cdots + (n-1)$.

例：范德蒙行列式

范德蒙行列式还有另一种证明方式，这种思路对于其它行列式的计算也有帮助.

证明. $f = |\boldsymbol{A}_n|$ 是 $x_1, \ldots, x_n$ 的多项式，且次数不超过 $1 + 2 + \cdots + (n-1)$. 由于当 $x_i = x_j$ 时 $f = 0$，因此 f 包含因式 $x_i - x_j$，从而

$$f = g \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i).$$

例：范德蒙行列式

范德蒙行列式还有另一种证明方式, 这种思路对于其它行列式的计算也有帮助.

证明. $f = |\boldsymbol{A}_n|$ 是 $x_1, \dots, x_n$ 的多项式, 且次数不超过 $1 + 2 + \cdots + (n-1)$. 由于当 $x_i = x_j$ 时 $f = 0$, 因此 f 包含因式 $x_i - x_j$, 从而

$$f = g \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i).$$

比较两边次数可知 g 是常数.

例：范德蒙行列式

范德蒙行列式还有另一种证明方式，这种思路对于其它行列式的计算也有帮助.

证明. $f = |\boldsymbol{A}_n|$ 是 $x_1, \ldots, x_n$ 的多项式，且次数不超过 $1 + 2 + \cdots + (n-1)$. 由于当 $x_i = x_j$ 时 $f = 0$，因此 f 包含因式 $x_i - x_j$，从而

$$f = g \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i).$$

比较两边次数可知 g 是常数. 注意到 $\prod_{i=1}^{n} x_i^{i-1}$ 只出现在范德蒙行列式对角元的乘积中，且它在 $\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$ 中的系数是 1.

例：范德蒙行列式

范德蒙行列式还有另一种证明方式，这种思路对于其它行列式的计算也有帮助.

证明. $f=|\boldsymbol{A}_n|$ 是 $x_1,\dots,x_n$ 的多项式，且次数不超过 $1+2+\dots+(n-1)$. 由于当 $x_i=x_j$ 时 $f=0$，因此 f 包含因式 x_i-x_j，从而

$$f=g\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i).$$

比较两边次数可知 g 是常数. 注意到 $\prod_{i=1}^{n} x_i^{i-1}$ 只出现在范德蒙行列式对角元的乘积中，且它在 $\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)$ 中的系数是 1. 因此 $g=1$. □

例. 计算 $\begin{vmatrix} 1^{50} & 2^{50} & \cdots & 100^{50} \\ 2^{50} & 3^{50} & \cdots & 101^{50} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 100^{50} & 101^{50} & \cdots & 199^{50} \end{vmatrix}$.

例. 计算
$$\begin{vmatrix} 1^{50} & 2^{50} & \cdots & 100^{50} \\ 2^{50} & 3^{50} & \cdots & 101^{50} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 100^{50} & 101^{50} & \cdots & 199^{50} \end{vmatrix}.$$

证明. 将第一行换成 $(x+1)^{50}, \dots, (x+100)^{50}$, 并将行列式记为 $f(x)$.

例. 计算
$$\begin{vmatrix} 1^{50} & 2^{50} & \cdots & 100^{50} \\ 2^{50} & 3^{50} & \cdots & 101^{50} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 100^{50} & 101^{50} & \cdots & 199^{50} \end{vmatrix}.$$

证明. 将第一行换成 $(x+1)^{50}, \ldots, (x+100)^{50}$, 并将行列式记为 $f(x)$. 那么 $f(1) = \cdots = f(99) = 0$.

例. 计算 $\begin{vmatrix} 1^{50} & 2^{50} & \cdots & 100^{50} \\ 2^{50} & 3^{50} & \cdots & 101^{50} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 100^{50} & 101^{50} & \cdots & 199^{50} \end{vmatrix}$.

证明. 将第一行换成 $(x+1)^{50}, \dots, (x+100)^{50}$, 并将行列式记为 $f(x)$. 那么 $f(1) = \cdots = f(99) = 0$. 注意到 f 的次数不超过 50, 因此 $f \equiv 0$. □

例. 计算 $$\begin{vmatrix} 1^{50} & 2^{50} & \cdots & 100^{50} \\ 2^{50} & 3^{50} & \cdots & 101^{50} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 100^{50} & 101^{50} & \cdots & 199^{50} \end{vmatrix}.$$

证明. 将第一行换成 $(x+1)^{50}, \dots, (x+100)^{50}$, 并将行列式记为 $f(x)$. 那么 $f(1) = \cdots = f(99) = 0$. 注意到 f 的次数不超过 50, 因此 $f \equiv 0$. □

同理若 $k < n-1$, $\left|\left((a_i+b_j)^k\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\right| = 0$.

(1) $2,3$ 阶行列式可用对角线法直接展开.

行列式常见计算方法总结

(1) $2, 3$ 阶行列式可用对角线法直接展开.

(2) 三角阵行列式等于对角元的乘积, 分块三角阵行列式等于对角阵行列式乘积.

行列式常见计算方法总结

(1) $2, 3$ 阶行列式可用对角线法直接展开.

(2) 三角阵行列式等于对角元的乘积, 分块三角阵行列式等于对角阵行列式乘积.

(3) 行列式的计算一般需要用到三类初等变换, 创造出足够多的零.

行列式常见计算方法总结

(1) $2, 3$ 阶行列式可用对角线法直接展开.

(2) 三角阵行列式等于对角元的乘积, 分块三角阵行列式等于对角阵行列式乘积.

(3) 行列式的计算一般需要用到三类初等变换, 创造出足够多的零.

(4) 行列式沿一行 (列) 的展开往往是降阶法的必要手段.

行列式常见计算方法总结

(1) $2, 3$ 阶行列式可用对角线法直接展开.

(2) 三角阵行列式等于对角元的乘积, 分块三角阵行列式等于对角阵行列式乘积.

(3) 行列式的计算一般需要用到三类初等变换, 创造出足够多的零.

(4) 行列式沿一行 (列) 的展开往往是降阶法的必要手段.

(5) 范德蒙型行列式可处理方阵为元素幂次递增的情形.

第四节　逆矩阵

- 方阵的伴随矩阵
- 逆矩阵的定义和形式
- 逆矩阵的性质
- 克拉默法则
- 逆矩阵的应用

定义. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为 $n\geqslant 2$ 阶方阵. 由 $\boldsymbol{A}$ 的代数余子式形成的 n 阶方阵

$$\boldsymbol{A}^*=(A_{ji})=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的**伴随矩阵**.

伴随矩阵的定义

定义. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为 $n\geqslant 2$ 阶方阵. 由 $\boldsymbol{A}$ 的代数余子式形成的 n 阶方阵

$$\boldsymbol{A}^*=(A_{ji})=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.

注意, 伴随矩阵的 (i,j) 元是代数余子式 A_{ji} 而不是 A_{ij}.

伴随矩阵的定义

定义. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为 $n \geqslant 2$ 阶方阵. 由 $\boldsymbol{A}$ 的代数余子式形成的 n 阶方阵

$$\boldsymbol{A}^*=(A_{ji})=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.

注意, 伴随矩阵的 (i,j) 元是代数余子式 A_{ji} 而不是 A_{ij}.

$\boldsymbol{A}^*$ 对应的线性变换是 $\boldsymbol{A}$ 对应的线性变换 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 诱导的 $n-1$ 次外代数的对偶空间上的线性变换 $\left(\wedge^{n-1}\mathbb{R}^n\right)^* \to \left(\wedge^{n-1}\mathbb{R}^n\right)^*$, 感兴趣的可自行阅读有关材料.

例. 若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

伴随矩阵的性质

例. 若 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

伴随矩阵满足如下性质:

例. 若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

伴随矩阵满足如下性质:

(1) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}_n$.

例. 若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

伴随矩阵满足如下性质:

(1) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}_n$.

这是因为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

例. 若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

伴随矩阵满足如下性质:

(1) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}_n$.

这是因为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

的 (i,j) 元是 $a_{i1}A_{j1}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases} |\boldsymbol{A}|, & i=j; \\ 0, & i\neq j. \end{cases}$

伴随矩阵的性质

(2) $(k\boldsymbol{A})^* = k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$.

伴随矩阵的性质

(2) $(k\boldsymbol{A})^* = k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$.

(3) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^* = (\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}$.

伴随矩阵的性质

(2) $(k\boldsymbol{A})^* = k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$.

(3) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^* = (\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}$.

(4) $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

(2) $(k\boldsymbol{A})^* = k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$.

(3) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^* = (\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}$.

(4) $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

若 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 由 $|\boldsymbol{A}^*| \cdot |\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}| = ||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}_n| = |\boldsymbol{A}|^n$ 可得.

(2) $(k\boldsymbol{A})^* = k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$.

(3) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^* = (\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}$.

(4) $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

若 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 由 $|\boldsymbol{A}^*| \cdot |\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}| = ||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}_n| = |\boldsymbol{A}|^n$ 可得.

若 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{A}^*)^* = |\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{A}^*)^* = \boldsymbol{O}$$

(2) $(k\boldsymbol{A})^* = k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$.

(3) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^* = (\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}$.

(4) $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

若 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 由 $|\boldsymbol{A}^*| \cdot |\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}| = ||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}_n| = |\boldsymbol{A}|^n$ 可得.

若 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{A}^*)^* = |\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{A}^*)^* = \boldsymbol{O} = |\boldsymbol{A}^*|\boldsymbol{A},$$

伴随矩阵的性质

(2) $(k\boldsymbol{A})^* = k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$.

(3) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^* = (\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}$.

(4) $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

若 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 由 $|\boldsymbol{A}^*| \cdot |\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}| = ||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}_n| = |\boldsymbol{A}|^n$ 可得.

若 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{A}^*)^* = |\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{A}^*)^* = \boldsymbol{O} = |\boldsymbol{A}^*|\boldsymbol{A},$$

于是 $|\boldsymbol{A}^*| = 0$ 或 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}, \boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{O}$. 故 $|\boldsymbol{A}^*| = 0$.

伴随矩阵的伴随

(5) $$(\boldsymbol{A}^*)^* = \begin{cases} \boldsymbol{A}, & n = 2; \\ |\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}, & n \geqslant 3. \end{cases}$$

(5) $(\boldsymbol{A}^*)^* = \begin{cases} \boldsymbol{A}, & n = 2; \\ |\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}, & n \geqslant 3. \end{cases}$

容易知道, 2 阶方阵满足 $(\boldsymbol{A}^*)^* = \boldsymbol{A}$.

(5) $(\boldsymbol{A}^*)^* = \begin{cases} \boldsymbol{A}, & n=2; \\ |\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}, & n\geqslant 3. \end{cases}$

容易知道, 2 阶方阵满足 $(\boldsymbol{A}^*)^* = \boldsymbol{A}$. 若 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\geqslant 3$ 阶方阵且 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$, 则由

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{A}^*)^* = |\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{A}^*)^* = |\boldsymbol{A}^*|\boldsymbol{A}$$

可知

$$(\boldsymbol{A}^*)^* = \frac{|\boldsymbol{A}^*|}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}.$$

(5) $(\boldsymbol{A}^*)^* = \begin{cases} \boldsymbol{A}, & n=2; \\ |\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}, & n \geqslant 3. \end{cases}$

容易知道, 2 阶方阵满足 $(\boldsymbol{A}^*)^* = \boldsymbol{A}$. 若 $\boldsymbol{A}$ 是 $n \geqslant 3$ 阶方阵且 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 则由

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{A}^*)^* = |\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{A}^*)^* = |\boldsymbol{A}^*|\boldsymbol{A}$$

可知

$$(\boldsymbol{A}^*)^* = \frac{|\boldsymbol{A}^*|}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}.$$

若 $\boldsymbol{A}$ 是 $n \geqslant 3$ 阶方阵且 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 我们会在 §2.4 证明 $(\boldsymbol{A}^*)^* = \boldsymbol{O}$.

例. 设非零 $n \geqslant 3$ 实方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足对任意 i, j, $a_{ij} = A_{ij}$. 求 $|\boldsymbol{A}|$.

例. 设非零 $n \geqslant 3$ 实方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足对任意 i, j, $a_{ij} = A_{ij}$. 求 $|\boldsymbol{A}|$.

解答. 由题设可知 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

例：伴随矩阵的性质

例. 设非零 $n \geqslant 3$ 实方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足对任意 i, j, $a_{ij} = A_{ij}$. 求 $|\boldsymbol{A}|$.

解答. 由题设可知 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$. 因此 $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$, $|\boldsymbol{A}| = 0, 1$ 或 -1.

例：伴随矩阵的性质

例. 设非零 $n \geqslant 3$ 实方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足对任意 i, j, $a_{ij} = A_{ij}$. 求 $|\boldsymbol{A}|$.

解答. 由题设可知 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$. 因此 $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$, $|\boldsymbol{A}| = 0, 1$ 或 -1.
注意 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 的第 i 个对角元

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 \geqslant 0.$$

例. 设非零 $n \geqslant 3$ 实方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足对任意 i, j, $a_{ij} = A_{ij}$. 求 $|\boldsymbol{A}|$.

解答. 由题设可知 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$. 因此 $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$, $|\boldsymbol{A}| = 0, 1$ 或 -1.
注意 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 的第 i 个对角元

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 \geqslant 0.$$

因此 $|\boldsymbol{A}| \geqslant 0$.

例：伴随矩阵的性质

例. 设非零 $n \geqslant 3$ 实方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足对任意 i, j, $a_{ij} = A_{ij}$. 求 $|\boldsymbol{A}|$.

解答. 由题设可知 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$. 因此 $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$, $|\boldsymbol{A}| = 0, 1$ 或 -1.
注意 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 的第 i 个对角元

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 \geqslant 0.$$

因此 $|\boldsymbol{A}| \geqslant 0$. 若 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 则所有的 $a_{ik} = 0$, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$, 矛盾! 因此 $|\boldsymbol{A}| = 1$.

例. 设非零 $n \geqslant 3$ 实方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足对任意 i, j, $a_{ij} = A_{ij}$. 求 $|\boldsymbol{A}|$.

解答. 由题设可知 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$. 因此 $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$, $|\boldsymbol{A}| = 0, 1$ 或 -1.
注意 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 的第 i 个对角元

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 \geqslant 0.$$

因此 $|\boldsymbol{A}| \geqslant 0$. 若 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 则所有的 $a_{ik} = 0, \boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$, 矛盾! 因此 $|\boldsymbol{A}| = 1$.

事实上, $\boldsymbol{A}$ 是正交阵, 即满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$ 的实方阵.

给定一个线性变换 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, 若线性变换 $g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ 满足

$$(gf)(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x},\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n,\quad (fg)(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y},\forall\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m,$$

给定一个线性变换 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, 若线性变换 $g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ 满足

$$(gf)(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x},\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n,\quad (fg)(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y},\forall\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m,$$

则称 g 是 f 的逆.

给定一个线性变换 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, 若线性变换 $g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ 满足

$$(gf)(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x},\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n,\quad (fg)(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y},\forall\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m,$$

则称 g 是 f 的逆.

设 f,g 对应的矩阵分别是 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$, 则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}_m,\quad \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}_n.$$

给定一个线性变换 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, 若线性变换 $g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ 满足

$$(gf)(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x},\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n,\quad (fg)(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y},\forall\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m,$$

则称 g 是 f 的逆.

设 f,g 对应的矩阵分别是 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$, 则

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}_m,\quad \boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}_n.$$

由于 $m>n$ 时 $|\boldsymbol{AB}|=0$; $m<n$ 时 $|\boldsymbol{BA}|=0$.

给定一个线性变换 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, 若线性变换 $g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ 满足

$$(gf)(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x},\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n,\quad (fg)(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y},\forall\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m,$$

则称 g 是 f 的逆.

设 f,g 对应的矩阵分别是 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$, 则

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}_m,\quad \boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}_n.$$

由于 $m>n$ 时 $|\boldsymbol{AB}|=0$; $m<n$ 时 $|\boldsymbol{BA}|=0$. 因此线性变换的逆只可能在 $m=n$ 时存在.

由此得到对应的矩阵的逆的定义:

由此得到对应的矩阵的逆的定义:

定义. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵. 若存在 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$ 使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}_n,$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 是**可逆矩阵**, $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的**逆矩阵**.

逆矩阵的定义和唯一性

由此得到对应的矩阵的逆的定义:

定义. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵. 若存在 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$ 使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}_n,$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 是**可逆矩阵**, $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的**逆矩阵**.

可逆矩阵的逆矩阵唯一吗?

由此得到对应的矩阵的逆的定义:

定义. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵. 若存在 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$ 使得

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{E}_n,$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 是**可逆矩阵**, $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的**逆矩阵**.

可逆矩阵的逆矩阵唯一吗? 设 $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}'$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵, 则

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}_n, \quad \boldsymbol{B}'\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}_n.$$

由此得到对应的矩阵的逆的定义:

定义. 设 A 是 n 阶方阵. 若存在 n 阶方阵 B 使得

$$AB = BA = E_n,$$

则称 A 是**可逆矩阵**, B 是 A 的**逆矩阵**.

可逆矩阵的逆矩阵唯一吗? 设 B, B' 都是 A 的逆矩阵, 则

$$AB = E_n, \quad B'A = E_n.$$

于是

$$B = (B'A)B = B'(AB) = B'.$$

由此得到对应的矩阵的逆的定义:

定义. 设 A 是 n 阶方阵. 若存在 n 阶方阵 B 使得

$$AB = BA = E_n,$$

则称 A 是**可逆矩阵**, B 是 A 的**逆矩阵**.

可逆矩阵的逆矩阵唯一吗? 设 B, B' 都是 A 的逆矩阵, 则

$$AB = E_n, \quad B'A = E_n.$$

于是

$$B = (B'A)B = B'(AB) = B'.$$

因此**若逆矩阵存在必唯一, 记为 A^{-1}**.

若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 从 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{E}$ 可知 $|\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{A}^{-1}| = 1.$

逆矩阵存在性的刻画

若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 从 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{E}$ 可知 $|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{A}^{-1}|=1$. 从而 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 从 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{E}$ 可知 $|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{A}^{-1}|=1$. 从而 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

反之, 若 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$, 则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}=\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E},$$

逆矩阵存在性的刻画

若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 从 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{E}$ 可知 $|\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{A}^{-1}| = 1$. 从而 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$.

反之, 若 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}, \qquad \boldsymbol{A} \cdot \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^* = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^* \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E},$$

逆矩阵存在性的刻画

若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 从 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{E}$ 可知 $|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{A}^{-1}|=1$. 从而 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

反之, 若 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$, 则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}, \qquad \boldsymbol{A}\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}, \qquad \boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*.$$

逆矩阵存在性的刻画

若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 从 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{E}$ 可知 $|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{A}^{-1}|=1$. 从而 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

反之, 若 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$, 则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E},\qquad \boldsymbol{A}\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E},\qquad \boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*.$$

逆矩阵的存在性和形式. n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆当且仅当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$. 此时 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$.

推论. 设 A, B 为 n 阶方阵. 若 $AB = E$ (或 $BA = E$), 则 $B = A^{-1}$.

推论. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵. 若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$ (或 $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{E}$), 则 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$.

证明. 若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$, 则 $|\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}| = 1$, $|\boldsymbol{A}| \neq 0$.

逆矩阵存在性的刻画

推论. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵. 若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$ (或 $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{E}$), 则 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$.

证明. 若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$, 则 $|\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}| = 1$, $|\boldsymbol{A}| \neq 0$. 因此 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

推论. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵. 若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$ (或 $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{E}$), 则 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$.

证明. 若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$, 则 $|\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}| = 1$, $|\boldsymbol{A}| \neq 0$. 因此 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AB}) = \boldsymbol{B}. \qquad \square$$

推论. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵. 若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$ (或 $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{E}$), 则 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$.

证明. 若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$, 则 $|\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}| = 1$, $|\boldsymbol{A}| \neq 0$. 因此 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AB}) = \boldsymbol{B}. \qquad \square$$

行列式为零的方阵也叫**退化方阵**.

例：计算逆矩阵

例. 证明 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 可逆并求其逆矩阵.

例：计算逆矩阵

例. 证明 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 可逆并求其逆矩阵.

解答. 由于 $|\boldsymbol{A}| = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

例：计算逆矩阵

例. 证明 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 可逆并求其逆矩阵.

解答. 由于 $|\boldsymbol{A}| = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 可逆. 由于 $\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, 因此

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

例：计算逆矩阵

例. 证明 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ 可逆并求其逆矩阵.

解答. 由于 $|\boldsymbol{A}|=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$，因此 $\boldsymbol{A}$ 可逆. 由于 $\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$，因此

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.$$

注意到 $\boldsymbol{A}$ 对应的是平面上沿原点逆时针旋转 θ，因此 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 对应的是平面上沿原点逆时针旋转 $-\theta$.

例：计算逆矩阵

例. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-1\\-1&3&4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&7&-2\\-1&-3&5\\1&5&11\end{pmatrix}$ 是否可逆？若可逆求其逆矩阵.

例. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-1\\-1&3&4\end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&7&-2\\-1&-3&5\\1&5&11\end{pmatrix}$ 是否可逆？若可逆求其逆矩阵.

解答. 由于 $|\boldsymbol{A}| \xlongequal{r_3+r_1} \begin{vmatrix}1&2&1\\0&1&-1\\0&5&5\end{vmatrix}=10$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 可逆,

例：计算逆矩阵

例. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-1\\-1&3&4\end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&7&-2\\-1&-3&5\\1&5&11\end{pmatrix}$ 是否可逆？若可逆求其逆矩阵.

解答. 由于 $|\boldsymbol{A}| \xlongequal{r_3+r_1} \begin{vmatrix}1&2&1\\0&1&-1\\0&5&5\end{vmatrix}=10$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 可逆,

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{10}\boldsymbol{A}^*=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}$$

例. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-1\\-1&3&4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&7&-2\\-1&-3&5\\1&5&11\end{pmatrix}$ 是否可逆？若可逆求其逆矩阵.

解答. 由于 $|\boldsymbol{A}| \xlongequal{r_3+r_1} \begin{vmatrix}1&2&1\\0&1&-1\\0&5&5\end{vmatrix}=10$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 可逆,

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{10}\boldsymbol{A}^*=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}7&-5&-3\\1&5&1\\1&-5&1\end{pmatrix}.$$

例. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-1\\-1&3&4\end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&7&-2\\-1&-3&5\\1&5&11\end{pmatrix}$ 是否可逆？若可逆求其逆矩阵.

解答. 由于 $|\boldsymbol{A}| \xlongequal{r_3+r_1} \begin{vmatrix}1&2&1\\0&1&-1\\0&5&5\end{vmatrix}=10$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 可逆,

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{10}\boldsymbol{A}^*=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}7&-5&-3\\1&5&1\\1&-5&1\end{pmatrix}.$$

由于 $|\boldsymbol{B}| \xlongequal[c_2-5c_1]{c_3-11c_1} \begin{vmatrix}2&-3&-24\\-1&2&16\\1&0&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3&-24\\2&16\end{vmatrix}=0$, 因此 $\boldsymbol{B}$ 不可逆.

例. 设 $\lambda_1, \dots, \lambda_n \neq 0$,

$$\mathbf{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n),$$

例. 设 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \neq 0$,

$$\mathbf{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n),$$

则

$$\mathbf{\Lambda}^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1}).$$

例. 设 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \neq 0$,

$$\mathbf{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n),$$

则

$$\mathbf{\Lambda}^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1}).$$

通过计算伴随矩阵还可知道，行列式非零的上 *(下)* 三角阵的逆也是上 *(下)* 三角的，

例：计算逆矩阵

例. 设 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \neq 0$,

$$\mathbf{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n),$$

则

$$\mathbf{\Lambda}^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1}).$$

通过计算伴随矩阵还可知道，行列式非零的上 (下) 三角阵的逆也是上 (下) 三角的，且二者对角元对应元素互为逆.

逆矩阵的计算方法

逆矩阵通常采用下述方法计算:

逆矩阵的计算方法

逆矩阵通常采用下述方法计算:

(1) 利用公式 $\boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$, 适用于 $2, 3$ 阶方阵, 或用于抽象分析.

逆矩阵的计算方法

逆矩阵通常采用下述方法计算:

(1) 利用公式 $\boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$, 适用于 $2, 3$ 阶方阵, 或用于抽象分析.

(2) 寻找方阵 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$, 适用于抽象矩阵求逆.

逆矩阵的计算方法

逆矩阵通常采用下述方法计算:

(1) 利用公式 $\boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$, 适用于 $2, 3$ 阶方阵, 或用于抽象分析.

(2) 寻找方阵 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$, 适用于抽象矩阵求逆.

(3) 利用矩阵的初等变换求逆矩阵, 该方法我们会在下一节中学习.

逆矩阵通常采用下述方法计算:

(1) 利用公式 $\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$, 适用于 $2,3$ 阶方阵, 或用于抽象分析.

(2) 寻找方阵 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$, 适用于抽象矩阵求逆.

(3) 利用矩阵的初等变换求逆矩阵, 该方法我们会在下一节中学习.

例. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵且满足 $\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$. 求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 和 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}$.

逆矩阵通常采用下述方法计算:

(1) 利用公式 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$, 适用于 $2,3$ 阶方阵, 或用于抽象分析.

(2) 寻找方阵 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$, 适用于抽象矩阵求逆.

(3) 利用矩阵的初等变换求逆矩阵, 该方法我们会在下一节中学习.

例. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵且满足 $\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$. 求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 和 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}$.

解答.

逆矩阵通常采用下述方法计算:

(1) 利用公式 $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}A^*$, 适用于 $2, 3$ 阶方阵, 或用于抽象分析.

(2) 寻找方阵 B 使得 $AB = E$, 适用于抽象矩阵求逆.

(3) 利用矩阵的初等变换求逆矩阵, 该方法我们会在下一节中学习.

例. 设 A 为 n 阶方阵且满足 $A^2 + 3A - 2E = O$. 求 A^{-1} 和 $(A-E)^{-1}$.

解答.

(1) 由于 $A^2 + 3A = 2E$,

逆矩阵的计算方法

逆矩阵通常采用下述方法计算:

(1) 利用公式 $\boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$, 适用于 $2,3$ 阶方阵, 或用于抽象分析.

(2) 寻找方阵 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$, 适用于抽象矩阵求逆.

(3) 利用矩阵的初等变换求逆矩阵, 该方法我们会在下一节中学习.

例. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵且满足 $\boldsymbol{A}^2 + 3\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$. 求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 和 $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})^{-1}$.

解答.

(1) 由于 $\boldsymbol{A}^2 + 3\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{E}$, 因此 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A} + 3\boldsymbol{E}) = 2\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{1}{2}(\boldsymbol{A} + 3\boldsymbol{E})$.

逆矩阵通常采用下述方法计算:

(1) 利用公式 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$, 适用于 $2,3$ 阶方阵, 或用于抽象分析.

(2) 寻找方阵 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$, 适用于抽象矩阵求逆.

(3) 利用矩阵的初等变换求逆矩阵, 该方法我们会在下一节中学习.

例. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵且满足 $\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$. 求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 和 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}$.

解答.

(1) 由于 $\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}$, 因此 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})=2\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})$.

(2) 由于 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E})=-2\boldsymbol{E}$,

逆矩阵的计算方法

逆矩阵通常采用下述方法计算:

(1) 利用公式 $\boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$, 适用于 $2, 3$ 阶方阵, 或用于抽象分析.

(2) 寻找方阵 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$, 适用于抽象矩阵求逆.

(3) 利用矩阵的初等变换求逆矩阵, 该方法我们会在下一节中学习.

例. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵且满足 $\boldsymbol{A}^2 + 3\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$. 求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 和 $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})^{-1}$.

解答.

(1) 由于 $\boldsymbol{A}^2 + 3\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{E}$, 因此 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A} + 3\boldsymbol{E}) = 2\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{1}{2}(\boldsymbol{A} + 3\boldsymbol{E})$.

(2) 由于 $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})(\boldsymbol{A} + 4\boldsymbol{E}) = -2\boldsymbol{E}$, 因此 $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})^{-1} = -\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{A} + 4\boldsymbol{E})$.

设 $f(x)$ 是一多项式, $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$, 我们想求 $(\boldsymbol{A}-a\boldsymbol{E})^{-1}$.

方阵的多项式

设 $f(x)$ 是一多项式, $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$, 我们想求 $(\boldsymbol{A}-a\boldsymbol{E})^{-1}$. 注意到

$$\frac{x^k-a^k}{x-a}=x^{k-1}+ax^{k-2}+\cdots+a^{k-1}$$

是一个多项式, 因此存在多项式 $g(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

方阵的多项式

设 $f(x)$ 是一多项式, $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$, 我们想求 $(\boldsymbol{A}-a\boldsymbol{E})^{-1}$. 注意到

$$\frac{x^k-a^k}{x-a}=x^{k-1}+ax^{k-2}+\cdots+a^{k-1}$$

是一个多项式, 因此存在多项式 $g(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$. 于是

$$f(x)-f(a)=(x-a)g(x),$$

$$f(\boldsymbol{A})-f(a)\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{A}-a\boldsymbol{E})g(\boldsymbol{A}).$$

设 $f(x)$ 是一多项式, $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$, 我们想求 $(\boldsymbol{A}-a\boldsymbol{E})^{-1}$. 注意到

$$\frac{x^k-a^k}{x-a}=x^{k-1}+ax^{k-2}+\cdots+a^{k-1}$$

是一个多项式, 因此存在多项式 $g(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$. 于是

$$f(x)-f(a)=(x-a)g(x),$$

$$f(\boldsymbol{A})-f(a)\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{A}-a\boldsymbol{E})g(\boldsymbol{A}).$$

从而当 $f(a)\neq 0$ 时, $(\boldsymbol{A}-a\boldsymbol{E})^{-1}=-\dfrac{1}{f(a)}g(\boldsymbol{A})$.

设 $f(x)$ 是一多项式, $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$, 我们想求 $(\boldsymbol{A}-a\boldsymbol{E})^{-1}$. 注意到

$$\frac{x^k-a^k}{x-a}=x^{k-1}+ax^{k-2}+\cdots+a^{k-1}$$

是一个多项式, 因此存在多项式 $g(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$. 于是

$$f(x)-f(a)=(x-a)g(x),$$

$$f(\boldsymbol{A})-f(a)\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{A}-a\boldsymbol{E})g(\boldsymbol{A}).$$

从而当 $f(a)\neq 0$ 时, $(\boldsymbol{A}-a\boldsymbol{E})^{-1}=-\dfrac{1}{f(a)}g(\boldsymbol{A})$.

当 $f(a)=0$ 时, $\boldsymbol{A}-a\boldsymbol{E}$ 未必可逆.

逆矩阵满足如下性质:

逆矩阵的性质

逆矩阵满足如下性质:

(1) **设 $\boldsymbol{A}$ 可逆, $\lambda \neq 0$.**

逆矩阵满足如下性质:

(1) **设 $\boldsymbol{A}$ 可逆, $\lambda \neq 0$.**

- $|\boldsymbol{A}^{-1}| = |\boldsymbol{A}|^{-1}$;

逆矩阵满足如下性质:

(1) **设 $\boldsymbol{A}$ 可逆, $\lambda \neq 0$.**

- $|\boldsymbol{A}^{-1}| = |\boldsymbol{A}|^{-1}$;
- $\boldsymbol{A}^{-1}$ **可逆，且** $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}$;

逆矩阵满足如下性质:

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 可逆, $\lambda \neq 0$.

- $|\boldsymbol{A}^{-1}| = |\boldsymbol{A}|^{-1}$;
- $\boldsymbol{A}^{-1}$ 可逆, 且 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}$;
- $\lambda\boldsymbol{A}$ 可逆, 且 $(\lambda\boldsymbol{A})^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{A}^{-1}$;

逆矩阵满足如下性质:

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 可逆, $\lambda \neq 0$.

- $|\boldsymbol{A}^{-1}| = |\boldsymbol{A}|^{-1}$;
- $\boldsymbol{A}^{-1}$ 可逆, 且 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}$;
- $\lambda\boldsymbol{A}$ 可逆, 且 $(\lambda\boldsymbol{A})^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{A}^{-1}$;
- $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 可逆, 且 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$;

逆矩阵满足如下性质:

(1) 设 A 可逆, $\lambda \neq 0$.

- $|A^{-1}| = |A|^{-1}$;
- A^{-1} 可逆, 且 $(A^{-1})^{-1} = A$;
- λA 可逆, 且 $(\lambda A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda} A^{-1}$;
- A^{T} 可逆, 且 $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$;
- A^* 可逆, 且 $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^* = \dfrac{1}{|A|} A$.

逆矩阵满足如下性质:

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 可逆, $\lambda \neq 0$.

- $|\boldsymbol{A}^{-1}| = |\boldsymbol{A}|^{-1}$;
- $\boldsymbol{A}^{-1}$ 可逆, 且 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}$;
- $\lambda\boldsymbol{A}$ 可逆, 且 $(\lambda\boldsymbol{A})^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{A}^{-1}$;
- $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 可逆, 且 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$;
- $\boldsymbol{A}^{*}$ 可逆, 且 $(\boldsymbol{A}^{*})^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^{*} = \dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}$.

由于 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$, 因此 $\boldsymbol{A}^{*} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$.

逆矩阵满足如下性质:

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 可逆, $\lambda \neq 0$.

- $|\boldsymbol{A}^{-1}| = |\boldsymbol{A}|^{-1}$;
- $\boldsymbol{A}^{-1}$ 可逆, 且 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}$;
- $\lambda\boldsymbol{A}$ 可逆, 且 $(\lambda\boldsymbol{A})^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{A}^{-1}$;
- $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 可逆, 且 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$;
- $\boldsymbol{A}^*$ 可逆, 且 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^* = \dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}$.

由于 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$, 因此 $\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$. 于是

$$(\boldsymbol{A}^{-1})^* = |\boldsymbol{A}^{-1}|(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A},$$

逆矩阵满足如下性质:

(1) **设 $\boldsymbol{A}$ 可逆, $\lambda \neq 0$.**

- $|\boldsymbol{A}^{-1}| = |\boldsymbol{A}|^{-1}$;
- $\boldsymbol{A}^{-1}$ **可逆, 且** $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}$;
- $\lambda\boldsymbol{A}$ **可逆, 且** $(\lambda\boldsymbol{A})^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{A}^{-1}$;
- $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ **可逆, 且** $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$;
- $\boldsymbol{A}^*$ **可逆, 且** $(\boldsymbol{A}^*)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^* = \dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}$.

由于 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$, 因此 $\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$. 于是

$$(\boldsymbol{A}^{-1})^* = |\boldsymbol{A}^{-1}|(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}, \quad (\boldsymbol{A}^*)^{-1} = (|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}.$$

(2) 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为同阶可逆矩阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 也可逆，且

$$(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}.$$

(2) 若 A, B 为同阶可逆矩阵, 则 AB 也可逆, 且

$$(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}.$$

一般地

$$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_n)^{-1} = \boldsymbol{A}_n^{-1}\cdots\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{A}_1^{-1}.$$

(2) 若 A, B 为同阶可逆矩阵, 则 AB 也可逆, 且

$$(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}.$$

一般地

$$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_n)^{-1} = \boldsymbol{A}_n^{-1}\cdots\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{A}_1^{-1}.$$

注意矩阵不能相除 $\dfrac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{B}}$, 因为一般 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}$.

(2) 若 A, B 为同阶可逆矩阵，则 AB 也可逆，且

$$(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}.$$

一般地

$$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_n)^{-1} = \boldsymbol{A}_n^{-1}\cdots\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{A}_1^{-1}.$$

注意矩阵不能相除 $\dfrac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{B}}$，因为一般 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}$.

一般地，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1} \neq \boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$.

(2) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶可逆矩阵, 则 $\boldsymbol{AB}$ 也可逆, 且

$$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}.$$

一般地

$$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_n)^{-1}=\boldsymbol{A}_n^{-1}\cdots\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{A}_1^{-1}.$$

注意矩阵不能相除 $\dfrac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{B}}$, 因为一般 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{AB}^{-1}$.

一般地, $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\neq\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$. 例如 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 均可逆, 但
$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 不可逆.

例: 逆矩阵的性质

例. 多选题: 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 为同阶方阵, 且 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则(　　).

(A) 若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AC}$, 则 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$

(B) 若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{CB}$, 则 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}$

(C) 若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$, 则 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{O}$

(D) 若 $\boldsymbol{BC} = \boldsymbol{O}$, 则 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{O}$

例：逆矩阵的性质

例. 多选题：若 A, B, C 为同阶方阵，且 A 可逆，则(AC).

(A) 若 $AB = AC$，则 $B = C$

(B) 若 $AB = CB$，则 $A = C$

(C) 若 $AB = O$，则 $B = O$

(D) 若 $BC = O$，则 $B = O$

例. 多选题：若 A, B, C 为同阶方阵，且 A 可逆，则(AC).

(A) 若 $AB = AC$，则 $B = C$

(B) 若 $AB = CB$，则 $A = C$

(C) 若 $AB = O$，则 $B = O$

(D) 若 $BC = O$，则 $B = O$

练习.

例：逆矩阵的性质

例. 多选题：若 A, B, C 为同阶方阵，且 A 可逆，则（ AC ）.

(A) 若 $AB = AC$，则 $B = C$

(B) 若 $AB = CB$，则 $A = C$

(C) 若 $AB = O$，则 $B = O$

(D) 若 $BC = O$，则 $B = O$

练习.

(1) 设 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 4 & a & 7 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$，且存在矩阵 $B \neq C$ 使得 $AB = AC$，则 $a =$ ______.

例. 多选题：若 A, B, C 为同阶方阵，且 A 可逆，则(AC).

(A) 若 $AB = AC$，则 $B = C$

(B) 若 $AB = CB$，则 $A = C$

(C) 若 $AB = O$，则 $B = O$

(D) 若 $BC = O$，则 $B = O$

练习.

(1) 设 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 4 & a & 7 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$，且存在矩阵 $B \neq C$ 使得 $AB = AC$，则 $a =$ <u>-3</u>.

例. 多选题：若 A, B, C 为同阶方阵，且 A 可逆，则(AC).

(A) 若 $AB = AC$，则 $B = C$

(B) 若 $AB = CB$，则 $A = C$

(C) 若 $AB = O$，则 $B = O$

(D) 若 $BC = O$，则 $B = O$

练习.

(1) 设 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 4 & a & 7 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$，且存在矩阵 $B \neq C$ 使得 $AB = AC$，则 $a =$ $\underline{\quad -3 \quad}$.

(2) 若 A 为 n 阶方阵，则下面命题正确的有______个.

(i) $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} A^*$; (ii) $A^* = |A| A^{-1}$; (iii) $|A^*| = |A|^{n-1}$.

例. 多选题：若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 为同阶方阵，且 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则(AC).

(A) 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$

(B) 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{CB}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}$

(C) 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$

(D) 若 $\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$

练习.

(1) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&1&3\\4&a&7\\3&-1&4\end{pmatrix}$，且存在矩阵 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$，则 $a=$ __-3__.

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，则下面命题正确的有 __1__ 个.

(i) $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$; (ii) $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$; (iii) $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

例：逆矩阵的性质

例. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，若(　　)，则 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆.

(A) $\boldsymbol{A}$ 可逆

(B) $|\boldsymbol{A}|=0$

(C) $\boldsymbol{A}$ 的主对角线元素均为 0

(D) 存在某个正整数 m 使得 $\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{O}$

例：逆矩阵的性质

例. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，若(D)，则 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆.

(A) $\boldsymbol{A}$ 可逆

(B) $|\boldsymbol{A}|=0$

(C) $\boldsymbol{A}$ 的主对角线元素均为 0

(D) 存在某个正整数 m 使得 $\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{O}$

例: 逆矩阵的性质

例. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, 若(D), 则 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆.

(A) $\boldsymbol{A}$ 可逆

(B) $|\boldsymbol{A}|=0$

(C) $\boldsymbol{A}$ 的主对角线元素均为 0

(D) 存在某个正整数 m 使得 $\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{O}$

练习.

例. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，若(D)，则 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆.

(A) $\boldsymbol{A}$ 可逆

(B) $|\boldsymbol{A}|=0$

(C) $\boldsymbol{A}$ 的主对角线元素均为 0

(D) 存在某个正整数 m 使得 $\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{O}$

练习.

(1) 设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^3-2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，且 $|\boldsymbol{A}|=2$，则 $|(\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{E})^{-1}|=$______.

例. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, 若(D), 则 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆.

(A) $\boldsymbol{A}$ 可逆

(B) $|\boldsymbol{A}|=0$

(C) $\boldsymbol{A}$ 的主对角线元素均为 0

(D) 存在某个正整数 m 使得 $\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{O}$

练习.

(1) 设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^3-2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$, 且 $|\boldsymbol{A}|=2$, 则 $|(\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{E})^{-1}|=$ __-2__.

例：逆矩阵的性质

例. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，若(D)，则 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆.

(A) $\boldsymbol{A}$ 可逆 (B) $|\boldsymbol{A}|=0$

(C) $\boldsymbol{A}$ 的主对角线元素均为 0 (D) 存在某个正整数 m 使得 $\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{O}$

练习.

(1) 设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^3-2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，且 $|\boldsymbol{A}|=2$，则 $|(\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{E})^{-1}|=$ __-2__.

(2) 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 满足 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$，则(   ).

(A) $\boldsymbol{ACB}=\boldsymbol{E}$ (B) $\boldsymbol{CBA}=\boldsymbol{E}$ (C) $\boldsymbol{BAC}=\boldsymbol{E}$ (D) $\boldsymbol{CAB}=\boldsymbol{E}$

例. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, 若(D), 则 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆.

(A) $\boldsymbol{A}$ 可逆

(B) $|\boldsymbol{A}|=0$

(C) $\boldsymbol{A}$ 的主对角线元素均为 0

(D) 存在某个正整数 m 使得 $\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{O}$

练习.

(1) 设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^3-2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$, 且 $|\boldsymbol{A}|=2$, 则 $|(\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{E})^{-1}|=$ $\underline{\quad -2 \quad}$.

(2) 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 满足 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$, 则(D).

(A) $\boldsymbol{ACB}=\boldsymbol{E}$ (B) $\boldsymbol{CBA}=\boldsymbol{E}$ (C) $\boldsymbol{BAC}=\boldsymbol{E}$ (D) $\boldsymbol{CAB}=\boldsymbol{E}$

例. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，若(D)，则 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆.

(A) $\boldsymbol{A}$ 可逆

(B) $|\boldsymbol{A}|=0$

(C) $\boldsymbol{A}$ 的主对角线元素均为 0

(D) 存在某个正整数 m 使得 $\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{O}$

练习.

(1) 设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^3-2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，且 $|\boldsymbol{A}|=2$，则 $|(\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{E})^{-1}|=$ $\underline{\quad -2 \quad}$.

(2) 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 满足 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$，则(D).

(A) $\boldsymbol{ACB}=\boldsymbol{E}$ (B) $\boldsymbol{CBA}=\boldsymbol{E}$ (C) $\boldsymbol{BAC}=\boldsymbol{E}$ (D) $\boldsymbol{CAB}=\boldsymbol{E}$

想一想 $\boldsymbol{B}^{-1}=?$

例：逆矩阵的性质

例. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵, $|\boldsymbol{A}| = \dfrac{1}{2}$. 求 $\left|(2\boldsymbol{A})^{-1} - (2\boldsymbol{A})^*\right|$.

例. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵, $|\boldsymbol{A}| = \dfrac{1}{2}$. 求 $\left|(2\boldsymbol{A})^{-1} - (2\boldsymbol{A})^*\right|$.

解答.

$$(2\boldsymbol{A})^{-1} - (2\boldsymbol{A})^* = \frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{-1} - 2^2\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^* - 4\boldsymbol{A}^* = -3\boldsymbol{A}^*,$$

例. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵, $|\boldsymbol{A}| = \dfrac{1}{2}$. 求 $\left|(2\boldsymbol{A})^{-1} - (2\boldsymbol{A})^*\right|$.

解答.

$$(2\boldsymbol{A})^{-1} - (2\boldsymbol{A})^* = \frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{-1} - 2^2\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^* - 4\boldsymbol{A}^* = -3\boldsymbol{A}^*,$$

因此

$$\left|(2\boldsymbol{A})^{-1} - (2\boldsymbol{A})^*\right| = -27|\boldsymbol{A}^*| = -27|\boldsymbol{A}|^2 = -\frac{27}{4}.$$

例：逆矩阵计算方阵的幂

例. 设 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&\\&2\end{pmatrix}$, 求 $(\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1})^n$.

例. 设 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}, \boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1 & \\ & 2\end{pmatrix}$, 求 $(\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1})^n$.

解答. $|\boldsymbol{P}|=2, \boldsymbol{P}^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$,

例：逆矩阵计算方阵的幂

例. 设 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 2 \end{pmatrix}$, 求 $(\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1})^n$.

解答. $|\boldsymbol{P}| = 2, \boldsymbol{P}^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,

$$(\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1})^n = \boldsymbol{P\Lambda P}^{-1} \cdot \boldsymbol{P\Lambda P}^{-1} \cdots \boldsymbol{P\Lambda P}^{-1} = \boldsymbol{P\Lambda}^n \boldsymbol{P}^{-1}$$

例：逆矩阵计算方阵的幂

例. 设 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}, \boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1 & \\ & 2\end{pmatrix}$，求 $(\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1})^n$.

解答. $|\boldsymbol{P}|=2, \boldsymbol{P}^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1})^n &= \boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}\cdot\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}\cdots\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}=\boldsymbol{P\Lambda}^n\boldsymbol{P}^{-1}\\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \\ & 2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-2^n & 2^n-1\\ 2-2^{n+1} & 2^{n+1}-1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

例. 设 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix}, \boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&\\&2\end{pmatrix}$, 求 $(\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1})^n$.

解答. $|\boldsymbol{P}|=2, \boldsymbol{P}^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2\\-1&1\end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1})^n&=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}\cdot\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}\cdots\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^n\boldsymbol{P}^{-1}\\&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\\&2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-2\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-2^n&2^n-1\\2-2^{n+1}&2^{n+1}-1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

由此可知, 对于多项式 $f(x)$, $f(\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1})=\boldsymbol{P}f(\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}^{-1}$.

例：矩阵乘积的伴随

例. 证明 $(\boldsymbol{AB})^* = \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$.

证明. 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均可逆，则

$$(\boldsymbol{AB})^* = |\boldsymbol{AB}|(\boldsymbol{AB})^{-1} = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^*.$$

例：矩阵乘积的伴随

例. 证明 $(\boldsymbol{AB})^* = \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$.

证明. 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均可逆，则

$$(\boldsymbol{AB})^* = |\boldsymbol{AB}|(\boldsymbol{AB})^{-1} = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^*.$$

一般情形下，注意到 $|x\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}|$ 展开式包含 x^n 项，所以它是 x 的多项式.

例：矩阵乘积的伴随

例. 证明 $(\boldsymbol{AB})^* = \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$.

证明. 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均可逆，则

$$(\boldsymbol{AB})^* = |\boldsymbol{AB}|(\boldsymbol{AB})^{-1} = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^*.$$

一般情形下，注意到 $|x\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}|$ 展开式包含 x^n 项，所以它是 x 的多项式. 由此可知存在无穷多 x 使得 $x\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}, x\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B}$ 均可逆.

例. 证明 $(\boldsymbol{AB})^* = \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$.

证明. 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均可逆，则

$$(\boldsymbol{AB})^* = |\boldsymbol{AB}|(\boldsymbol{AB})^{-1} = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^*.$$

一般情形下，注意到 $|x\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}|$ 展开式包含 x^n 项，所以它是 x 的多项式. 由此可知存在无穷多 x 使得 $x\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}, x\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B}$ 均可逆.

设 $f(x), g(x)$ 分别为 $((x\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A})(x\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B}))^*$ 和 $(x\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B})^*(x\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A})^*$ 的 (i, j) 元，

例. 证明 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^* = \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$.

证明. 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均可逆, 则

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^* = |\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1} = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^*.$$

一般情形下, 注意到 $|x\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}|$ 展开式包含 x^n 项, 所以它是 x 的多项式. 由此可知存在无穷多 x 使得 $x\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}, x\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B}$ 均可逆.

设 $f(x), g(x)$ 分别为 $((x\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A})(x\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B}))^*$ 和 $(x\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B})^*(x\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A})^*$ 的 (i, j) 元, 那么 $f(x) = g(x)$ 对无穷多 x 成立.

例：矩阵乘积的伴随

例. 证明 $(\boldsymbol{AB})^* = \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$.

证明. 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均可逆，则

$$(\boldsymbol{AB})^* = |\boldsymbol{AB}|(\boldsymbol{AB})^{-1} = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^*.$$

一般情形下，注意到 $|x\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}|$ 展开式包含 x^n 项，所以它是 x 的多项式. 由此可知存在无穷多 x 使得 $x\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}, x\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B}$ 均可逆.

设 $f(x), g(x)$ 分别为 $((x\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A})(x\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B}))^*$ 和 $(x\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B})^*(x\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A})^*$ 的 (i, j) 元，那么 $f(x) = g(x)$ 对无穷多 x 成立. 而 f, g 均是 x 的多项式，这迫使 $f = g, f(0) = g(0)$.

例：矩阵乘积的伴随

例. 证明 $(\boldsymbol{AB})^* = \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$.

证明. 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均可逆，则

$$(\boldsymbol{AB})^* = |\boldsymbol{AB}|(\boldsymbol{AB})^{-1} = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^*.$$

一般情形下，注意到 $|x\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}|$ 展开式包含 x^n 项，所以它是 x 的多项式. 由此可知存在无穷多 x 使得 $x\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}, x\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B}$ 均可逆.

设 $f(x), g(x)$ 分别为 $((x\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A})(x\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B}))^*$ 和 $(x\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B})^*(x\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A})^*$ 的 (i, j) 元，那么 $f(x) = g(x)$ 对无穷多 x 成立. 而 f, g 均是 x 的多项式，这迫使 $f = g, f(0) = g(0)$. 故 $(\boldsymbol{AB})^* = \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$. □

例：矩阵乘积的伴随

例. 证明 $(\boldsymbol{AB})^* = \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$.

证明. 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均可逆，则

$$(\boldsymbol{AB})^* = |\boldsymbol{AB}|(\boldsymbol{AB})^{-1} = |\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^*.$$

一般情形下，注意到 $|x\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|$ 展开式包含 x^n 项，所以它是 x 的多项式. 由此可知存在无穷多 x 使得 $x\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}, x\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}$ 均可逆.

设 $f(x), g(x)$ 分别为 $((x\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})(x\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}))^*$ 和 $(x\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^*(x\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^*$ 的 (i,j) 元，那么 $f(x)=g(x)$ 对无穷多 x 成立. 而 f,g 均是 x 的多项式，这迫使 $f=g, f(0)=g(0)$. 故 $(\boldsymbol{AB})^* = \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$. □

伴随、逆、转置相互可交换，且均满足此种性质.

克拉默法则. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, $\boldsymbol{b}=(b_1,\ldots,b_n)^{\mathrm{T}}$ 是 n 维列向量, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列换成 $\boldsymbol{b}$ 得到的方阵记为 $\boldsymbol{A}_j$. 当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$, 线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解

$$\boldsymbol{x}=\left(\frac{|\boldsymbol{A}_1|}{|\boldsymbol{A}|},\frac{|\boldsymbol{A}_2|}{|\boldsymbol{A}|},\ldots,\frac{|\boldsymbol{A}_n|}{|\boldsymbol{A}|}\right).$$

克拉默法则. 设 A 是 n 阶方阵, $\boldsymbol{b}=(b_1,\ldots,b_n)^{\mathrm{T}}$ 是 n 维列向量, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列换成 $\boldsymbol{b}$ 得到的方阵记为 $\boldsymbol{A}_j$. 当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$, 线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解

$$\boldsymbol{x}=\left(\frac{|\boldsymbol{A}_1|}{|\boldsymbol{A}|},\frac{|\boldsymbol{A}_2|}{|\boldsymbol{A}|},\ldots,\frac{|\boldsymbol{A}_n|}{|\boldsymbol{A}|}\right).$$

证明. 显然唯一解就是 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{b}.$

克拉默法则. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, $\boldsymbol{b}=(b_1,\dots,b_n)^{\mathrm{T}}$ 是 n 维列向量, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列换成 $\boldsymbol{b}$ 得到的方阵记为 $\boldsymbol{A}_j$. 当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$, 线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解

$$\boldsymbol{x}=\left(\frac{|\boldsymbol{A}_1|}{|\boldsymbol{A}|},\frac{|\boldsymbol{A}_2|}{|\boldsymbol{A}|},\dots,\frac{|\boldsymbol{A}_n|}{|\boldsymbol{A}|}\right).$$

证明. 显然唯一解就是 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{b}$. 由于方阵 $\boldsymbol{A}_j$ 沿着第 j 列展开得到

$$|\boldsymbol{A}_j|=b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\cdots+b_nA_{nj}=(A_{1j},A_{2j},\dots,A_{nj})\boldsymbol{b}.$$

克拉默法则. 设 A 是 n 阶方阵, $\boldsymbol{b}=(b_1,\ldots,b_n)^{\mathrm{T}}$ 是 n 维列向量, 将 A 的第 j 列换成 $\boldsymbol{b}$ 得到的方阵记为 $\boldsymbol{A}_j$. 当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$, 线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解

$$\boldsymbol{x}=\left(\frac{|\boldsymbol{A}_1|}{|\boldsymbol{A}|},\frac{|\boldsymbol{A}_2|}{|\boldsymbol{A}|},\ldots,\frac{|\boldsymbol{A}_n|}{|\boldsymbol{A}|}\right).$$

证明. 显然唯一解就是 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{b}$. 由于方阵 $\boldsymbol{A}_j$ 沿着第 j 列展开得到

$$|\boldsymbol{A}_j|=b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\cdots+b_nA_{nj}=(A_{1j},A_{2j},\ldots,A_{nj})\boldsymbol{b}.$$

因此 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{b}=(|\boldsymbol{A}_1|,\ldots,|\boldsymbol{A}_n|)^{\mathrm{T}}$, 从而 $\boldsymbol{x}$ 具有题述形式. □

定理. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解当且仅当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

定理. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有唯一解当且仅当 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$.

因此行列式起到了线性方程组的 "判别式" 的作用.

定理. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解当且仅当 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$.

因此行列式起到了线性方程组的 "判别式" 的作用. 我们将在 §1.6 证明该结论.

定理. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解当且仅当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

因此行列式起到了线性方程组的 "判别式" 的作用. 我们将在 §1.6 证明该结论.

若线性方程组的常数都是零, 即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 或

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}\,x_n=0 \\ a_{21}\,x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}\,x_n=0 \\ \qquad\qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$

称之为齐次线性方程组.

定理. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解当且仅当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

因此行列式起到了线性方程组的 “判别式” 的作用. 我们将在 §1.6 证明该结论.

若线性方程组的常数都是零, 即 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 或

$$\begin{cases} a_{11}\ x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}\ x_n=0 \\ a_{21}\ x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}\ x_n=0 \\ \qquad\qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$

称之为齐次线性方程组. 否则称之为非齐次线性方程组.

线性方程组的解

对于齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$, 令

$$V = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}\}$$

表示该方程的所有解形成的集合.

对于齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 令

$$V = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

表示该方程的所有解形成的集合. 显然 $\boldsymbol{0} \in V$.

对于齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 令

$$V=\{\boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}\}$$

表示该方程的所有解形成的集合. 显然 $\mathbf{0}\in V$. 若 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$.

对于齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 令

$$V=\{\boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$$

表示该方程的所有解形成的集合. 显然 $\boldsymbol{0}\in V$. 若 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$. 于是

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{v})=\boldsymbol{0},\quad \forall\lambda\in\mathbb{R}.$$

对于齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 令

$$V=\{\boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}\}$$

表示该方程的所有解形成的集合. 显然 $\mathbf{0}\in V$. 若 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$. 于是

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{v})=\mathbf{0},\quad \forall\lambda\in\mathbb{R}.$$

换言之, 从而 V 构成一个线性空间.

对于齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 令

$$V = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

表示该方程的所有解形成的集合. 显然 $\boldsymbol{0} \in V$. 若 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$. 于是

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{A}(\lambda \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

换言之, 从而 V 构成一个线性空间. 对于一般情形, 若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, 则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{0}$,

对于齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 令

$$V=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}\}$$

表示该方程的所有解形成的集合. 显然 $\mathbf{0}\in V$. 若 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$. 于是

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{v})=\mathbf{0},\quad\forall\lambda\in\mathbb{R}.$$

换言之, 从而 V 构成一个线性空间. 对于一般情形, 若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$, 则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{x}_0)=\mathbf{0}$, 从而它所有的解就是 $\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\in V$.

对于齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 令

$$V=\{\boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$$

表示该方程的所有解形成的集合. 显然 $\boldsymbol{0}\in V$. 若 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$. 于是

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{v})=\boldsymbol{0},\quad \forall\lambda\in\mathbb{R}.$$

换言之, 从而 V 构成一个线性空间. 对于一般情形, 若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$, 则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{0}$, 从而它所有的解就是 $\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\in V$.

设 $\boldsymbol{A}$ 是方阵.

对于齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 令

$$V=\{\boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$$

表示该方程的所有解形成的集合. 显然 $\boldsymbol{0}\in V$. 若 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$. 于是

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{v})=\boldsymbol{0},\quad \forall\lambda\in\mathbb{R}.$$

换言之, 从而 V 构成一个线性空间. 对于一般情形, 若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$, 则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{0}$, 从而它所有的解就是 $\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\in V$.

设 $\boldsymbol{A}$ 是方阵. 显然**零解** $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解, 其它解被称为**非零解**.

对于齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 令

$$V=\{\boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$$

表示该方程的所有解形成的集合. 显然 $\boldsymbol{0}\in V$. 若 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$. 于是

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{v})=\boldsymbol{0},\quad \forall\lambda\in\mathbb{R}.$$

换言之, 从而 V 构成一个线性空间. 对于一般情形, 若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$, 则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{0}$, 从而它所有的解就是 $\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\in V$.

设 $\boldsymbol{A}$ 是方阵. 显然零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解, 其它解被称为非零解. 由于非零解的倍数还是它的解, 因此 $|\boldsymbol{A}|=0 \iff \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$ **有无穷多 (非零) 解**.

对于齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 令

$$V=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$$

表示该方程的所有解形成的集合. 显然 $\boldsymbol{0}\in V$. 若 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$. 于是

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{v})=\boldsymbol{0},\quad\forall\lambda\in\mathbb{R}.$$

换言之, 从而 V 构成一个线性空间. 对于一般情形, 若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$, 则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{0}$, 从而它所有的解就是 $\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\in V$.

设 $\boldsymbol{A}$ 是方阵. 显然零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解, 其它解被称为非零解. 由于非零解的倍数还是它的解, 因此 $|\boldsymbol{A}|=0\iff\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$ **有无穷多 (非零) 解**. 再根据解的特点可知 $|\boldsymbol{A}|=0\iff\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ **无解或有无穷多解**.

例：克拉默法则的应用

例. 已知 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = -2 \end{cases}$ 有无穷多解，求 λ.

例. 已知 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = -2 \end{cases}$ 有无穷多解，求 λ.

解答.

$$0 = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + 2 - 3\lambda = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2).$$

例：克拉默法则的应用

例. 已知 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = -2 \end{cases}$ 有无穷多解，求 λ.

解答.

$$0 = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + 2 - 3\lambda = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2).$$

因此 $\lambda = 1$ 或 -2.

例：克拉默法则的应用

例. 已知 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = -2 \end{cases}$ 有无穷多解，求 λ.

解答.

$$0 = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + 2 - 3\lambda = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2).$$

因此 $\lambda = 1$ 或 -2. 显然 $\lambda = 1$ 时无解.

例：克拉默法则的应用

例. 已知 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = -2 \end{cases}$ 有无穷多解，求 λ.

解答.

$$0 = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + 2 - 3\lambda = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2).$$

因此 $\lambda = 1$ 或 -2. 显然 $\lambda = 1$ 时无解. $\lambda = -2$ 时，$(t, t, t + 1)$ 是方程的解.

例：克拉默法则的应用

例. 已知 $\begin{cases} \lambda x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 = \ \ 1 \\ \ \ x_1 + \lambda x_2 + \ \ x_3 = \ \ 1 \\ \ \ x_1 + \ \ x_2 + \lambda x_3 = -2 \end{cases}$ 有无穷多解，求 λ.

解答.

$$0 = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + 2 - 3\lambda = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2).$$

因此 $\lambda = 1$ 或 -2. 显然 $\lambda = 1$ 时无解. $\lambda = -2$ 时，$(t, t, t+1)$ 是方程的解. 因此 $\lambda = -2$.

练习. 若 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + (\lambda+1)x_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解，则 $\lambda =$______.

例：克拉默法则的应用

练习. 若 $\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 + \qquad\qquad x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + \qquad\qquad x_3 = 0 \\ x_1 + \ \ x_2 + (\lambda+1)x_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解，则 $\lambda =$ __0, 1__.

例：克拉默法则的应用

练习. 若 $\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 + \qquad\qquad x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + \qquad\qquad x_3 = 0 \\ x_1 + \ \ x_2 + (\lambda+1)x_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解，则 $\lambda = \underline{\ \ 0, 1\ \ }$.

例. 证明：若三条不同的直线

$$ax + by + c = 0$$
$$bx + cy + a = 0$$
$$cx + ay + b = 0$$

相交于一点，则 $a + b + c = 0$.

证明. 线性方程组 $\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \\ bx_1 + cx_2 + ax_3 = 0 \\ cx_1 + ax_2 + bx_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解 $(x, y, 1)$.

证明. 线性方程组 $\begin{cases} ax_1+bx_2+cx_3=0 \\ bx_1+cx_2+ax_3=0 \\ cx_1+ax_2+bx_3=0 \end{cases}$ 有非零解 $(x,y,1)$. 因此 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}=0.$

例：克拉默法则的应用

证明. 线性方程组 $\begin{cases} ax_1+bx_2+cx_3=0 \\ bx_1+cx_2+ax_3=0 \\ cx_1+ax_2+bx_3=0 \end{cases}$ 有非零解 $(x,y,1)$. 因此 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}=0.$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

例：克拉默法则的应用

证明. 线性方程组 $\begin{cases} ax_1+bx_2+cx_3=0 \\ bx_1+cx_2+ax_3=0 \\ cx_1+ax_2+bx_3=0 \end{cases}$ 有非零解 $(x,y,1)$. 因此 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}=0.$

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} &= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \\ &= (a+b+c)(bc+ac+ab-a^2-b^2-c^2)\end{aligned}$$

例：克拉默法则的应用

证明. 线性方程组 $\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \\ bx_1 + cx_2 + ax_3 = 0 \\ cx_1 + ax_2 + bx_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解 $(x, y, 1)$. 因此 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = 0.$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} &= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \\ &= (a+b+c)(bc+ac+ab-a^2-b^2-c^2) \\ &= -\frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]. \end{aligned}$$

证明. 线性方程组 $\begin{cases} ax_1+bx_2+cx_3=0 \\ bx_1+cx_2+ax_3=0 \\ cx_1+ax_2+bx_3=0 \end{cases}$ 有非零解 $(x,y,1)$. 因此 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}=0.$

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} &= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \\ &= (a+b+c)(bc+ac+ab-a^2-b^2-c^2) \\ &= -\frac{1}{2}(a+b+c)\big[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\big].\end{aligned}$$

由于这是三条不同直线，因此 a,b,c 不可能全部相等，从而 $a+b+c=0$. □

证明. 线性方程组 $\begin{cases} ax_1+bx_2+cx_3=0 \\ bx_1+cx_2+ax_3=0 \\ cx_1+ax_2+bx_3=0 \end{cases}$ 有非零解 $(x,y,1)$. 因此 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}=0.$

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} &= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \\ &= (a+b+c)(bc+ac+ab-a^2-b^2-c^2) \\ &= -\frac{1}{2}(a+b+c)\big[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\big].\end{aligned}$$

由于这是三条不同直线, 因此 a,b,c 不可能全部相等, 从而 $a+b+c=0$. □

想一想: 为什么 $a+b+c=0$ 时, 三条直线一定相交于一点?

克拉默法则的注记

使用克拉默法则解线性方程组需要:

克拉默法则的注记

使用克拉默法则解线性方程组需要:

(1) 方程组的数量和未知数数量相同;

使用克拉默法则解线性方程组需要:

(1) 方程组的数量和未知数数量相同;

(2) 系数矩阵行列式非零.

克拉默法则的注记

使用克拉默法则解线性方程组需要:

(1) 方程组的数量和未知数数量相同;
(2) 系数矩阵行列式非零.

但由于使用克拉默法则计算量较大, 一般不使用该方法解方程, 通常仅用于理论研究.

使用克拉默法则解线性方程组需要:

(1) 方程组的数量和未知数数量相同;

(2) 系数矩阵行列式非零.

但由于使用克拉默法则计算量较大, 一般不使用该方法解方程, 通常仅用于理论研究.

练习. 何时下述线性方程组有非零解?

$$\begin{cases} (a_1+b)x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0 \\ a_1x_1 + (a_2+b)x_2 + \cdots + a_nx_n = 0 \\ \qquad\vdots \\ a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + (a_n+b)x_n = 0 \end{cases}$$

克拉默法则的注记

使用克拉默法则解线性方程组需要:

(1) 方程组的数量和未知数数量相同;

(2) 系数矩阵行列式非零.

但由于使用克拉默法则计算量较大, 一般不使用该方法解方程, 通常仅用于理论研究.

练习. 何时下述线性方程组有非零解? $b = 0$ **或** $-a_1 - \cdots - a_n$.

$$\begin{cases} (a_1+b)x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0 \\ a_1x_1 + (a_2+b)x_2 + \cdots + a_nx_n = 0 \\ \vdots \\ a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + (a_n+b)x_n = 0 \end{cases}$$

例. 设 $a_1, \ldots, a_n$ 两两不同. 解方程组 $\begin{cases} x_1 + a_1 x_2 + \cdots + a_1^{n-1} x_n = 1 \\ x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_2^{n-1} x_n = 1 \\ \qquad\vdots \\ x_1 + a_n x_2 + \cdots + a_n^{n-1} x_n = 1 \end{cases}$

例. 设 $a_1,\ldots,a_n$ 两两不同. 解方程组 $$\begin{cases} x_1+a_1x_2+\cdots+a_1^{n-1}x_n=1\\ x_1+a_2x_2+\cdots+a_2^{n-1}x_n=1\\ \qquad\qquad\vdots\\ x_1+a_nx_2+\cdots+a_n^{n-1}x_n=1\end{cases}$$

解答. 由于系数矩阵行列式为范德蒙行列式

$$\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)\neq 0,$$

因此方程有唯一解 $x_1=1,x_2=\cdots=x_n=0.$

左图是一张夏天的风景图，我们希望把它修改成秋天的景色.

逆矩阵的应用：图像处理

左图是一张夏天的风景图，我们希望把它修改成秋天的景色．Photoshop 提供了将颜色重新搭配的通道混合器．

逆矩阵的应用：图像处理

非考试内容

左图是一张夏天的风景图，我们希望把它修改成秋天的景色．Photoshop 提供了将颜色重新搭配的通道混合器．用取色工具选取树叶、蓝天、地面的颜色，分别得到 RGB 值为

$$(59, 181, 19), \quad (90, 185, 249), \quad (210, 205, 186).$$

左图是一张夏天的风景图，我们希望把它修改成秋天的景色．Photoshop 提供了将颜色重新搭配的通道混合器．用取色工具选取树叶、蓝天、地面的颜色，分别得到 RGB 值为

$$(59, 181, 19), \quad (90, 185, 249), \quad (210, 205, 186).$$

我们希望将树叶变成金黄色 RGB$(234, 228, 70)$ 而保持蓝天和地面的颜色不变．

左图是一张夏天的风景图，我们希望把它修改成秋天的景色．Photoshop 提供了将颜色重新搭配的通道混合器．用取色工具选取树叶、蓝天、地面的颜色，分别得到 RGB 值为

$$(59, 181, 19), \quad (90, 185, 249), \quad (210, 205, 186).$$

我们希望将树叶变成金黄色 RGB$(234, 228, 70)$ 而保持蓝天和地面的颜色不变．则我们需要的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 59 & 90 & 210 \\ 181 & 185 & 205 \\ 19 & 249 & 186 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 234 & 90 & 210 \\ 228 & 185 & 205 \\ 70 & 249 & 186 \end{pmatrix}.$$

解得

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 234 & 90 & 210 \\ 228 & 185 & 205 \\ 70 & 249 & 186 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 59 & 90 & 210 \\ 181 & 185 & 205 \\ 19 & 249 & 186 \end{pmatrix}^{-1} \approx \begin{pmatrix} 0.43 & 1.23 & -0.70 \\ -0.15 & 1.33 & -0.19 \\ -0.17 & 0.36 & 0.79 \end{pmatrix}.$$

解得

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 234 & 90 & 210 \\ 228 & 185 & 205 \\ 70 & 249 & 186 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 59 & 90 & 210 \\ 181 & 185 & 205 \\ 19 & 249 & 186 \end{pmatrix}^{-1} \approx \begin{pmatrix} 0.43 & 1.23 & -0.70 \\ -0.15 & 1.33 & -0.19 \\ -0.17 & 0.36 & 0.79 \end{pmatrix}.$$

分别在通道混合器的红绿蓝通道输入上面三行即可.

$\Longrightarrow$

第五节　分块矩阵

- 分块矩阵的定义和运算
- 特殊分块矩阵

分块矩阵的定义

有时为了研究矩阵和其部分元素形成的矩阵的联系，需要使用**分块法**将其进行拆分:

有时为了研究矩阵和其部分元素形成的矩阵的联系，需要使用分块法将其进行拆分：

定义. 用若干条横线和竖线将矩阵 A 分成许多小矩阵，每个小矩阵成为 A 的子块，以子块为元素的矩阵称为**分块矩阵**.

有时为了研究矩阵和其部分元素形成的矩阵的联系，需要使用**分块法**将其进行拆分:

定义. 用若干条横线和竖线将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分成许多小矩阵，每个小矩阵成为 $\boldsymbol{A}$ 的子块，以子块为元素的矩阵称为**分块矩阵**.

例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{O}_{m\times n} & \boldsymbol{E}_m \\ \boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{O}_{n\times m} \end{pmatrix}$$

就是一个分块矩阵.

分块矩阵的定义

有时为了研究矩阵和其部分元素形成的矩阵的联系，需要使用分块法将其进行拆分:

定义. 用若干条横线和竖线将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分成许多小矩阵，每个小矩阵成为 $\boldsymbol{A}$ 的子块，以子块为元素的矩阵称为分块矩阵.

例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}_{m\times n} & \boldsymbol{E}_m \\ \boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{O}_{n\times m}\end{pmatrix}$$

就是一个分块矩阵. 事实上我们已经不加定义地用过分块矩阵了.

若分块矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 同型, 且每个对应分块也同型, 则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 就是对应分块相加形成的分块矩阵:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{B}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{B}_{sr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r}+\boldsymbol{B}_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{s1}+\boldsymbol{B}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}+\boldsymbol{B}_{sr} \end{pmatrix}.$$

若分块矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 同型，且每个对应分块也同型，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 就是对应分块相加形成的分块矩阵：

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{B}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{B}_{sr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r}+\boldsymbol{B}_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{s1}+\boldsymbol{B}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}+\boldsymbol{B}_{sr} \end{pmatrix}.$$

数 λ 和分块矩阵的数乘，就是 λ 和对应分块数乘形成的分块矩阵：

$$\lambda \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \lambda\boldsymbol{A}_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda\boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \lambda\boldsymbol{A}_{sr} \end{pmatrix}.$$

设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1t}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{B}_{r1} & \cdots & \boldsymbol{B}_{rt},\end{pmatrix}$$

且 $\boldsymbol{A}_{ik}$ 的列数和 $\boldsymbol{B}_{kj}$ 的行数相同，则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_{11} & \cdots & \boldsymbol{C}_{1t}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{C}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{C}_{st}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}_{ij}=\sum_{k=1}^{r}\boldsymbol{A}_{ik}\boldsymbol{B}_{kj}.$$

设

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{r1} & \cdots & B_{rt}, \end{pmatrix}$$

且 A_{ik} 的列数和 B_{kj} 的行数相同, 则

$$AB = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{s1} & \cdots & C_{st} \end{pmatrix}, \quad C_{ij} = \sum_{k=1}^{r} A_{ik} B_{kj}.$$

分块矩阵能相乘, 需要 A 的列块数和 B 的行块数要相等.

设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1t}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{B}_{r1} & \cdots & \boldsymbol{B}_{rt},\end{pmatrix}$$

且 $\boldsymbol{A}_{ik}$ 的列数和 $\boldsymbol{B}_{kj}$ 的行数相同, 则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_{11} & \cdots & \boldsymbol{C}_{1t}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{C}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{C}_{st}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}_{ij}=\sum_{k=1}^{r}\boldsymbol{A}_{ik}\boldsymbol{B}_{kj}.$$

分块矩阵能相乘, 需要 $\boldsymbol{A}$ 的列块数和 $\boldsymbol{B}$ 的行块数要相等. 然后得到乘积的每个分块表达式后, 相应的分块乘法也要能相乘.

设

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{B}_{r1} & \cdots & \boldsymbol{B}_{rt}, \end{pmatrix}$$

且 $\boldsymbol{A}_{ik}$ 的列数和 $\boldsymbol{B}_{kj}$ 的行数相同, 则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_{11} & \cdots & \boldsymbol{C}_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{C}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{C}_{st} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C}_{ij} = \sum_{k=1}^{r} \boldsymbol{A}_{ik}\boldsymbol{B}_{kj}.$$

分块矩阵能相乘, 需要 $\boldsymbol{A}$ 的列块数和 $\boldsymbol{B}$ 的行块数要相等. 然后得到乘积的每个分块表达式后, 相应的分块乘法也要能相乘. 这样分块矩阵的运算就如同把这些分块视作数一样运算.

分块矩阵的运算：转置

设

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr} \end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{s1}^{\mathrm{T}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{1r}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}.$$

分块矩阵的运算：转置

设

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix},$$

则

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} A_{11}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{s1}^{\mathrm{T}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1r}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{sr}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}.$$

注意小块的位置需要转置，每个小块也需要转置.

若方阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{A}_m\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_1,\ldots,\boldsymbol{A}_m$ 都是方阵,

分块对角阵

若方阵

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_m \end{pmatrix},$$

其中 $A_1, \ldots, A_m$ 都是方阵, 称 A 为分块对角阵.

若方阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{A}_m \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_m$ 都是方阵, 称 $\boldsymbol{A}$ 为分块对角阵. 记作 $\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_m)$.

若方阵

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_m \end{pmatrix},$$

其中 $A_1, \ldots, A_m$ 都是方阵, 称 A 为分块对角阵. 记作 $A = \mathrm{diag}(A_1, \ldots, A_m)$.

分块对角阵具有如下性质:

若方阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{A}_m\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_1,\dots,\boldsymbol{A}_m$ 都是方阵, 称 $\boldsymbol{A}$ 为分块对角阵. 记作 $\boldsymbol{A}=\operatorname{diag}(\boldsymbol{A}_1,\dots,\boldsymbol{A}_m)$.

分块对角阵具有如下性质:

(1) $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}_1|\cdots|\boldsymbol{A}_m|$;

若方阵

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_m \end{pmatrix},$$

其中 $A_1, \ldots, A_m$ 都是方阵, 称 A 为分块对角阵. 记作 $A = \operatorname{diag}(A_1, \ldots, A_m)$.

分块对角阵具有如下性质:

(1) $|A| = |A_1| \cdots |A_m|$;

(2) A 可逆当且仅当 $A_1, \ldots, A_m$ 均可逆, 此时 $A^{-1} = \operatorname{diag}(A_1^{-1}, \ldots, A_m^{-1})$.

若方阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{A}_m\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_1,\ldots,\boldsymbol{A}_m$ 都是方阵, 称 $\boldsymbol{A}$ 为分块对角阵. 记作 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{A}_1,\ldots,\boldsymbol{A}_m)$.

分块对角阵具有如下性质:

(1) $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}_1|\cdots|\boldsymbol{A}_m|$;

(2) $\boldsymbol{A}$ 可逆当且仅当 $\boldsymbol{A}_1,\ldots,\boldsymbol{A}_m$ 均可逆, 此时 $\boldsymbol{A}^{-1}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{A}_1^{-1},\ldots,\boldsymbol{A}_m^{-1})$.

(3) $\boldsymbol{A}^k=\mathrm{diag}(\boldsymbol{A}_1^k,\ldots,\boldsymbol{A}_m^k)$.

例: 分块对角阵

例. 求 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&-1&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

例. 求 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&-1&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解答. 设 $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}2&0\\-1&3\end{pmatrix}$,

例: 分块对角阵

例. 求 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&-1&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解答. 设 $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}2&0\\-1&3\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}_1^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}_2^{-1}=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}3&0\\1&2\end{pmatrix}$.

例. 求 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&-1&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解答. 设 $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}2&0\\-1&3\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}_1^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}_2^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}3&0\\1&2\end{pmatrix}$.

故 $\boldsymbol{A}^{-1}=\operatorname{diag}(\boldsymbol{A}_1^{-1},\boldsymbol{A}_2^{-1})=\begin{pmatrix}1&-1&&\\-1&2&&\\&&1/2&0\\&&1/6&1/3\end{pmatrix}$.

例：分块三角阵的逆

例. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均可逆，求 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

例：分块三角阵的逆

例. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均可逆，求 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解答. 由 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}| \neq 0$ 可知该方阵可逆.

例: 分块三角阵的逆

例. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均可逆, 求 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解答. 由 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}| \neq 0$ 可知该方阵可逆. 设 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{A}_4 \end{pmatrix} = \boldsymbol{E}$.

例：分块三角阵的逆

例. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均可逆，求 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解答. 由 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}| \neq 0$ 可知该方阵可逆. 设 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{A}_4 \end{pmatrix} = \boldsymbol{E}$.
则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{E}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{O}, \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_2 + \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}_4 = \boldsymbol{E}$.

例: 分块三角阵的逆

例. 设 A, B 均可逆, 求 $\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解答. 由 $\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B| \neq 0$ 可知该方阵可逆. 设 $\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} = E$.
则 $AA_1 = E, AA_2 = O, CA_2 + BA_4 = E$. 于是 $A_1 = A^{-1}, A_2 = O, A_4 = B^{-1}$.

例. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均可逆，求 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解答. 由 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}\end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}| \neq 0$ 可知该方阵可逆. 设 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2\\ \boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{A}_4\end{pmatrix} = \boldsymbol{E}$. 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{E}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{O}, \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_2 + \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}_4 = \boldsymbol{E}$. 于是 $\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}^{-1}, \boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{O}, \boldsymbol{A}_4 = \boldsymbol{B}^{-1}$. 再由 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}_3 = \boldsymbol{O}$ 可得

$$\boldsymbol{A}_3 = -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_1 = -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}.$$

例: 分块三角阵的逆

例. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均可逆, 求 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解答. 由 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}| \neq 0$ 可知该方阵可逆. 设 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{A}_4 \end{pmatrix} = \boldsymbol{E}$. 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{E}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{O}, \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_2 + \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}_4 = \boldsymbol{E}$. 于是 $\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}^{-1}, \boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{O}, \boldsymbol{A}_4 = \boldsymbol{B}^{-1}$. 再由 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}_3 = \boldsymbol{O}$ 可得

$$\boldsymbol{A}_3 = -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_1 = -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}.$$

故 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{pmatrix}$.

例: 分块三角阵的逆

例. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均可逆, 求 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解答. 由 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}| \neq 0$ 可知该方阵可逆. 设 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{A}_4 \end{pmatrix} = \boldsymbol{E}$.
则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{E}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{O}, \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_2 + \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}_4 = \boldsymbol{E}$. 于是 $\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}^{-1}, \boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{O}, \boldsymbol{A}_4 = \boldsymbol{B}^{-1}$. 再由 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}_3 = \boldsymbol{O}$ 可得

$$\boldsymbol{A}_3 = -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_1 = -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}.$$

故 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{pmatrix}$.

由此可知, (分块) 上/下三角阵的逆还是 (分块) 上/下三角阵.

练习. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为同阶方阵, $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \\ & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{C}^* =$(　　).

(A) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^* & \\ & \boldsymbol{B}^* \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}^* & \\ & \boldsymbol{A}^* \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & \\ & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* & \\ & |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* \end{pmatrix}$

例：分块方阵的伴随

练习. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶方阵，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \\ & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{C}^*=$(C).

(A) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^* & \\ & \boldsymbol{B}^*\end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}^* & \\ & \boldsymbol{A}^*\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & \\ & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^*\end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* & \\ & |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^*\end{pmatrix}$

第六节　矩阵的初等变换

- 初等矩阵
- 矩阵等价
- 初等变换解矩阵方程

初等行变换解线性方程组

我们曾利用如下三种初等变换来帮助计算行列式:

初等行变换解线性方程组

我们曾利用如下三种初等变换来帮助计算行列式:

初等变换.

初等行变换解线性方程组

我们曾利用如下三种初等变换来帮助计算行列式:

初等变换.

(1) **互换两行 (列): $r_i \leftrightarrow r_j, c_i \leftrightarrow c_j$, 行列式变号;**

我们曾利用如下三种初等变换来帮助计算行列式:

初等变换.

(1) **互换两行 (列):** $r_i \leftrightarrow r_j, c_i \leftrightarrow c_j$, 行列式变号;

(2) **一行 (列) 乘非零常数** k**:** kr_i, kc_i, 行列式变为 k 倍;

我们曾利用如下三种初等变换来帮助计算行列式:

初等变换.

(1) **互换两行 (列):** $\boldsymbol{r_i \leftrightarrow r_j, c_i \leftrightarrow c_j}$, 行列式变号;

(2) **一行 (列) 乘非零常数** k: $\boldsymbol{kr_i, kc_i}$, 行列式变为 k 倍;

(3) j **行 (列) 乘** k **加到** i **行 (列):** $\boldsymbol{r_i + kr_j, c_i + kc_j}$, 行列式不变.

我们曾利用如下三种初等变换来帮助计算行列式:

初等变换.

(1) **互换两行 (列):** $\boldsymbol{r_i \leftrightarrow r_j, c_i \leftrightarrow c_j}$**, 行列式变号;**

(2) **一行 (列) 乘非零常数** k**:** $\boldsymbol{kr_i, kc_i}$**, 行列式变为** k **倍;**

(3) j **行 (列) 乘** k **加到** i **行 (列):** $\boldsymbol{r_i + kr_j, c_i + kc_j}$**, 行列式不变.**

实际上我们也可以对矩阵实施初等变换,

我们曾利用如下三种初等变换来帮助计算行列式:

初等变换.

(1) **互换两行 (列): $r_i \leftrightarrow r_j, c_i \leftrightarrow c_j$, 行列式变号;**

(2) **一行 (列) 乘非零常数 k: kr_i, kc_i, 行列式变为 k 倍;**

(3) **j 行 (列) 乘 k 加到 i 行 (列): $r_i + kr_j, c_i + kc_j$, 行列式不变.**

实际上我们也可以对矩阵实施初等变换, 而且这三类变换过程都是可逆的, 且其逆变换是同一类变换.

初等行变换解线性方程组

我们曾利用如下三种初等变换来帮助计算行列式:

初等变换.

(1) **互换两行 (列):** $r_i \leftrightarrow r_j, c_i \leftrightarrow c_j$, **行列式变号;**

(2) **一行 (列) 乘非零常数** k**:** kr_i, kc_i, **行列式变为** k **倍;**

(3) j **行 (列) 乘** k **加到** i **行 (列):** $r_i + kr_j, c_i + kc_j$, **行列式不变.**

实际上我们也可以对矩阵实施初等变换, 而且这三类变换过程都是可逆的, 且其逆变换是同一类变换. 以行变换为例:

初等行变换解线性方程组

我们曾利用如下三种初等变换来帮助计算行列式:

初等变换.

(1) **互换两行 (列): $\boldsymbol{r_i \leftrightarrow r_j, c_i \leftrightarrow c_j}$, 行列式变号;**

(2) **一行 (列) 乘非零常数 k: $\boldsymbol{kr_i, kc_i}$, 行列式变为 k 倍;**

(3) **j 行 (列) 乘 k 加到 i 行 (列): $\boldsymbol{r_i + kr_j, c_i + kc_j}$, 行列式不变.**

实际上我们也可以对矩阵实施初等变换, 而且这三类变换过程都是可逆的, 且其逆变换是同一类变换. 以行变换为例:

(1) $r_i \leftrightarrow r_j$ 的逆是 $r_i \leftrightarrow r_j$;

我们曾利用如下三种初等变换来帮助计算行列式:

初等变换.

(1) **互换两行 (列): $r_i \leftrightarrow r_j, c_i \leftrightarrow c_j$, 行列式变号;**

(2) **一行 (列) 乘非零常数 k: kr_i, kc_i, 行列式变为 k 倍;**

(3) **j 行 (列) 乘 k 加到 i 行 (列): $r_i + kr_j, c_i + kc_j$, 行列式不变.**

实际上我们也可以对矩阵实施初等变换, 而且这三类变换过程都是可逆的, 且其逆变换是同一类变换. 以行变换为例:

(1) $r_i \leftrightarrow r_j$ 的逆是 $r_i \leftrightarrow r_j$;

(2) kr_i 的逆是 $\dfrac{1}{k}r_i$;

初等行变换解线性方程组

我们曾利用如下三种初等变换来帮助计算行列式:

初等变换.

(1) 互换两行 (列): $r_i \leftrightarrow r_j, c_i \leftrightarrow c_j$, 行列式变号;

(2) 一行 (列) 乘非零常数 k: kr_i, kc_i, 行列式变为 k 倍;

(3) j 行 (列) 乘 k 加到 i 行 (列): $r_i + kr_j, c_i + kc_j$, 行列式不变.

实际上我们也可以对矩阵实施初等变换, 而且这三类变换过程都是可逆的, 且其逆变换是同一类变换. 以行变换为例:

(1) $r_i \leftrightarrow r_j$ 的逆是 $r_i \leftrightarrow r_j$;

(2) kr_i 的逆是 $\dfrac{1}{k}r_i$;

(3) $r_i + kr_j$ 的逆是 $r_i - kr_j$.

我们曾利用如下三种初等变换来帮助计算行列式:

初等变换.

(1) 互换两行 (列): $r_i \leftrightarrow r_j, c_i \leftrightarrow c_j$, 行列式变号;

(2) 一行 (列) 乘非零常数 k: kr_i, kc_i, 行列式变为 k 倍;

(3) j 行 (列) 乘 k 加到 i 行 (列): $r_i + kr_j, c_i + kc_j$, 行列式不变.

实际上我们也可以对矩阵实施初等变换, 而且这三类变换过程都是可逆的, 且其逆变换是同一类变换. 以行变换为例:

(1) $r_i \leftrightarrow r_j$ 的逆是 $r_i \leftrightarrow r_j$;

(2) kr_i 的逆是 $\dfrac{1}{k} r_i$;

(3) $r_i + kr_j$ 的逆是 $r_i - kr_j$.

我们使用矩阵来表示上述变换.

第一类初等矩阵

单位阵 E 经过一次初等变换得到的方阵称为初等矩阵.

第一类初等矩阵

单位阵 $\boldsymbol{E}$ 经过一次初等变换得到的方阵称为初等矩阵.

(1) $r_i \leftrightarrow r_j$ 和 $c_i \leftrightarrow c_j$ 都对应初等矩阵

$$\boldsymbol{E}(i,j) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 0 & \cdots & & 1 & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & 1 & \cdots & & 0 & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow 第\ i\ 行 \\ \\ \\ \\ \leftarrow 第\ j\ 行 \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

第二类初等矩阵

(2) kr_i, kc_i 都对应初等矩阵

$$
\boldsymbol{E}(i(k)) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & {\color{red}k} & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \uparrow & \\ \text{第 } i \text{ 列} & \end{array}
$$

第三类初等矩阵

(3) $r_i + kr_j, c_j + kc_i$ 都对应初等矩阵

$$
\begin{array}{c}
\boldsymbol{E}(i,j(k)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & k & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}
\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array} \\
\qquad\qquad\quad \uparrow \qquad\quad \uparrow \\
\qquad\qquad \text{第 } i \text{ 列} \quad \text{第 } j \text{ 列}
\end{array}
$$

(3) $r_i + kr_j, c_j + kc_i$ 都对应初等矩阵

$$\boldsymbol{E}(i,j(k)) = \begin{array}{c@{\quad}l} \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 && \color{red}{k} && \\ &&& \ddots &&& \\ &&&& 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \text{第 } i \text{ 列} & \text{第 } j \text{ 列} \end{array} & \end{array}$$

需要注意的是 $c_i + kc_j$ 对应的初等矩阵不是 $E(i,j(k))$ 而是 $E(j,i(k))$.

初等矩阵左乘矩阵

我们来看

$$\boldsymbol{E}(1,3)\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

我们来看

$$\boldsymbol{E}(1,3)\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{E}(i,j)$ 左乘在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 上, 即对 $\boldsymbol{A}$ 实施 $r_i \leftrightarrow r_j$.

我们来看

$$\boldsymbol{E}(1,3)\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&8&9\\4&5&6\\1&2&3\end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{E}(i,j)$ 左乘在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 上, 即对 $\boldsymbol{A}$ 实施 $r_i \leftrightarrow r_j$.

从

$$\boldsymbol{E}(i,j)\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}(i,j)\begin{pmatrix}\vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_i\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_j\\ \vdots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_j\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_i\\ \vdots\end{pmatrix}$$

可以看出确实如此.

$$\boldsymbol{E}(2(k))\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&k&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4k&5k&6k\\7&8&9\end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{E}(2(k))\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4k & 5k & 6k \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{E}(i(k))$ 左乘在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 上, 即对 $\boldsymbol{A}$ 实施 kr_i.

$$\boldsymbol{E}(2(k))\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&k&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4k&5k&6k\\7&8&9\end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{E}(i(k))$ 左乘在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 上, 即对 $\boldsymbol{A}$ 实施 kr_i.

$$\boldsymbol{E}(3,1(k))\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\k&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7+k&8+2k&9+3k\end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{E}(2(k))\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4k & 5k & 6k \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{E}(i(k))$ 左乘在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 上, 即对 $\boldsymbol{A}$ 实施 kr_i.

$$\boldsymbol{E}(3,1(k))\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7+k & 8+2k & 9+3k \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{E}(i,j(k))$ 左乘在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 上, 即对 $\boldsymbol{A}$ 实施 $r_i + kr_j$.

$$\boldsymbol{E}(2(k))\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&k&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4k&5k&6k\\7&8&9\end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{E}(i(k))$ 左乘在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 上, 即对 $\boldsymbol{A}$ 实施 kr_i.

$$\boldsymbol{E}(3,1(k))\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\k&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7+k&8+2k&9+3k\end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{E}(i,j(k))$ 左乘在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 上, 即对 $\boldsymbol{A}$ 实施 r_i+kr_j. 即, 初等矩阵左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 等同于对 $\boldsymbol{A}$ 实施对应的初等行变换.

$$\boldsymbol{E}(2(k))\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4k & 5k & 6k \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{E}(i(k))$ 左乘在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 上, 即对 $\boldsymbol{A}$ 实施 kr_i.

$$\boldsymbol{E}(3,1(k))\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7+k & 8+2k & 9+3k \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{E}(i,j(k))$ 左乘在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 上, 即对 $\boldsymbol{A}$ 实施 $r_i + kr_j$. 即, 初等矩阵左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 等同于对 $\boldsymbol{A}$ 实施对应的初等行变换.

同理, 初等矩阵右乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 等同于对 $\boldsymbol{A}$ 实施对应的初等列变换.

定理. 设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}$.

定理. 设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}$.

(1) 对 $\boldsymbol{A}$ 实施一次初等行变换, 相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的左边乘对应的 m 阶初等矩阵.

定理. 设 $A \in M_{m\times n}$.

(1) 对 A 实施一次初等行变换, 相当于在 A 的左边乘对应的 m 阶初等矩阵.

(2) 对 A 实施一次初等列变换, 相当于在 A 的右边乘对应的 n 阶初等矩阵.

定理. 设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}$.

(1) 对 $\boldsymbol{A}$ 实施一次初等行变换, 相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的左边乘对应的 m 阶初等矩阵.

(2) 对 $\boldsymbol{A}$ 实施一次初等列变换, 相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的右边乘对应的 n 阶初等矩阵.

对应的初等矩阵就是对单位阵 $\boldsymbol{E}$ 实施相应的初等变换得到的矩阵.

定理. 设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}$.

(1) 对 $\boldsymbol{A}$ 实施一次初等行变换, 相当于在$\boldsymbol{A}$ 的左边乘对应的 m 阶初等矩阵.

(2) 对 $\boldsymbol{A}$ 实施一次初等列变换, 相当于在$\boldsymbol{A}$ 的右边乘对应的 n 阶初等矩阵.

对应的初等矩阵就是对单位阵 $\boldsymbol{E}$ 实施相应的初等变换得到的矩阵.

即左行右列.

例：初等矩阵与初等变换

例. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶可逆方阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 列与第 2 列交换得 $\boldsymbol{B}$，再把 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 列加到第 3 列得到 $\boldsymbol{C}$. 求 $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$.

例：初等矩阵与初等变换

例. 设 A 为 3 阶可逆方阵，将 A 的第 1 列与第 2 列交换得 B，再把 B 的第 2 列加到第 3 列得到 C． 求 $Q = A^{-1}C$.

解答. $B = A\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = B\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = AQ.$

例: 初等矩阵与初等变换

例. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶可逆方阵, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 列与第 2 列交换得 $\boldsymbol{B}$, 再把 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 列加到第 3 列得到 $\boldsymbol{C}$. 求 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$.

解答. $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$. 因此

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

例: 初等矩阵与初等变换

练习. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31}+2a_{11} & a_{33}+2a_{13} & a_{32}+2a_{12} \end{pmatrix}$,
$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 则 $\boldsymbol{B}=(\quad)$.

(A) $\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2$ (B) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_3$ (C) $\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1$ (D) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}$

例：初等矩阵与初等变换

练习. 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31}+2a_{11} & a_{33}+2a_{13} & a_{32}+2a_{12} \end{pmatrix},$

$\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{P}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 则 $\boldsymbol{B} =$(C).

(A) $\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2$ (B) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_3$ (C) $\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1$ (D) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}$

例：初等矩阵的逆

由于初等变换都是可逆，因此初等矩阵也都是可逆的:

例: 初等矩阵的逆

由于初等变换都是可逆, 因此初等矩阵也都是可逆的:

(1) $\boldsymbol{E}(i,j)\boldsymbol{E}(i,j) = \boldsymbol{E} \implies \boldsymbol{E}(i,j)^{-1} = \boldsymbol{E}(i,j)$;

例：初等矩阵的逆

由于初等变换都是可逆，因此初等矩阵也都是可逆的：

(1) $\boldsymbol{E}(i,j)\boldsymbol{E}(i,j)=\boldsymbol{E} \implies \boldsymbol{E}(i,j)^{-1}=\boldsymbol{E}(i,j)$;

(2) $\boldsymbol{E}\big(i(k)\big)\boldsymbol{E}\big(i(\frac{1}{k})\big)=\boldsymbol{E} \implies \boldsymbol{E}\big(i(k)\big)^{-1}=\boldsymbol{E}\big(i(\frac{1}{k})\big)$;

例：初等矩阵的逆

由于初等变换都是可逆，因此初等矩阵也都是可逆的：

(1) $\boldsymbol{E}(i,j)\boldsymbol{E}(i,j)=\boldsymbol{E} \implies \boldsymbol{E}(i,j)^{-1}=\boldsymbol{E}(i,j)$;

(2) $\boldsymbol{E}\big(i(k)\big)\boldsymbol{E}\big(i(\frac{1}{k})\big)=\boldsymbol{E} \implies \boldsymbol{E}\big(i(k)\big)^{-1}=\boldsymbol{E}\big(i(\frac{1}{k})\big)$;

(3) $\boldsymbol{E}\big(i,j(k)\big)\boldsymbol{E}\big(i,j(-k)\big)=\boldsymbol{E} \implies \boldsymbol{E}\big(i,j(k)\big)^{-1}=\boldsymbol{E}\big(i,j(-k)\big)$.

例: 初等矩阵的逆

由于初等变换都是可逆, 因此初等矩阵也都是可逆的:

(1) $\boldsymbol{E}(i,j)\boldsymbol{E}(i,j)=\boldsymbol{E} \implies \boldsymbol{E}(i,j)^{-1}=\boldsymbol{E}(i,j)$;

(2) $\boldsymbol{E}\big(i(k)\big)\boldsymbol{E}\big(i(\frac{1}{k})\big)=\boldsymbol{E} \implies \boldsymbol{E}\big(i(k)\big)^{-1}=\boldsymbol{E}\big(i(\frac{1}{k})\big)$;

(3) $\boldsymbol{E}\big(i,j(k)\big)\boldsymbol{E}\big(i,j(-k)\big)=\boldsymbol{E} \implies \boldsymbol{E}\big(i,j(k)\big)^{-1}=\boldsymbol{E}\big(i,j(-k)\big)$.

例. 将可逆方阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行的 2 倍加到第 2 行得到 $\boldsymbol{B}$, 则对 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 实施初等变换(　　)可得到 $\boldsymbol{B}^{-1}$.

(A) r_2+2r_1　(B) r_2-2r_1　(C) c_1+2c_2　(D) c_1-2c_2

例: 初等矩阵的逆

由于初等变换都是可逆, 因此初等矩阵也都是可逆的:

(1) $\boldsymbol{E}(i,j)\boldsymbol{E}(i,j)=\boldsymbol{E} \implies \boldsymbol{E}(i,j)^{-1}=\boldsymbol{E}(i,j)$;

(2) $\boldsymbol{E}\big(i(k)\big)\boldsymbol{E}\big(i(\frac{1}{k})\big)=\boldsymbol{E} \implies \boldsymbol{E}\big(i(k)\big)^{-1}=\boldsymbol{E}\big(i(\frac{1}{k})\big)$;

(3) $\boldsymbol{E}\big(i,j(k)\big)\boldsymbol{E}\big(i,j(-k)\big)=\boldsymbol{E} \implies \boldsymbol{E}\big(i,j(k)\big)^{-1}=\boldsymbol{E}\big(i,j(-k)\big)$.

例. 将可逆方阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行的 2 倍加到第 2 行得到 $\boldsymbol{B}$, 则对 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 实施初等变换(D)可得到 $\boldsymbol{B}^{-1}$.

(A) r_2+2r_1 (B) r_2-2r_1 (C) c_1+2c_2 (D) c_1-2c_2

例: 初等矩阵的逆

由于初等变换都是可逆的, 因此初等矩阵也都是可逆的:

(1) $\boldsymbol{E}(i,j)\boldsymbol{E}(i,j)=\boldsymbol{E} \implies \boldsymbol{E}(i,j)^{-1}=\boldsymbol{E}(i,j)$;

(2) $\boldsymbol{E}(i(k))\boldsymbol{E}(i(\frac{1}{k}))=\boldsymbol{E} \implies \boldsymbol{E}(i(k))^{-1}=\boldsymbol{E}(i(\frac{1}{k}))$;

(3) $\boldsymbol{E}(i,j(k))\boldsymbol{E}(i,j(-k))=\boldsymbol{E} \implies \boldsymbol{E}(i,j(k))^{-1}=\boldsymbol{E}(i,j(-k))$.

例. 将可逆方阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行的 2 倍加到第 2 行得到 $\boldsymbol{B}$, 则对 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 实施初等变换(D)可得到 $\boldsymbol{B}^{-1}$.

(A) r_2+2r_1 (B) r_2-2r_1 (C) c_1+2c_2 (D) c_1-2c_2

练习. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与第 j 行对换后得到的矩阵记为 $\boldsymbol{B}$, 则 $\boldsymbol{AB}^{-1}=$____________.

例: 初等矩阵的逆

由于初等变换都是可逆, 因此初等矩阵也都是可逆的:

(1) $\boldsymbol{E}(i,j)\boldsymbol{E}(i,j)=\boldsymbol{E} \implies \boldsymbol{E}(i,j)^{-1}=\boldsymbol{E}(i,j)$;

(2) $\boldsymbol{E}\big(i(k)\big)\boldsymbol{E}\big(i(\frac{1}{k})\big)=\boldsymbol{E} \implies \boldsymbol{E}\big(i(k)\big)^{-1}=\boldsymbol{E}\big(i(\frac{1}{k})\big)$;

(3) $\boldsymbol{E}\big(i,j(k)\big)\boldsymbol{E}\big(i,j(-k)\big)=\boldsymbol{E} \implies \boldsymbol{E}\big(i,j(k)\big)^{-1}=\boldsymbol{E}\big(i,j(-k)\big)$.

例. 将可逆方阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行的 2 倍加到第 2 行得到 $\boldsymbol{B}$, 则对 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 实施初等变换(D)可得到 $\boldsymbol{B}^{-1}$.

(A) r_2+2r_1 (B) r_2-2r_1 (C) c_1+2c_2 (D) c_1-2c_2

练习. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与第 j 行对换后得到的矩阵记为 $\boldsymbol{B}$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}=$ $\underline{\quad\quad \boldsymbol{E}(i,j) \quad\quad}$.

例. 设 $\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & k & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_3$ 及逆.

例. 设 $\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & k & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_3$ 及逆.

解答.

$$\boldsymbol{P}_1 \xrightarrow{c_1 + ac_4} \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例：初等矩阵

例. 设 $\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & k & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_3$ 及逆.

解答.

$$\boldsymbol{P}_1 \overset{c_1 + ac_4}{\sim} \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{kc_2}{\sim} \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

例. 设 $\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & k & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_3$ 及逆.

解答.

$$\boldsymbol{P}_1 \overset{c_1 + ac_4}{\sim} \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{kc_2}{\sim} \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}_1^{-1} = \boldsymbol{P}_1 \overset{r_4 - ar_1}{\sim} (\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 1 \end{pmatrix}$$

例. 设 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&&&\\0&1&&\\0&0&1&\\a&0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix}1&&&\\&k&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_3$ 及逆.

解答.

$$\boldsymbol{P}_1 \overset{c_1+ac_4}{\sim} \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\a&0&0&1\end{pmatrix} \overset{kc_2}{\sim} \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&k&0&0\\1&0&0&0\\a&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}_1^{-1}=\boldsymbol{P}_1 \overset{r_4-ar_1}{\sim} (\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2)^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&-a&1\end{pmatrix} \overset{\frac{1}{k}r_2}{\sim} (\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_3)^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1/k&0&0\\1&0&0&0\\0&0&-a&1\end{pmatrix}.$$

练习. 设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41} \end{pmatrix},$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

若 A 可逆，则 $B^{-1} =(\qquad)$.

(A) $A^{-1}P_1P_2$　　(B) $P_1A^{-1}P_2$　　(C) $P_1P_2A^{-1}$　　(D) $P_2A^{-1}P_1$

例：初等变换

练习. 设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41} \end{pmatrix},$$

$$P_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

若 A 可逆，则 $B^{-1}=$(C).

(A) $A^{-1}P_1P_2$ (B) $P_1A^{-1}P_2$ (C) $P_1P_2A^{-1}$ (D) $P_2A^{-1}P_1$

我们来看初等行变换能够将矩阵化简成何种形式.

我们来看初等行变换能够将矩阵化简成何种形式.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -2 & 11 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

我们来看初等行变换能够将矩阵化简成何种形式.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -2 & 11 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \underset{r_3-2r_1}{\overset{r_2-3r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

我们来看初等行变换能够将矩阵化简成何种形式.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -2 & 11 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \underset{r_3 - 2r_1}{\overset{r_2 - 3r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \end{pmatrix} \overset{-\frac{1}{5}r_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

我们来看初等行变换能够将矩阵化简成何种形式.

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & -2 & 4\\ 3 & 6 & -2 & 11\\ 2 & 1 & 1 & 3\end{pmatrix} \underset{r_3-2r_1}{\underbrace{\xrightarrow{r_2-3r_1}}} \begin{pmatrix}1 & 3 & -2 & 4\\ 0 & -3 & 4 & -1\\ 0 & -5 & 5 & -5\end{pmatrix} \underbrace{\xrightarrow{-\frac{1}{5}r_3}} \begin{pmatrix}1 & 3 & -2 & 4\\ 0 & -3 & 4 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3}} \begin{pmatrix}1 & 3 & -2 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -3 & 4 & -1\end{pmatrix}$$

我们来看初等行变换能够将矩阵化简成何种形式.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -2 & 11 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{5}r_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + 3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

我们来看初等行变换能够将矩阵化简成何种形式.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -2 & 11 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \underset{r_3 - 2r_1}{\overset{r_2 - 3r_1}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \end{pmatrix} \overset{-\frac{1}{5}r_3}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{r_2 \leftrightarrow r_3}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \overset{r_3 + 3r_2}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

矩阵化为行阶梯形

我们来看初等行变换能够将矩阵化简成何种形式.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -2 & 11 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \underset{r_3 - 2r_1}{\overset{r_2 - 3r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \end{pmatrix} \overset{-\frac{1}{5}r_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{r_2 \leftrightarrow r_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \overset{r_3 + 3r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

经过若干次初等**行变换**, 矩阵变为**行阶梯形矩阵**.

行阶梯形矩阵

定义. 满足下述条件的矩阵称为**行阶梯形矩阵**:

行阶梯形矩阵

定义. 满足下述条件的矩阵称为**行阶梯形矩阵**:

(1) 每个非零行的第一个非零元只出现在上一行第一个非零元的右边;

行阶梯形矩阵

定义. 满足下述条件的矩阵称为**行阶梯形矩阵**:

(1) 每个非零行的第一个非零元只出现在上一行第一个非零元的右边;

(2) 零行只可能出现在最下方.

行阶梯形矩阵

定义. 满足下述条件的矩阵称为**行阶梯形矩阵**:

(1) 每个非零行的第一个非零元只出现在上一行第一个非零元的右边;

(2) 零行只可能出现在最下方.

换言之, 若 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}$, 存在正整数

$$1 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_\ell, \qquad \ell \leqslant m$$

使得 $a_{1,k_1}, \ldots, a_{\ell,k_\ell}$ 均非零; $j < k_i$ 或 $i > \ell$ 时 $a_{ij} = 0$.

行阶梯形矩阵

定义. 满足下述条件的矩阵称为**行阶梯形矩阵**:

(1) 每个非零行的第一个非零元只出现在上一行第一个非零元的右边;

(2) 零行只可能出现在最下方.

换言之, 若 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}$, 存在正整数

$$1 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_\ell, \qquad \ell \leqslant m$$

使得 $a_{1,k_1}, \ldots, a_{\ell,k_\ell}$ 均非零; $j < k_i$ 或 $i > \ell$ 时 $a_{ij} = 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

行阶梯形矩阵

定义. 满足下述条件的矩阵称为**行阶梯形矩阵**:

(1) 每个非零行的第一个非零元只出现在上一行第一个非零元的右边;

(2) 零行只可能出现在最下方.

换言之, 若 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}$, 存在正整数

$$1 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_\ell, \qquad \ell \leqslant m$$

使得 $a_{1,k_1}, \ldots, a_{\ell,k_\ell}$ 均非零; $j < k_i$ 或 $i > \ell$ 时 $a_{ij} = 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行阶梯形矩阵

定义. 满足下述条件的矩阵称为**行阶梯形矩阵**:

(1) 每个非零行的第一个非零元只出现在上一行第一个非零元的右边;

(2) 零行只可能出现在最下方.

换言之, 若 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}$, 存在正整数

$$1 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_\ell, \qquad \ell \leqslant m$$

使得 $a_{1,k_1}, \ldots, a_{\ell,k_\ell}$ 均非零; $j < k_i$ 或 $i > \ell$ 时 $a_{ij} = 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \times$$

行阶梯形矩阵

定义. 满足下述条件的矩阵称为**行阶梯形矩阵**:

(1) 每个非零行的第一个非零元只出现在上一行第一个非零元的右边;

(2) 零行只可能出现在最下方.

换言之, 若 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}$, 存在正整数

$$1 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_\ell, \qquad \ell \leqslant m$$

使得 $a_{1,k_1}, \ldots, a_{\ell,k_\ell}$ 均非零; $j < k_i$ 或 $i > \ell$ 时 $a_{ij} = 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \times$$

任何矩阵都可通过初等行变换化为行阶梯形.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{r_1+2r_3}{\overset{r_2+r_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

行最简形矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{r_1+2r_3}{\overset{r_2+r_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{r_1-3r_2}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{pmatrix}$$

行最简形矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{r_1+2r_3}{\overset{r_2+r_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{r_1-3r_2}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{pmatrix}$$

再经过若干次初等变换，矩阵变为**行最简形矩阵**.

行最简形矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{r_1+2r_3}{\overset{r_2+r_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{r_1-3r_2}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{pmatrix}$$

再经过若干次初等变换, 矩阵变为行最简形矩阵.

定义. 满足下述条件的行阶梯形矩阵称为行最简形矩阵:

行最简形矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{r_2+r_3}{\underset{r_1+2r_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{r_1-3r_2}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{pmatrix}$$

再经过若干次初等变换, 矩阵变为行最简形矩阵.

定义. 满足下述条件的行阶梯形矩阵称为**行最简形矩阵**:

(1) 每个非零行的第一个非零元是 1;

行最简形矩阵

$$\begin{pmatrix}1&3&-2&4\\0&1&-1&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}\underset{r_1+2r_3}{\overset{r_2+r_3}{\sim}}\begin{pmatrix}1&3&0&8\\0&1&0&3\\0&0&1&2\end{pmatrix}\overset{r_1-3r_2}{\sim}\begin{pmatrix}\boxed{1}&0&0&-1\\0&\boxed{1}&0&3\\0&0&\boxed{1}&2\end{pmatrix}$$

再经过若干次初等变换，矩阵变为**行最简形矩阵**.

定义. 满足下述条件的行阶梯形矩阵称为**行最简形矩阵**:

(1) 每个非零行的第一个非零元是 1;

(2) 每个非零行的第一个非零元所在列其它元素均为 0.

行最简形矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{r_1+2r_3}{\overset{r_2+r_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{r_1-3r_2}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{pmatrix}$$

再经过若干次初等变换, 矩阵变为行最简形矩阵.

定义. 满足下述条件的行阶梯形矩阵称为行最简形矩阵:

(1) 每个非零行的第一个非零元是 1;

(2) 每个非零行的第一个非零元所在列其它元素均为 0.

例如 $\begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

行最简形矩阵

$$\begin{pmatrix}1&3&-2&4\\0&1&-1&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}\underset{r_1+2r_3}{\overset{r_2+r_3}{\sim}}\begin{pmatrix}1&3&0&8\\0&1&0&3\\0&0&1&2\end{pmatrix}\overset{r_1-3r_2}{\sim}\begin{pmatrix}\boxed{1}&0&0&-1\\0&\boxed{1}&0&3\\0&0&\boxed{1}&2\end{pmatrix}$$

再经过若干次初等变换, 矩阵变为行最简形矩阵.

定义. 满足下述条件的行阶梯形矩阵称为行最简形矩阵:

(1) 每个非零行的第一个非零元是 1;

(2) 每个非零行的第一个非零元所在列其它元素均为 0.

例如 $\begin{pmatrix}0&\boxed{1}&0&2&0\\0&0&\boxed{1}&1&0\\0&0&0&0&\boxed{1}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$. 任何矩阵都可通过初等行变换化为行最简形.

例: 行最简形矩阵

例. 用初等行变换将 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 3 & -9 & 3\\ 0 & 1 & -3 & 4\\ -2 & -3 & 9 & 6\end{pmatrix}$ 化为行最简形矩阵.

例: 行最简形矩阵

例. 用初等行变换将 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&3&-9&3\\0&1&-3&4\\-2&-3&9&6\end{pmatrix}$ 化为行最简形矩阵.

解答.

$$\begin{pmatrix}1&3&-9&3\\0&1&-3&4\\-2&-3&9&6\end{pmatrix}$$

例: 行最简形矩阵

例. 用初等行变换将 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ -2 & -3 & 9 & 6 \end{pmatrix}$ 化为行最简形矩阵.

解答.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ -2 & -3 & 9 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & -9 & 12 \end{pmatrix}$$

例：行最简形矩阵

例. 用初等行变换将 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ -2 & -3 & 9 & 6 \end{pmatrix}$ 化为行最简形矩阵.

解答.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ -2 & -3 & 9 & 6 \end{pmatrix} \underset{\sim}{r_3 + 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & -9 & 12 \end{pmatrix} \underset{\sim}{r_3 - 3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例: 行最简形矩阵

例. 用初等行变换将 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 3 & -9 & 3\\ 0 & 1 & -3 & 4\\ -2 & -3 & 9 & 6\end{pmatrix}$ 化为行最简形矩阵.

解答.

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & -9 & 3\\ 0 & 1 & -3 & 4\\ -2 & -3 & 9 & 6\end{pmatrix}\underset{\sim}{r_3+2r_1}\begin{pmatrix}1 & 3 & -9 & 3\\ 0 & 1 & -3 & 4\\ 0 & 3 & -9 & 12\end{pmatrix}\underset{\sim}{r_3-3r_2}\begin{pmatrix}1 & 3 & -9 & 3\\ 0 & 1 & -3 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{r_1-3r_2}\begin{pmatrix}\boxed{1} & 0 & 0 & -9\\ 0 & \boxed{1} & -3 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

方阵的行最简形

命题. n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆 $\iff$ 它的行最简形为 $\boldsymbol{E}_n$.

命题. n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆 $\Longleftrightarrow$ 它的行最简形为 $\boldsymbol{E}_n$.

注意到初等行变换不改变行列式的非零性.

方阵的行最简形

命题. n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆 $\Longleftrightarrow$ 它的行最简形为 $\boldsymbol{E}_n$.

注意到初等行变换不改变行列式的非零性. 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则它的行最简形 $\boldsymbol{B}$ 不能有零行, 从而 $\boldsymbol{B}$ 有 n 个非零行.

命题. n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆 $\iff$ 它的行最简形为 $\boldsymbol{E}_n$.

注意到初等行变换不改变行列式的非零性. 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则它的行最简形 $\boldsymbol{B}$ 不能有零行, 从而 $\boldsymbol{B}$ 有 n 个非零行. 而每个非零行的首个非零元所在列数递增, 因此第 i 行的首个非零元一定在第 i 列, 从而 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$.

方阵的行最简形

命题. n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆 $\iff$ 它的行最简形为 $\boldsymbol{E}_n$.

注意到初等行变换不改变行列式的非零性. 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则它的行最简形 $\boldsymbol{B}$ 不能有零行, 从而 $\boldsymbol{B}$ 有 n 个非零行. 而每个非零行的首个非零元所在列数递增, 因此第 i 行的首个非零元一定在第 i 列, 从而 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}$.

由此可知, 存在一系列初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1, \ldots, \boldsymbol{P}_k$ 使得 $\boldsymbol{P}_1 \cdots \boldsymbol{P}_k \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$.

命题. n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆 $\Longleftrightarrow$ 它的行最简形为 $\boldsymbol{E}_n$.

注意到初等行变换不改变行列式的非零性. 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则它的行最简形 $\boldsymbol{B}$ 不能有零行, 从而 $\boldsymbol{B}$ 有 n 个非零行. 而每个非零行的首个非零元所在列数递增, 因此第 i 行的首个非零元一定在第 i 列, 从而 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}$.

由此可知, 存在一系列初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1, \ldots, \boldsymbol{P}_k$ 使得 $\boldsymbol{P}_1 \cdots \boldsymbol{P}_k \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$. 从而 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}_k^{-1} \cdots \boldsymbol{P}_1^{-1}$, 可逆方阵可以写成有限个初等矩阵的乘积.

命题. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵. 若 $|\boldsymbol{A}|=0$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解.

命题. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵. 若 $|\boldsymbol{A}|=0$, 则 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 有非零解.

证明. 设 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的行最简形为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$,

命题. 设 A 是 n 阶方阵. 若 $|A| = 0$, 则 $Ax = \mathbf{0}$ 有非零解.

证明. 设 A^{T} 的行最简形为 $B = PA^{\mathrm{T}}$, 其中 P 是一些初等矩阵的乘积, 从而可逆.

行最简形的应用

命题. 设 A 是 n 阶方阵. 若 $|A| = 0$, 则 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 有非零解.

证明. 设 A^{T} 的行最简形为 $B = PA^{\mathrm{T}}$, 其中 P 是一些初等矩阵的乘积, 从而可逆. 由于 $|A^{\mathrm{T}}| = |A| = 0$, 因此 $B \neq E$ 有零行.

命题. 设 A 是 n 阶方阵. 若 $|A| = 0$, 则 $Ax = \mathbf{0}$ 有非零解.

证明. 设 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的行最简形为 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$, 其中 $\boldsymbol{P}$ 是一些初等矩阵的乘积, 从而可逆. 由于 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{A}| = 0$, 因此 $\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{E}$ 有零行. 设 $\boldsymbol{v} = (0, \ldots, 0, 1)^{\mathrm{T}}$, 那么 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$.

行最简形的应用

命题. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵. 若 $|\boldsymbol{A}|=0$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解.

证明. 设 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的行最简形为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$, 其中 $\boldsymbol{P}$ 是一些初等矩阵的乘积, 从而可逆. 由于 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|=0$, 因此 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{E}$ 有零行. 设 $\boldsymbol{v}=(0,\ldots,0,1)^{\mathrm{T}}$, 那么 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$. 从而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$.

行最简形的应用

命题. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵. 若 $|\boldsymbol{A}|=0$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 有非零解.

证明. 设 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的行最简形为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$, 其中 $\boldsymbol{P}$ 是一些初等矩阵的乘积, 从而可逆. 由于 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|=0$, 因此 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{E}$ 有零行. 设 $\boldsymbol{v}=(0,\ldots,0,1)^{\mathrm{T}}$, 那么 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$. 从而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$. 由于 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$ 可逆, 它的最后一列 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}$ 非零. □.

命题. 设 A 是 n 阶方阵. 若 $|A| = 0$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 有非零解.

证明. 设 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的行最简形为 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$, 其中 $\boldsymbol{P}$ 是一些初等矩阵的乘积, 从而可逆. 由于 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{A}| = 0$, 因此 $\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{E}$ 有零行. 设 $\boldsymbol{v} = (0, \ldots, 0, 1)^{\mathrm{T}}$, 那么 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$. 从而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$. 由于 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$ 可逆, 它的最后一列 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}$ 非零. $\square$.

推论. 设 A 为 $m \times n$ 矩阵. 若 $m < n$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 有非零解.

命题. 设 A 是 n 阶方阵. 若 $|A|=0$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 有非零解.

证明. 设 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的行最简形为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$, 其中 $\boldsymbol{P}$ 是一些初等矩阵的乘积, 从而可逆. 由于 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|=0$, 因此 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{E}$ 有零行. 设 $\boldsymbol{v}=(0,\ldots,0,1)^{\mathrm{T}}$, 那么 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$. 从而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$. 由于 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$ 可逆, 它的最后一列 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}$ 非零. □.

推论. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵. 若 $m<n$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 有非零解.

证明. 将 $\boldsymbol{A}$ 补充 $n-m$ 个零行得到 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$,

命题. 设 A 是 n 阶方阵. 若 $|A| = 0$, 则 $Ax = \mathbf{0}$ 有非零解.

证明. 设 A^{T} 的行最简形为 $B = PA^{\mathrm{T}}$, 其中 P 是一些初等矩阵的乘积, 从而可逆. 由于 $|A^{\mathrm{T}}| = |A| = 0$, 因此 $B \neq E$ 有零行. 设 $v = (0, \dots, 0, 1)^{\mathrm{T}}$, 那么 $B^{\mathrm{T}}v = \mathbf{0}$. 从而 $AP^{\mathrm{T}}v = \mathbf{0}$. 由于 P^{T} 可逆, 它的最后一列 $P^{\mathrm{T}}v$ 非零. $\square$.

推论. 设 A 为 $m \times n$ 矩阵. 若 $m < n$, 则 $Ax = \mathbf{0}$ 有非零解.

证明. 将 A 补充 $n - m$ 个零行得到 $B = \begin{pmatrix} A \\ O \end{pmatrix}$, 则 $|B| = 0$, 存在非零向量 x 使得 $Bx = \mathbf{0}$.

命题. 设 A 是 n 阶方阵. 若 $|A|=0$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解.

证明. 设 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的行最简形为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$, 其中 $\boldsymbol{P}$ 是一些初等矩阵的乘积, 从而可逆. 由于 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|=0$, 因此 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{E}$ 有零行. 设 $\boldsymbol{v}=(0,\ldots,0,1)^{\mathrm{T}}$, 那么 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$. 从而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$. 由于 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$ 可逆, 它的最后一列 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}$ 非零. □.

推论. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵. 若 $m<n$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解.

证明. 将 $\boldsymbol{A}$ 补充 $n-m$ 个零行得到 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$, 则 $|\boldsymbol{B}|=0$, 存在非零向量 $\boldsymbol{x}$ 使得 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 从而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. □

矩阵等价的定义

定义.

矩阵等价的定义

定义.

(1) 若 A 经过有限次初等行变换变为 B, 则称 A 和 B **行等价**, 记作 $A \overset{r}{\sim} B$.

矩阵等价的定义

定义.

(1) 若 A 经过有限次初等行变换变为 B, 则称 A 和 B 行等价, 记作$A \overset{r}{\sim} B$.

(2) 若 A 经过有限次初等列变换变为 B, 则称 A 和 B 列等价, 记作$A \overset{c}{\sim} B$.

矩阵等价的定义

定义.

(1) 若 A 经过有限次初等行变换变为 B, 则称 A 和 B 行等价, 记作$A \overset{r}{\sim} B$.

(2) 若 A 经过有限次初等列变换变为 B, 则称 A 和 B 列等价, 记作$A \overset{c}{\sim} B$.

(3) 若 A 经过有限次初等行变换和初等列变换变为 B, 则称 A 和 B 等价, 记作$A \sim B$.

矩阵等价的定义

定义.

(1) 若 A 经过有限次初等行变换变为 B, 则称 A 和 B 行等价, 记作$A \stackrel{r}{\sim} B$.

(2) 若 A 经过有限次初等列变换变为 B, 则称 A 和 B 列等价, 记作$A \stackrel{c}{\sim} B$.

(3) 若 A 经过有限次初等行变换和初等列变换变为 B, 则称 A 和 B 等价, 记作$A \sim B$.

由于可逆方阵可以写成有限个初等矩阵的乘积, 因此:

矩阵等价的定义

定义.

(1) 若 A 经过有限次初等行变换变为 B, 则称 A 和 B **行等价**, 记作 $A \overset{r}{\sim} B$.

(2) 若 A 经过有限次初等列变换变为 B, 则称 A 和 B **列等价**, 记作 $A \overset{c}{\sim} B$.

(3) 若 A 经过有限次初等行变换和初等列变换变为 B, 则称 A 和 B **等价**, 记作 $A \sim B$.

由于可逆方阵可以写成有限个初等矩阵的乘积, 因此:

定理.

矩阵等价的定义

定义.

(1) 若 A 经过有限次初等行变换变为 B, 则称 A 和 B **行等价**, 记作 $A \overset{r}{\sim} B$.

(2) 若 A 经过有限次初等列变换变为 B, 则称 A 和 B **列等价**, 记作 $A \overset{c}{\sim} B$.

(3) 若 A 经过有限次初等行变换和初等列变换变为 B, 则称 A 和 B **等价**, 记作 $A \sim B$.

由于可逆方阵可以写成有限个初等矩阵的乘积, 因此:

定理.

(1) $A \overset{r}{\sim} B$ 当且仅当存在可逆矩阵 P 使得 $B = PA$.

矩阵等价的定义

定义.

(1) 若 A 经过有限次初等行变换变为 B, 则称 A 和 B **行等价**, 记作$A \stackrel{r}{\sim} B$.

(2) 若 A 经过有限次初等列变换变为 B, 则称 A 和 B **列等价**, 记作$A \stackrel{c}{\sim} B$.

(3) 若 A 经过有限次初等行变换和初等列变换变为 B, 则称 A 和 B **等价**, 记作$A \sim B$.

由于可逆方阵可以写成有限个初等矩阵的乘积, 因此:

定理.

(1) $A \stackrel{r}{\sim} B$ 当且仅当存在可逆矩阵 P 使得 $B = PA$.

(2) $A \stackrel{c}{\sim} B$ 当且仅当存在可逆矩阵 Q 使得 $B = AQ$.

矩阵等价的定义

定义.

(1) 若 A 经过有限次初等行变换变为 B, 则称 A 和 B 行等价, 记作$A \overset{r}{\sim} B$.

(2) 若 A 经过有限次初等列变换变为 B, 则称 A 和 B 列等价, 记作$A \overset{c}{\sim} B$.

(3) 若 A 经过有限次初等行变换和初等列变换变为 B, 则称 A 和 B 等价, 记作$A \sim B$.

由于可逆方阵可以写成有限个初等矩阵的乘积, 因此:

定理.

(1) $A \overset{r}{\sim} B$ 当且仅当存在可逆矩阵 P 使得 $B = PA$.

(2) $A \overset{c}{\sim} B$ 当且仅当存在可逆矩阵 Q 使得 $B = AQ$.

(3) $A \sim B$ 当且仅当存在可逆矩阵 P, Q 使得 $B = PAQ$.

由此可知

命题. 矩阵的行等价、列等价、等价均满足

由此可知

命题. 矩阵的行等价、列等价、等价均满足

(1) 自反性: $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{A}$;

矩阵等价的性质

由此可知

命题. 矩阵的行等价、列等价、等价均满足

(1) 自反性: $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{A}$;

(2) 对称性: $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B} \implies \boldsymbol{B} \sim \boldsymbol{A}$;

矩阵等价的性质

由此可知

命题. 矩阵的行等价、列等价、等价均满足

(1) 自反性: $A \sim A$;

(2) 对称性: $A \sim B \implies B \sim A$;

(3) 传递性: $A \sim B, B \sim C \implies A \sim C$.

矩阵的标准型

任一矩阵通过有限次初等行变换变为行最简形后，可通过初等**列变换**将其变为**标准型** $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$.

任一矩阵通过有限次初等行变换变为行最简形后, 可通过初等列变换将其变为标准型 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$. 例如:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

任一矩阵通过有限次初等行变换变为行最简形后，可通过初等列变换将其变为标准型 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$. 例如:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\sim}{c_4+9c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

任一矩阵通过有限次初等行变换变为行最简形后，可通过初等**列变换**将其变为**标准型** $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$. 例如:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\sim}{c_4 + 9c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{c_4 - 4c_2}{\overset{c_3 + 3c_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

矩阵的标准型

任一矩阵通过有限次初等行变换变为行最简形后，可通过初等**列变换**将其变为**标准型** $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$. 例如:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{}{\overset{c_4+9c_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{c_4-4c_2}{\overset{c_3+3c_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

矩阵的等价也叫做**相抵**, 上述标准型也叫作**相抵标准型**.

矩阵的标准型

任一矩阵通过有限次初等行变换变为行最简形后, 可通过初等**列变换**将其变为**标准型** $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$. 例如:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{c_4+9c_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{c_4-4c_2}{\overset{c_3+3c_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

矩阵的等价也叫做**相抵**, 上述标准型也叫作**相抵标准型**. 我们会看到不同的 r 对应的相抵标准型不等价.

任一矩阵通过有限次初等行变换变为行最简形后，可通过初等列变换将其变为标准型 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$. 例如:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\sim}{c_4 + 9c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{c_4 - 4c_2}{\overset{c_3 + 3c_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

矩阵的等价也叫做**相抵**，上述标准型也叫作**相抵标准型**. 我们会看到不同的 r 对应的相抵标准型不等价. 所以相抵标准型相当于在每一个等价类中找到了一个具有代表性的矩阵.

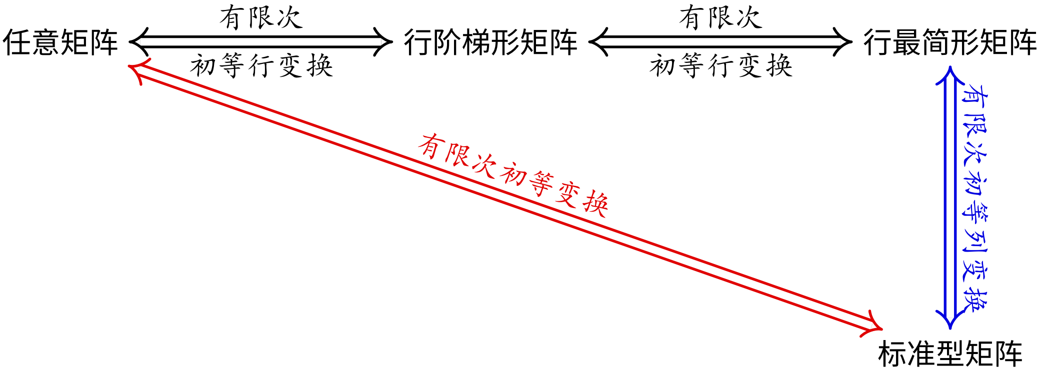
任一矩阵通过有限次初等行变换变为行最简形后，可通过初等列变换将其变为标准型 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$. 例如:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\sim}{c_4 + 9c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{c_4 - 4c_2}{\overset{c_3 + 3c_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

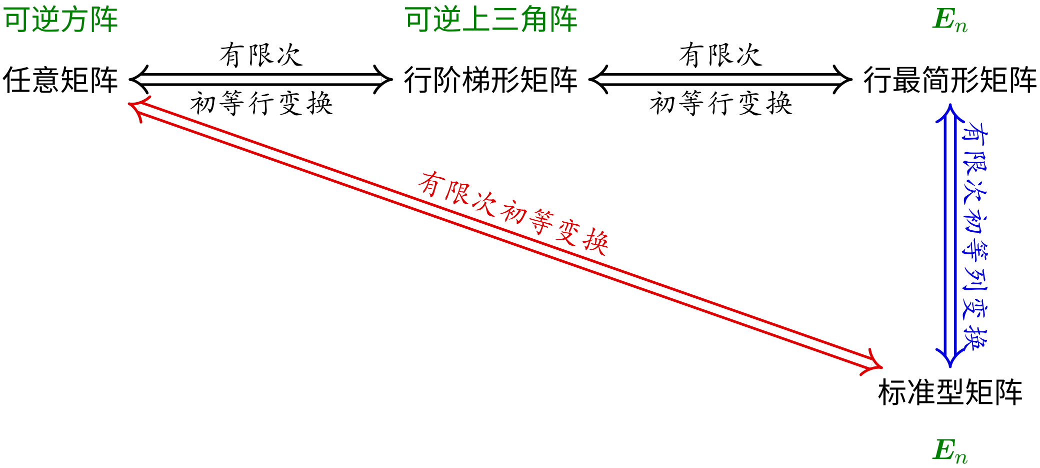
矩阵的等价也叫做**相抵**，上述标准型也叫作**相抵标准型**. 我们会看到不同的 r 对应的相抵标准型不等价. 所以相抵标准型相当于在每一个等价类中找到了一个具有代表性的矩阵.

命题. n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆当且仅当它的标准型为 $\boldsymbol{E}_n$.

矩阵的变换关系


任意矩阵
有限次
初等行变换
行阶梯形矩阵
有限次
初等行变换
行最简形矩阵
有限次初等变换
有限次初等列变换
标准型矩阵

矩阵的变换关系


可逆方阵
可逆上三角阵
E_n
任意矩阵
有限次
初等行变换
行阶梯形矩阵
有限次
初等行变换
行最简形矩阵
有限次初等变换
有限次初等列变换
标准型矩阵
E_n

例. 将矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$ 表示成有限个初等阵的乘积.

例：初等变换

例. 将矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$ 表示成有限个初等阵的乘积.

解答.

$$\boldsymbol{A}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\2&0&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-2r_1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[-r_3]{-r_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

例：初等变换

例. 将矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$ 表示成有限个初等阵的乘积.

解答.

$$\boldsymbol{A}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\2&0&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-2r_1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[-r_3]{-r_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

因此 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$,

例: 初等变换

例. 将矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$ 表示成有限个初等阵的乘积.

解答.

$$\boldsymbol{A}\overset{r_2\leftrightarrow r_3}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\2&0&-1\end{pmatrix}\overset{r_3-2r_1}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\underset{-r_3}{\overset{-r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

因此 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$,

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B} \iff \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$.

初等变换解矩阵方程

若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B} \iff \boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$. 若 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \overset{r}{\sim} (\boldsymbol{E},\boldsymbol{X})$, 则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{E},\boldsymbol{X})$.

初等变换解矩阵方程

若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B} \iff \boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$. 若 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \overset{r}{\sim} (\boldsymbol{E},\boldsymbol{X})$, 则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{E},\boldsymbol{X})$. 即 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}^{-1}, \boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$.

若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B} \iff \boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$. 若 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \overset{r}{\sim} (\boldsymbol{E},\boldsymbol{X})$, 则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{E},\boldsymbol{X})$. 即 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}^{-1}, \boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$. 所以

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B} \iff \boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \iff (\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \overset{r}{\sim} (\boldsymbol{E},\boldsymbol{X}).$$

若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B} \iff \boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$. 若 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \overset{r}{\sim} (\boldsymbol{E},\boldsymbol{X})$, 则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{E},\boldsymbol{X})$. 即 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}^{-1}, \boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$. 所以

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B} \iff \boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \iff (\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \overset{r}{\sim} (\boldsymbol{E},\boldsymbol{X}).$$

同理

$$\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{C} \iff \boldsymbol{X}=\boldsymbol{CA}^{-1} \iff \begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix} \overset{c}{\sim} \begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{X}\end{pmatrix}.$$

若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B} \iff \boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$. 若 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \overset{r}{\sim} (\boldsymbol{E},\boldsymbol{X})$, 则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{E},\boldsymbol{X})$. 即 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}^{-1}, \boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$. 所以

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B} \iff \boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \iff (\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \overset{r}{\sim} (\boldsymbol{E},\boldsymbol{X}).$$

同理

$$\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{C} \iff \boldsymbol{X}=\boldsymbol{CA}^{-1} \iff \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \overset{c}{\sim} \begin{pmatrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{X} \end{pmatrix}.$$

所以我们可使用初等变换解该类型矩阵方程.

初等变换解矩阵方程

若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B} \iff \boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$. 若 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \overset{r}{\sim} (\boldsymbol{E},\boldsymbol{X})$, 则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{E},\boldsymbol{X})$. 即 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}^{-1}, \boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$. 所以

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B} \iff \boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \iff (\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \overset{r}{\sim} (\boldsymbol{E},\boldsymbol{X}).$$

同理

$$\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{C} \iff \boldsymbol{X}=\boldsymbol{CA}^{-1} \iff \begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix} \overset{c}{\sim} \begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{X}\end{pmatrix}.$$

所以我们可使用初等变换解该类型矩阵方程.

特别地, $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E}) \overset{r}{\sim} (\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}^{-1})$ 可用来帮助计算矩阵的逆.

初等变换解矩阵方程

若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B} \iff \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$. 若 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \overset{r}{\sim} (\boldsymbol{E}, \boldsymbol{X})$, 则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{E}, \boldsymbol{X})$. 即 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}^{-1}, \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$. 所以

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B} \iff \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \iff (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \overset{r}{\sim} (\boldsymbol{E}, \boldsymbol{X}).$$

同理

$$\boldsymbol{XA} = \boldsymbol{C} \iff \boldsymbol{X} = \boldsymbol{CA}^{-1} \iff \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \overset{c}{\sim} \begin{pmatrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{X} \end{pmatrix}.$$

所以我们可使用初等变换解该类型矩阵方程.

特别地, $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{E}) \overset{r}{\sim} (\boldsymbol{E}, \boldsymbol{A}^{-1})$ 可用来帮助计算矩阵的逆.

例. 求 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ 的逆.

例：初等变换解矩阵方程

解答.

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&1&0&0\\1&2&3&0&1&0\\2&1&4&0&0&1\end{array}\right)$$

例：初等变换解矩阵方程

解答.

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{E}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{r_3 - 2r_1}{\overset{r_2 - r_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

例：初等变换解矩阵方程

解答.

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{E}) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{r_3 - 2r_1}{\overset{r_2 - r_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{r_3 + r_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

例：初等变换解矩阵方程

解答.

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E}) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{r_3-2r_1}{\underbrace{\overset{r_2-r_1}{\sim}}} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{r_3+r_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{r_2-r_3}{\overset{r_1-2r_3}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 0 & 7 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

例：初等变换解矩阵方程

解答.

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&1&0&0\\1&2&3&0&1&0\\2&1&4&0&0&1\end{array}\right)\underset{r_3-2r_1}{\underset{\sim}{r_2-r_1}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&1&0&0\\0&1&1&-1&1&0\\0&-1&0&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&1&0&0\\0&1&1&-1&1&0\\0&0&1&-3&1&1\end{array}\right)\underset{r_2-r_3}{\underset{\sim}{r_1-2r_3}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&0&7&-2&-2\\0&1&0&2&0&-1\\0&0&1&-3&1&1\end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{r_1-r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&5&-2&-1\\0&1&0&2&0&-1\\0&0&1&-3&1&1\end{array}\right).$$

解答.

$$
(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&1&0&0\\1&2&3&0&1&0\\2&1&4&0&0&1\end{array}\right)\underset{r_3-2r_1}{\underset{\sim}{r_2-r_1}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&1&0&0\\0&1&1&-1&1&0\\0&-1&0&-2&0&1\end{array}\right)
$$

$$
\underset{\sim}{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&1&0&0\\0&1&1&-1&1&0\\0&0&1&-3&1&1\end{array}\right)\underset{r_2-r_3}{\underset{\sim}{r_1-2r_3}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&0&7&-2&-2\\0&1&0&2&0&-1\\0&0&1&-3&1&1\end{array}\right)
$$

$$
\underset{\sim}{r_1-r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&5&-2&-1\\0&1&0&2&0&-1\\0&0&1&-3&1&1\end{array}\right).
$$

故 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}5&-2&-1\\2&0&-1\\-3&1&1\end{pmatrix}.$

例. 若 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{X}$, 求 $\boldsymbol{X}$.

例. 若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&0\\2&1&3\\0&1&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{X}$, 求 $\boldsymbol{X}$.

解答. 由题设知 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}$.

例. 若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&0\\2&1&3\\0&1&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{X}$, 求 $\boldsymbol{X}$.

解答. 由题设知 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}$.

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E},\boldsymbol{A})=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&2&2&0\\2&0&3&2&1&3\\0&1&-1&0&1&0\end{array}\right)$$

例：初等变换解矩阵方程

例. 若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&0\\2&1&3\\0&1&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{X}$, 求 $\boldsymbol{X}$.

解答. 由题设知 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}$.

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E},\boldsymbol{A})=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&2&2&0\\2&0&3&2&1&3\\0&1&-1&0&1&0\end{array}\right)\underset{r_2\leftrightarrow r_3}{\overset{r_2-2r_1}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&2&2&0\\0&1&-1&0&1&0\\0&-4&3&-2&-3&3\end{array}\right)$$

续解.

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}, \boldsymbol{A}) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & -3 & 3 \end{array}\right) \underset{-r_3}{\overset{r_3+4r_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

续解.

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & -3 & 3 \end{array}\right) \underset{-r_3}{\underset{\sim}{r_3+4r_2}} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{r_2+r_3} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

例：初等变换解矩阵方程

续解.

$$
(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & -3 & 3 \end{array}\right) \underset{-r_3}{\overset{r_3+4r_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right)
$$

$$
\overset{r_2+r_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right) \overset{r_1-2r_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right).
$$

续解.

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & -3 & 3 \end{array}\right) \underset{-r_3}{\overset{r_3+4r_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\overset{r_2+r_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right) \overset{r_1-2r_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right).$$

故 $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$

例：解矩阵方程

例. 解矩阵方程 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X} = 2\boldsymbol{E} + 2\boldsymbol{X}$，其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

例: 解矩阵方程

例. 解矩阵方程 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=2\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{X}$, 其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$.

解答. 注意到 $|\boldsymbol{A}|=4$.

例. 解矩阵方程 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X} = 2\boldsymbol{E} + 2\boldsymbol{X}$, 其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

解答. 注意到 $|\boldsymbol{A}| = 4$. 两边同时左乘 $\boldsymbol{A}$ 得到 $4\boldsymbol{X} = 2\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$, $(2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}$.

例: 解矩阵方程

例. 解矩阵方程 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X} = 2\boldsymbol{E} + 2\boldsymbol{X}$, 其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

解答. 注意到 $|\boldsymbol{A}| = 4$. 两边同时左乘 $\boldsymbol{A}$ 得到 $4\boldsymbol{X} = 2\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$, $(2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}$.

$$(2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

例. 解矩阵方程 $A^*X = 2E + 2X$，其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

解答. 注意到 $|A| = 4$. 两边同时左乘 A 得到 $4X = 2A + 2AX$, $(2E - A)X = A$.

$$(2E - A, A) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

例: 解矩阵方程

例. 解矩阵方程 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X} = 2\boldsymbol{E} + 2\boldsymbol{X}$, 其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

解答. 注意到 $|\boldsymbol{A}| = 4$. 两边同时左乘 $\boldsymbol{A}$ 得到 $4\boldsymbol{X} = 2\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$, $(2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}$.

$$(2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

故 $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

例：解矩阵方程

练习. 解矩阵方程 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{X}\boldsymbol{A} - 8\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

例：解矩阵方程

练习. 解矩阵方程 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{X}\boldsymbol{A} - 8\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

答案. 两边同时左乘 $\boldsymbol{A}$ 右乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 得到 $-2\boldsymbol{X} = 2\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} - 8\boldsymbol{E}$, $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{X} = 4\boldsymbol{E}$,

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}, 4\boldsymbol{E}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

例：初等变换

练习.

练习.

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵，存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 3\end{pmatrix}$，则

$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{P}=$________________.

练习.

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵，存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 3\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{P}=$ ___ $\mathrm{diag}(6,3,2)$ ___.

练习.

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵, 存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P} = \underline{\quad \mathrm{diag}(6,3,2) \quad}$.

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵, 存在可逆阵 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$. 若 $\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2)$, 则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \underline{\qquad\qquad\qquad}$.

例：初等变换

练习.

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵，存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}=$ $\underline{\quad \text{diag}(6,3,2) \quad}$.

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵，存在可逆阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}$. 若 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)$，则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=$ $\underline{\quad \text{diag}(1,3,2) \quad}$.

例：初等变换

练习.

(1) 设 A 是 3 阶方阵，存在可逆阵 P 使得 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$，则

$P^{-1}A^*P =$ $\underline{\quad \mathrm{diag}(6,3,2) \quad}$.

(2) 设 A 是 3 阶方阵，存在可逆阵 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 使得 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$. 若

$Q = (\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2)$，则 $Q^{-1}AQ =$ $\underline{\quad \mathrm{diag}(1,3,2) \quad}$.

(3) 设 n 阶方阵 A, B 满足 $AB = E$，则以下说法正确的有______个.

(i) A 等价于 E;　　(ii) A 等价于 B;

(iii) A 可经过有限次初等行变换化为 B;　　(iv) $AB = BA$.

例: 初等变换

练习.

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵, 存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P} =$ ___$\mathrm{diag}(6,3,2)$___.

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵, 存在可逆阵 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$. 若 $\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2)$, 则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} =$ ___$\mathrm{diag}(1,3,2)$___.

(3) 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}$, 则以下说法正确的有___4___个.

(i) $\boldsymbol{A}$ 等价于 $\boldsymbol{E}$;

(ii) $\boldsymbol{A}$ 等价于 $\boldsymbol{B}$;

(iii) $\boldsymbol{A}$ 可经过有限次初等行变换化为 $\boldsymbol{B}$;

(iv) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$.