2022 年合肥工业大学试卷（A）

2022～2023 学年第一学期　　　复变函数与积分变换 (1400261B)

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. $\mathrm{i}^{-\mathrm{i}}$ 的主值是________________.

2. 设 $z=-\mathrm{i}$, 则 $1+z+z^2+z^3+z^4=$________________.

3. 设 C 为正向圆周 $|z|=2$, 则积分 $\oint_C\left(\dfrac{\overline{z}}{z}\right)\mathrm{d}z=$________________.

4. 设 a,b,c 为实数. 如果函数 $f(z)=x^2-2xy-y^2+\mathrm{i}(ax^2+bxy+cy^2)$ 在复平面上处处解析, 则 $a+b+c=$________________.

5. 函数 $\sin t+\mathrm{i}\cos t$ 的傅里叶变换为________________.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 方程 $\big||z+\mathrm{i}|-|z-\mathrm{i}|\big|=1$ 表示的曲线是 (　　).

A. 直线　　B. 不是圆的椭圆　　C. 双曲线　　D. 圆周

2. 不等式 $-1\leqslant\arg z\leqslant\pi-1$ (包括 0) 确定是的 (　　).

A. 有界多连通闭区域　　B. 有界单连通区域

C. 无界多连通区域　　D. 无界单连通闭区域

3. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\mathrm{i}z)^n$ 的收敛半径是 (　　).

A. i　　B. $-$i　　C. 1　　D. $+\infty$

4. 下面哪个函数在 $z=0$ 处不可导? (　　)

A. $2x+3y\mathrm{i}$　　B. $2x^2+3y^2\mathrm{i}$　　C. $x^2-xy\mathrm{i}$　　D. $\mathrm{e}^x\cos y+\mathrm{i}\mathrm{e}^x\sin y$

5. 如果 z_0 是 $f(z)$ 的一阶极点, $g(z)$ 的一阶零点, 则 z_0 是 $f(z)^3g(z)^2$ 的 (　　).

A. 一阶极点　　B. 一阶零点　　C. 可去奇点　　D. 三阶极点

三、解答题

1. (6 分) 设 $z=\dfrac{3+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}-\dfrac{10\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}}$, 求 z 的模和辐角.

2. (6 分) 解方程 $\sin z=2\cos z$.

3. (6 分) 设 C 为从 i 到 $\mathrm{i}-\pi$ 再到 $-\pi$ 的折线, 求 $\int_C\cos^2 z\,\mathrm{d}z$.

4. (10 分) 设 C 为正向圆周 $|z-3|=4$, 求 $\oint_C \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z^2-3\pi z+2\pi^2}\,\mathrm{d}z$.

5. (10 分) 假设 $v(x,y)=x^3+y^3-axy(x+y)$ 是调和函数，求参数 a 以及解析函数 $f(z)$ 使得 $v(x,y)$ 是它的虚部.

6. (10 分) 确定函数 $f(z)=\frac{z+1}{(z-1)^2}$ 在圆环域

(1) $0<|z|<1$;　　　(2) $1<|z|<+\infty$

内的洛朗级数展开式.

7. (10 分) 求 $f(z)=\frac{\cos z}{z^2(z^2-\pi^2)}$ 在有限复平面内的奇点和相应的留数.

8. (9 分) 用拉普拉斯变换求解微分方程初值问题

$$\begin{cases} y''(t)+2y(t)=\sin t, \\ y(0)=0, \quad y'(0)=2. \end{cases}$$

9. (3 分) 复变函数 $f(z)=\sin z$ 和实变量函数 $g(x)=\sin x$ 的性质有什么相似和不同之处? 试列举一二.

2022 年合肥工业大学考试参考答案（A）

2022～2023 学年第一学期　　　　复变函数与积分变换 (1400261B)

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

请将你的答案对应填在横线上：

1. $\underline{\quad \mathrm{e}^{\pi/2} \quad}$, **2.** $\underline{\quad 1 \quad}$, **3.** $\underline{\quad 0 \quad}$, **4.** $\underline{\quad 2 \quad}$, **5.** $\underline{\quad 2\pi\mathrm{i}\delta(\omega+1) \quad}$.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

请将你所选择的字母 **A, B, C, D** 之一对应填在下列表格里：

题号	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
答案	C	D	C	A	A

三、解答题

1.（6 分）【解】

由于 $z = -3\mathrm{i} + 1 - \mathrm{i}(3+\mathrm{i}) = 2 - 6\mathrm{i}$, ··························(2 分)

因此 $|z| = 2\sqrt{10}$, ··························(2 分)

$\operatorname{Arg} z = 2k\pi - \arctan 3, \quad k \in \mathbb{Z}$. ··························(2 分, 只有主值得 1 分)

2.（6 分）【解】

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} = 2 \cdot \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}, \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} = 2\mathrm{i}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}),$$

$$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} = \frac{1+2\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}} = \frac{(1+2\mathrm{i})^2}{5}, \quad \cdots\cdots (1\text{ 分})$$

$$2\mathrm{i}z = \operatorname{Ln} \frac{(1+2\mathrm{i})^2}{5} = (2\arctan 2 + 2k\pi)\mathrm{i}, \quad \cdots\cdots (1\text{ 分})$$

$$z = \arctan 2 + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad \cdots\cdots (2\text{ 分, 只有主值得 1 分})$$

另解: 设 $z_0 = \arctan 2$, 则

$$\tan z = \tan z_0, \quad \sin z \cos z_0 = \sin z_0 \cos z, \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$\sin(z - z_0) = 0, \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$z = z_0 + k\pi = \arctan 2 + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad \cdots\cdots (2\text{ 分, 只有主值得 1 分})$$

其它答案: $z = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{4}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

3.（6 分）【解】

由于 $\cos^2 z$ 解析, 且 ··························(1 分)

$$\int \cos^2 z \,\mathrm{d}z = \int \frac{1+\cos(2z)}{2}\,\mathrm{d}z \quad \cdots\cdots (1\text{ 分})$$

$$= \frac{z}{2} + \frac{\sin(2z)}{4} + C, \quad \cdots\cdots (1\text{ 分})$$

因此

$$\int_C \cos^2 z\,\mathrm{d}z = \left(\frac{z}{2}+\frac{\sin(2z)}{4}\right)\Bigg|_{\mathrm{i}}^{-\pi} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\ 分)$$

$$= -\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\mathrm{i}}{2}+\frac{\sin(2\mathrm{i})}{4}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\ 分)$$

$$= -\frac{\pi}{2} + \frac{(\mathrm{e}^{-2}-4-\mathrm{e}^{2})\mathrm{i}}{8}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\ 分)$$

4. （10 分）【解】

由于 $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z^2-3\pi z+2\pi^2}$ 在 $|z-3|\leqslant 4$ 内的奇点为 $\pi, 2\pi$, ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯(3 分)

因此

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\big(\mathrm{Res}[f(z),\pi]+\mathrm{Res}[f(z),2\pi]\big) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\ 分)$$

$$= 2\pi\mathrm{i}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z-2\pi}\bigg|_{z=\pi}+\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z-\pi}\bigg|_{z=2\pi}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\ 分)$$

$$= 2\pi\mathrm{i}\left(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}\right) = 4\mathrm{i}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3\ 分)$$

5. （10 分）【解】

由 $\Delta v = v_{xx}+v_{yy} = 6x-2ay+6y-2ax = 0$ 可知 $a=3$. ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯(3 分)

由

$$f'(z) = v_y + \mathrm{i}v_x \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\ 分)$$

$$= (3y^2-3x^2-6xy)+\mathrm{i}(3x^2-6xy-3y^2) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\ 分)$$

$$= 3(\mathrm{i}-1)(x+\mathrm{i}y)^2 = 3(\mathrm{i}-1)z^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\ 分)$$

可知 $f(z)=(\mathrm{i}-1)z^3+C,\quad C\in\mathbb{R}$. ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯(2 分, 没有常数项得 1 分)

其它解法: 由 $u_x=v_y=3y^2-3x^2-6xy$ 得 $u=3xy^2-x^3-3x^2y+\psi(y)$. ⋯⋯⋯(2 分)

由 $u_y=-v_x=-(3x^2-6xy-3y^2)$ 得 $\psi'(y)=3y^2$,

$\psi(y)=y^3+C$, ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯(3 分, 没有常数项得 2 分)

$$f(z) = u+\mathrm{i}v$$

$$= 3xy^2-x^3-3x^2y+y^3+C+\mathrm{i}(x^3+y^3-3xy^2-3x^2y)$$

$$= (\mathrm{i}-1)z^3+C,\quad C\in\mathbb{R}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\ 分)$$

6. （10 分）【解】

由于 $f(z)$ 的奇点是 1, 因此 $f(z)$ 在这两个圆环域内都解析.

(1) 由于

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\ 分)$$

因此

$$f(z)=\frac{z-1+2}{(z-1)^2}=\frac{1}{z-1}+\frac{2}{(z-1)^2}=-\frac{1}{1-z}+2\left(\frac{1}{1-z}\right)' \quad \cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}z^n+2\left(\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right)'=-\sum_{n=0}^{\infty}z^n+2\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}z^n+2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)z^n. \quad \cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

(2) 由于

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\sum_{n=1}^{\infty}z^{-n}, \quad \cdots\cdots\cdots(1\text{ 分})$$

因此

$$f(z)=\frac{1}{z-1}-2\left(\frac{1}{z-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}z^{-n}-2\left(\sum_{n=1}^{\infty}z^{-n}\right)' \quad \cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}z^{-n}-2\sum_{n=1}^{\infty}(-n)z^{-n-1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}z^{-n}-2\sum_{n=1}^{\infty}(-n+1)z^{-n}=\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)z^{-n}. \quad \cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

7. （10 分）【解】

由于 0 是分母的二阶零点, 因此它是 $f(z)$ 的二阶极点. $\cdots\cdots\cdots$(1 分)

由于 $\pm\pi$ 是分母的一阶零点, 因此它们是 $f(z)$ 的一阶极点. $\cdots\cdots\cdots$(1 分)

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\left(\frac{\cos z}{z^2-\pi^2}\right)'\bigg|_{z=0} \quad \cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

$$=\frac{-\sin z\cdot(z^2-\pi^2)-\cos z\cdot 2z}{(z^2-\pi^2)^2}\bigg|_{z=0}=0, \quad \cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

$$\operatorname{Res}[f(z),\pi]=\frac{\cos z}{z^2(z+\pi)}\bigg|_{z=\pi}=-\frac{1}{2\pi^3}, \quad \cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

$$\operatorname{Res}[f(z),-\pi]=\frac{\cos z}{z^2(z-\pi)}\bigg|_{z=-\pi}=\frac{1}{2\pi^3}. \quad \cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

8. （9 分）【解】

设 $\mathscr{L}[y]=Y$, 则

$$\mathscr{L}[y'']=s^2Y-sy(0)-y'(0)=s^2Y-2, \quad \cdots\cdots\cdots(3\text{ 分})$$

因此

$$s^2Y - 2 + 2Y = \mathscr{L}[\sin t] = \frac{1}{s^2+1}, \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$Y(s) = \frac{2}{s^2+2} + \frac{1}{(s^2+1)(s^2+2)} = \frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+2}, \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+2}\right] = \sin t + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin(\sqrt{2}t). \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

9. （3 分）【解】

例如 (每项 1 分)

- $f'(z) = \cos z, g'(x) = \cos x$. ……………………………………(1 分)
- $\sin z$ 处处可导, $\sin x$ 处处可导. ……………………………………(1 分)
- 麦克劳林展开的系数相同. ……………………………………(1 分)
- $\sin z$ 无界, $\sin x$ 有界. ……………………………………(1 分)

2022 年合肥工业大学试卷（B）

2022~2023 学年第一学期　　　复变函数与积分变换 (1400261B)

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. $-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ 的辐角主值是________.

2. $\mathrm{i}^{2022}-(-\mathrm{i})^{2022}=$________.

3. 如果函数 $f(z)=\mathrm{e}^{ax}(\cos y-\mathrm{i}\sin y)$ 在复平面上处处解析, 则实数 $a=$________.

4. 设 C 为正向圆周 $|z|=1$, 则积分 $\oint_C\left(\frac{1+z+z^2}{z^3}\right)\mathrm{d}z=$________.

5. 函数 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ 的傅里叶变换为________.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 不等式 $1<|z|<2$ 确定是的 (　).

A. 有界多连通区域　B. 有界单连通区域　C. 无界多连通区域　D. 无界单连通区域

2. 方程 $|z+\mathrm{i}|=|z-\mathrm{i}|$ 表示的曲线是 (　).

A. 直线　B. 不是圆的椭圆　C. 双曲线　D. 圆周

3. 幂级数在其收敛圆周上 (　).

A. 一定处处绝对收敛　B. 一定处处条件收敛

C. 一定有发散的点　D. 可能处处收敛也可能有发散的点

4. 函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 处可导的充要条件是 (　).

A. u,v 均在 (x_0,y_0) 处连续

B. u,v 均在 (x_0,y_0) 处有偏导数

C. u,v 均在 (x_0,y_0) 处可微

D. u,v 均在 (x_0,y_0) 处可微且满足 C-R 方程

5. $z=\pi$ 是函数 $\frac{\sin z}{(z-\pi)^2}$ 的 (　).

A. 一阶极点　B. 一阶零点　C. 可去奇点　D. 本性奇点

三、解答题

1. (6 分) 设 $z=\frac{2+\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}$, 求 z 的模和辐角.

2. (6 分) 求 $\sqrt[3]{-8}$.

3. (7 分) 设 C 是从 i 到 $2+\mathrm{i}$ 的直线, 求 $\displaystyle\int_C \overline{z}\,\mathrm{d}z$.

4. (7 分) 求 $\displaystyle\int_{-\pi\mathrm{i}}^{\pi\mathrm{i}} (\mathrm{e}^z+1)\,\mathrm{d}z$.

5. (7 分) 求 $\displaystyle\int_0^{\pi} (z+\cos 2z)\,\mathrm{d}z$.

6. (7 分) 设 C 为正向圆周 $|z|=4$, 求 $\displaystyle\oint_C \frac{z-6}{z^2+9}\,\mathrm{d}z$.

7. (8 分) 已知 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 是解析函数, 其中 $u(x,y)=x^2+axy-y^2, v=2x^2-2y^2+2xy$ 且 a 是实数. 求参数 a 以及解析函数 $f'(z)$, 其中 $f'(z)$ 需要写成 z 的表达式.

8. (10 分) 确定函数 $f(z)=\dfrac{2}{z(z+2)}$ 在圆环域

(1) $0<|z|<2$; (2) $2<|z|<+\infty$

内的洛朗级数展开式.

9. (9 分) 用拉普拉斯变换求解微分方程初值问题

$$\begin{cases} y''(t)+2y'(t)=8\mathrm{e}^{2t}, \\ y(0)=0, \quad y'(0)=2. \end{cases}$$

10. (3 分) 复积分的计算方法或公式有哪些? 请给出至少三条.

2022 年合肥工业大学考试参考答案（B）

2022～2023 学年第一学期　　　　复变函数与积分变换（1400261B）

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

请将你的答案对应填在横线上：

1. $\underline{\quad 2\pi/3 \quad}$, **2.** $\underline{\quad 0 \quad}$, **3.** $\underline{\quad -1 \quad}$, **4.** $\underline{\quad 2\pi i \quad}$, **5.** $\underline{\quad 2\pi\delta(\omega-1) \quad}$.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

请将你所选择的字母 A, B, C, D 之一对应填在下列表格里：

题号	1	2	3	4	5
答案	A	A	D	D	A

三、解答题

1. （**6** 分）【解】由于 $z=\dfrac{(2+i)(1+2i)}{5}=i$, ············(2 分)

因此 $|z|=1$, ············(2 分)

$\operatorname{Arg} z=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$. ············(2 分, 只有主值得 1 分)

2. （**6** 分）【解】由于 $-8=8e^{\pi i}$, ············(2 分)

因此

$$\sqrt[3]{-8}=2e^{\frac{1}{3}(\pi i+2k\pi)},\quad k=0,1,2 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

即

$$2e^{\frac{\pi i}{3}}=1+\sqrt{3}i,\quad 2e^{\pi i}=-2,\quad 2e^{\frac{5\pi i}{3}}=1-\sqrt{3}i. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

3. （**7** 分）【解】

直线 C 的方程为 $z=t+i, 0\leqslant t\leqslant 2$. ············(2 分)

因此 $dz=dt$, $\overline{z}=t-i$. ············(2 分)

$$\begin{aligned}\int \overline{z}\,dz &= \int_0^2 (t-i)\,dt \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})\\ &= \left(\frac{t^2}{2}-it\right)\Big|_0^2=2-2i. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1\text{ 分})\end{aligned}$$

4. （**7** 分）【解】由于 e^z+1 处处解析, 因此 ············(2 分)

$$\begin{aligned}\int_{-\pi i}^{\pi i}(e^z+1)\,dz &= (e^z+z)\Big|_{-\pi i}^{\pi i} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})\\ &= (e^{\pi i}+\pi i)-(e^{-\pi i}-\pi i) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})\\ &= 2\pi i. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1\text{ 分})\end{aligned}$$

5. （7 分）【解】 由于 $z+\cos 2z$ 处处解析, 因此 ……………………………(2 分)

$$\int_0^{\pi}(z+\cos 2z)\,\mathrm{d}z = \left(\frac{z^2}{2}+\frac{\sin 2z}{2}\right)\Big|_0^{\pi} \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$
$$= \frac{\pi^2}{2}+\frac{\sin 2\pi}{2} \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$
$$= \frac{\pi^2}{2}. \quad \cdots\cdots (1\text{ 分})$$

6. （7 分）【解】

由于 $f(z)=\dfrac{z-6}{z^2+9}$ 在 $|z|\leqslant 4$ 内的奇点为 $\pm 3\mathrm{i}$, ……………………………(2 分)

因此

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\big(\mathrm{Res}[f(z),3\mathrm{i}]+\mathrm{Res}[f(z),-3\mathrm{i}]\big) \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$
$$= 2\pi\mathrm{i}\left(\frac{z-6}{z+3\mathrm{i}}\Big|_{z=3\mathrm{i}}+\frac{z-6}{z-3\mathrm{i}}\Big|_{z=-3\mathrm{i}}\right) \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$
$$= 2\pi\mathrm{i}\left(\frac{3\mathrm{i}-6}{6\mathrm{i}}+\frac{-3\mathrm{i}-6}{-6\mathrm{i}}\right) = 2\pi\mathrm{i} \quad \cdots\cdots (1\text{ 分})$$

7. （8 分）【解】

由 $u_x=2x+ay=v_y=-4y+2x$ 可知 $a=-4$. ……………………………(2 分)

由

$$f'(z) = u_x+\mathrm{i}v_x \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$
$$= (-4y+2x)+\mathrm{i}(4x+2y) \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$
$$= (2+4\mathrm{i})z. \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

8. （10 分）【解】

由于 $f(z)$ 的奇点是 $0,2$, 因此 $f(z)$ 在这两个圆环域内都解析.

(1)

$$f(z) = \frac{1}{z}-\frac{1}{z+2} \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$
$$= \frac{1}{z}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{2}} \quad \cdots\cdots (1\text{ 分})$$
$$= \frac{1}{z}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^n \quad \cdots\cdots (1\text{ 分})$$
$$= \frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}z^n = \sum_{n=-1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}z^n. \quad \cdots\cdots (1\text{ 分})$$

(2)

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z} - \frac{1}{z+2} &\cdots\cdots (2\text{ 分}) \\
&= \frac{1}{z} - \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+\dfrac{2}{z}} &\cdots\cdots (1\text{ 分}) \\
&= \frac{1}{z} - \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{z}\right)^n &\cdots\cdots (1\text{ 分}) \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{z^{n+1}} = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-2)^{n-1}}{z^n}. &\cdots\cdots (1\text{ 分})
\end{aligned}
$$

9. （9 分）【解】

设 $\mathscr{L}[y] = Y$, 则

$$\mathscr{L}[y''] = s^2Y - sy(0) - y'(0) = s^2Y - 2, \quad \cdots\cdots (3\text{ 分})$$

因此

$$s^2Y - 2 + 2sY = \mathscr{L}[8\mathrm{e}^{2t}] = \frac{8}{s-2}, \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{2s+4}{(s-2)(s^2+2s)} = \frac{2}{s(s-2)} = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s}, &\cdots\cdots (2\text{ 分}) \\
y(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] - \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = \mathrm{e}^{2t} - 1. &\cdots\cdots (2\text{ 分})
\end{aligned}
$$

10. （3 分）【解】例如

- 列出参数方程 $z = z(t)$ 并将积分表达为 t 的积分形式;
- 单连通区域内解析函数的积分可以用原函数计算;
- 利用柯西-古萨定理;
- 利用复合闭路定理;
- 利用柯西积分公式;
- 利用高阶导数的柯西积分公式;
- 利用留数;
- 利用长大不等式.

2023 年合肥工业大学试卷（A）

2023～2024 学年第一学期　　　　复变函数与积分变换（1400261B）

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. $2^{-\mathrm{i}}$ 的辐角主值是________________.

2. $2023-\mathrm{i}$ 绕 0 逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 后得到的复数是________________.

3. 如果函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z+5)\sin z}$ 可以在圆环域 $0<|z|<R$ 内作洛朗展开, 则 R 的最大值为________________.

4. 设 $f(z)=\mathrm{e}^z-|z|\cos z$, 则 $\oint_{|z|=1} f(z)\,\mathrm{d}z=$________________.

5. 函数 $f(t)=\cos(3t)$ 的傅里叶变换为 $F(\omega)=$________________.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 函数 $f(z)=\dfrac{1}{z}$ 在下面哪个区域内有原函数? (　　)

A. $0<|z|<1$　　B. $\operatorname{Re} z>0$

C. $|z-1|>2$　　D. $|z+1|+|z-1|>4$

2. 设 $f(z)=\oint_{|\zeta|=4}\dfrac{\sin\zeta-\cos\zeta}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta$, 则 $f'(\pi)=$(　　)

A. 0　　B. $2\pi\mathrm{i}$　　C. $-2\pi\mathrm{i}$　　D. $\pi\mathrm{i}$

3. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}z^n$ 的收敛半径是 (　　).

A. 0　　B. $+\infty$　　C. e　　D. 1

4. 下面哪个函数不能作为解析函数的虚部? (　　)

A. $2x+3y$　　B. $2x^2+3y^2$　　C. x^2-xy-y^2　　D. $\mathrm{e}^x\cos y$

5. $z=0$ 是函数 $f(z)=\dfrac{(\mathrm{e}^z-1)^2z^3}{\sin z^8}$ 的 (　　).

A. 一阶极点　　B. 本性奇点　　C. 可去奇点　　D. 三阶极点

三、解答题

1. (6 分) 计算 $(-1+\mathrm{i})^{10}-(-1-\mathrm{i})^{10}$.

2. (6 分) 解方程 $\cos z=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$.

3. (6 分) 设 C 为有向曲线 $z(t) = \sin t + \mathrm{i}t, 0 \leqslant t \leqslant \pi$, 求 $\displaystyle\int_C z\mathrm{e}^z \,\mathrm{d}z$.

4. (10 分) 设 C 为正向圆周 $|z-1| = 4$, 求 $\displaystyle\oint_C \frac{\sin z}{z^2+1} \,\mathrm{d}z$.

5. (10 分) 假设 $u(x,y) = x^3 + ax^2y + bxy^2 - 3y^3$ 是调和函数，求参数 a, b 以及 $v(x,y)$ 使得 $v(0,0) = 0$ 且 $f(z) = u + \mathrm{i}v$ 是解析函数.

6. (10 分) 确定函数 $f(z) = \dfrac{z}{z^2 - 3z + 2}$ 在圆环域

(1) $|z| > 2$;　　　(2) $0 < |z-2| < 1$

内的洛朗级数展开式.

7. (10 分) 设 $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^z}{(z-\pi\mathrm{i})(z-2\pi\mathrm{i})^2}$. 求 $f(z)$ 在有限复平面内的奇点以及 $\displaystyle\oint_{|z|=8} f(z) \,\mathrm{d}z$.

8. (9 分) 用拉普拉斯变换求解微分方程初值问题

$$\begin{cases} y''(t) + 4y(t) = 3\cos t, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 2. \end{cases}$$

9. (3 分) 复变函数 $f(z) = \mathrm{e}^z$ 和实变量函数 $g(x) = \mathrm{e}^x$ 的性质有什么相似和不同之处? 试举出三点.

2023 年合肥工业大学考试参考答案（A）

2023～2024 学年第一学期　　　复变函数与积分变换（1400261B）

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

请将你的答案对应填在横线上：

1. $\underline{\quad -\ln 2 \quad}$, **2.** $\underline{\quad 1+2023\mathrm{i} \quad}$, **3.** $\underline{\quad \pi \quad}$, **4.** $\underline{\quad 0 \quad}$, **5.** $\underline{\quad \pi[\delta(\omega+3)+\delta(\omega-3)] \quad}$.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

请将你所选择的字母 **A, B, C, D** 之一对应填在下列表格里：

题号	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
答案	B	C	C	B	D

三、解答题

1.（**6** 分）【解】由于

$$-1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{3\pi\mathrm{i}}{4}}, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

因此

$$(-1+\mathrm{i})^{10}=32\mathrm{e}^{\frac{30\pi\mathrm{i}}{4}}=-32\mathrm{i}, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})$$

$$(-1-\mathrm{i})^{10}=32\mathrm{e}^{-\frac{30\pi\mathrm{i}}{4}}=32\mathrm{i}, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})$$

故

$$(-1+\mathrm{i})^{10}-(-1-\mathrm{i})^{10}=-64\mathrm{i}. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

也可以直接计算 $(-1+\mathrm{i})^2=-2\mathrm{i}$ 得到 $(-1+\mathrm{i})^{10}=-32\mathrm{i}$.

2.（**6** 分）【解】由

$$\cos z=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})$$

整理得到

$$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}-\frac{3\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+1=0, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}=\frac{1}{2}\Big[\frac{3\sqrt{2}}{2}\pm\sqrt{\Big(\frac{3\sqrt{2}}{2}\Big)^2-4}\Big]=\sqrt{2}\text{ 或}\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

因此

$$iz=\mathrm{Ln}\sqrt{2}=\frac{1}{2}\ln 2+2k\pi\mathrm{i}\text{ 或 }\mathrm{Ln}\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{1}{2}\ln 2+2k\pi\mathrm{i},$$

$$z = 2k\pi \pm \frac{\ln 2}{2}\mathrm{i}, k \in \mathbb{Z}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\ 分)$$

其它解法: 由 $\cos z = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ 得

$$\sin z = \sqrt{1-\cos^2 z} = \pm\frac{\sqrt{2}i}{4}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3\ 分)$$

因此

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i}\sin z = \sqrt{2} \text{ 或} \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\ 分)$$

下同.

3. （6 分）【解】 由于 $z\mathrm{e}^z$ 解析, 且 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (1 分)

$$\int z\mathrm{e}^z \,\mathrm{d}z = (z-1)\mathrm{e}^z + C, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\ 分)$$

而曲线 C 的起点是 0, 终点是 $\pi\mathrm{i}$, 因此

$$\begin{aligned} \int_C z\mathrm{e}^z \,\mathrm{d}z &= (z-1)\mathrm{e}^z\Big|_0^{\pi\mathrm{i}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\ 分) \\ &= (\pi\mathrm{i}-1)\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}} - (-1) = 2 - \pi\mathrm{i}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\ 分) \end{aligned}$$

4. （10 分）【解】 由于 $f(z) = \dfrac{\sin z}{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})}$ 在 $|z-1| \leqslant 4$ 内的奇点为 $\pm i$, 因此 $\cdots$ (2 分)

$$\begin{aligned} \oint_C f(z)\,\mathrm{d}z &= 2\pi\mathrm{i}\big[\mathrm{Res}[f(z), -\mathrm{i}] + \mathrm{Res}[f(z), -2\mathrm{i}]\big] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\ 分) \\ &= 2\pi\mathrm{i}\left[\frac{\sin z}{z+\mathrm{i}}\bigg|_{z=i} + \frac{\sin z}{z-\mathrm{i}}\bigg|_{z=-\mathrm{i}}\right] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\ 分) \\ &= 2\pi\mathrm{i}\left[\frac{\sin i}{2\mathrm{i}} + \frac{\sin(-\mathrm{i})}{-2\mathrm{i}}\right] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\ 分) \\ &= 2\pi\sin i = \pi\mathrm{i}\big(e - \frac{1}{e}\big). \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\ 分) \end{aligned}$$

5. （10 分）【解】 由

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 6x + 2ay + 2bx - 18y = 0$$

可知 $a = 9, b = -3$. 由 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (3 分)

$$\begin{aligned} f'(z) &= u_x - \mathrm{i}u_y \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\ 分) \\ &= (3x^2 + 18xy - 3y^2) - \mathrm{i}(9x^2 - 6xy - 9y^2) \quad \cdots\cdots\cdots (2\ 分) \\ &= (3-9i)(x+\mathrm{i}y)^2 = (3-9i)z^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\ 分) \end{aligned}$$

可知

$$f(z) = (1-3\mathrm{i})z^3 + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\ 分)$$

由 $v(0,0)=0, f(0)=0$ 可知 $C=0$,

$$v=-3x^3+3x^2y+9xy^2-y^3. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})$$

其它解法: 由 $u_x=v_y=3x^2+18xy-3y^2$ 得

$$v=3x^2y+9xy^2-y^3+\psi(x). \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

由 $v_x=-u_y=-(9x^2-6xy-9y^2)$ 得

$$\psi'(x)=-9x^2, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$\psi(x)=-3x^3+C, \quad v=-3x^3+3x^2y+9xy^2-y^3+C. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

由 $v(0,0)=0$ 可知 $C=0$,

$$v=-3x^3+3x^2y+9xy^2-y^3. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})$$

6. （10 分）【解】由于 $f(z)$ 的奇点是 $1,2$, 因此 $f(z)$ 在这两个圆环域内都解析.

(1) 由于

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

因此

$$f(z)=\frac{2}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{z^n}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

(2) 由于

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{1+(z-2)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

因此

$$f(z)=\frac{2}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{2}{z-2}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

7. （10 分）【解】由于 πi 是分母的一阶零点, 因此它是 $f(z)$ 的一阶极点. $\cdots\cdots\cdots$(1 分)
由于 $2\pi i$ 是分母的二阶零点, 因此它是 $f(z)$ 的二阶极点. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(1 分)

$$\operatorname{Res}[f(z),\pi i]=\left.\frac{e^z}{(z-2\pi i)^2}\right|_{z=\pi i}=\frac{1}{\pi^2}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$\operatorname{Res}[f(z),2\pi i]=\left(\frac{e^z}{z-\pi i}\right)'\bigg|_{z=2\pi i} \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$=\frac{e^z(z-\pi i-1)}{(z-\pi i)^2}\bigg|_{z=2\pi i}=\frac{1-\pi i}{\pi^2}, \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$\oint_{|z|=8} f(z)\,dz=2\pi i\big[\operatorname{Res}[f(z),\pi i]+\operatorname{Res}[f(z),2\pi i]\big]=2+\frac{4}{\pi}i. \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

8. （9 分）【解】 设 $\mathscr{L}[y]=Y$, 则

$$\mathscr{L}[y'']=s^2Y-sy(0)-y'(0)=s^2Y-s-2, \quad \cdots\cdots (3\text{ 分})$$

因此

$$s^2Y-s-2+4Y=3\mathscr{L}[\cos t]=\frac{3s}{s^2+1}, \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$Y(s)=\frac{s+2}{s^2+4}+\frac{3s}{(s^2+1)(s^2+4)}=\frac{s^3+2s^2+4s+2}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

$$=\frac{2}{s^2+4}+\frac{s}{s^2+1}, \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2+4}\right]+\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right]=\sin 2t+\cos t. \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

9. （3 分）【解】 例如 (每项 1 分)

- $f'(z)=e^z, g'(x)=e^x$. ······ (1 分)
- e^z 处处可导, e^x 处处可导. ······ (1 分)
- 麦克劳林展开的系数相同. ······ (1 分)
- e^z 无界, e^x 无界. ······ (1 分)
- e^z 是周期的, e^x 不是. ······ (1 分)

2023 年合肥工业大学试卷（B）

2023～2024 学年第一学期　　　复变函数与积分变换（1400261B）

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. $-1-\mathrm{i}$ 的辐角主值是________________.

2. $\dfrac{(1+\mathrm{i})^3}{(1-\mathrm{i})^3}=$________________.

3. 函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z+5)(z-3)}$ 在 $z_0=0$ 处展开的幂级数的收敛半径是____________.

4. 设 $f(z)=\dfrac{1}{(z+\mathrm{i})^{2023}}$, 则 $\displaystyle\oint_{|z|=2} f(z)\,\mathrm{d}z=$________________.

5. 常值函数 $F(\omega)=2$ 的傅里叶逆变换为 $f(t)=$________________.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 区域 $0<\mathrm{Re}\,z<1$ 是 (　)

A. 有界单连通区域　B. 无界单连通区域　C. 有界多连通区域　D. 无界多连通区域

2. 设 $f(z)=\displaystyle\oint_{|\zeta|=2}\frac{\zeta^3+3\zeta}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta$, 则 $f'(\mathrm{i})=$(　)

A. 0　B. 3i　C. $-3\mathrm{i}$　D. 2i

3. 幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{(1+\mathrm{i})^n}$ 的收敛半径是 (　).

A. 0　B. $+\infty$　C. $\sqrt{2}$　D. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

4. 下面哪个函数不是调和函数? (　)

A. $3x-y$　B. x^2-y^2　C. $\ln(x^2+y^2)$　D. $\sin x\cos y$

5. $z=\pi$ 是函数 $f(z)=\dfrac{z-\pi}{(\sin z)^3}$ 的 (　).

A. 一阶极点　B. 本性奇点　C. 可去奇点　D. 二阶极点

三、解答题

1. (6 分) 求 $z=\dfrac{5+\mathrm{i}}{2+3\mathrm{i}}$ 的模和辐角.

2. (6 分) 求 $\mathrm{Ln}(1+\sqrt{3}\mathrm{i})$.

3. (6 分) 设 C 为从 $1+\mathrm{i}$ 到 $1-\mathrm{i}$ 的直线, 求 $\displaystyle\int_C (3z^2+1)\,\mathrm{d}z$.

4. (10 分) 设 C 为正向圆周 $|z+1|=4$, 求 $\displaystyle\oint_C \frac{\sin z+2z}{(z+\pi)^2}\,\mathrm{d}z$.

5. (10 分) 假设 $v(x,y)=x^2+4xy+ay^2$ 是调和函数，求参数 a 以及解析函数 $f(z)=u+\mathrm{i}v$, 使得 v 是 $f(z)$ 的虚部.

6. (10 分) 确定函数 $f(z)=\dfrac{z+1}{(z-1)(z-2)}$ 在圆环域

(1) $|z-1|>1$;　　　(2) $0<|z-2|<1$

内的洛朗级数展开式.

7. (10 分) 设 $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z+2)^2}$. 求 $f(z)$ 在有限复平面内的奇点以及 $\displaystyle\oint_{|z|=3} f(z)\,\mathrm{d}z$.

8. (9 分) 用拉普拉斯变换求解微分方程初值问题

$$\begin{cases} y''(t)-4y(t)=3\mathrm{e}^t, \\ y(0)=0, \quad y'(0)=1. \end{cases}$$

9. (3 分) 谈一谈复变函数在一点处连续、可导与解析之间的联系.

2023 年合肥工业大学考试参考答案（B）

2023～2024 学年第一学期　　　复变函数与积分变换 (1400261B)

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

请将你的答案对应填在横线上：

1. $\underline{\quad -\frac{3}{4}\pi \quad}$, **2.** $\underline{\quad -\mathrm{i} \quad}$, **3.** $\underline{\quad 3 \quad}$, **4.** $\underline{\quad 0 \quad}$, **5.** $\underline{\quad 2\delta(t) \quad}$.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

请将你所选择的字母 A, B, C, D 之一对应填在下列表格里：

题号	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
答案	B	A	C	D	D

三、解答题

1. **（6 分）【解】** 由于

$$z=\frac{5+\mathrm{i}}{2+3\mathrm{i}}=\frac{(5+\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})}{13}=\frac{13-13\mathrm{i}}{13}=1-\mathrm{i}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\ 分)$$

因此

$$|z|=\sqrt{2}, \quad \operatorname{Arg} z=2k\pi-\frac{1}{4}\pi, \quad k\in\mathbb{Z}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (各\ 2\ 分,\ 没有\ k\ 减\ 1\ 分)$$

2. **（6 分）【解】** 由于

$$1+\sqrt{3}\mathrm{i}=2\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{3}}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\ 分)$$

因此

$$\operatorname{Ln}(1+\sqrt{3}\mathrm{i})=\ln 2+\left(2k\pi+\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{i}, k\in\mathbb{Z}. \quad \cdots\cdots\cdots (实部虚部各\ 2\ 分,\ 没有\ k\ 减\ 1\ 分)$$

3. **（6 分）【解】** 由于 $3z^2+1$ 解析, 且 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (1 分)

$$\int(3z^2+1)\,\mathrm{d}z=z^3+z+C, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\ 分)$$

因此

$$\begin{aligned}\int_C(3z^2+1)\,\mathrm{d}z&=(z^3+z)\Big|_{1+\mathrm{i}}^{1-\mathrm{i}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\ 分)\\&=(1-\mathrm{i})^3-(1+\mathrm{i})^3+(1-\mathrm{i})-(1+\mathrm{i})\\&=-6i. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\ 分)\end{aligned}$$

4. （10 分）【解】由于 $f(z)=\dfrac{\sin z+2z}{(z+\pi)^2}$ 在 $|z+1|\leqslant 4$ 内的奇点为 $-\pi$, $\cdots\cdots\cdots$ (2 分)
因此

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}[f(z),-\pi] \quad \cdots\cdots (2 \text{ 分})$$

$$= 2\pi\mathrm{i}(\sin z+2z)'\Big|_{z=-\pi} \quad \cdots\cdots (2 \text{ 分})$$

$$= 2\pi\mathrm{i}[\cos(-\pi)+2] \quad \cdots\cdots (2 \text{ 分})$$

$$= 2\pi\mathrm{i}. \quad \cdots\cdots (2 \text{ 分})$$

5. （10 分）【解】由

$$\Delta v = v_{xx}+v_{yy} = 2+2a = 0 \quad \cdots\cdots (2 \text{ 分})$$

可知 $a=-1$. $\cdots\cdots\cdots$ (1 分)
由

$$f'(z) = v_y + \mathrm{i}v_x \quad \cdots\cdots (2 \text{ 分})$$

$$= (4x-2y)+\mathrm{i}(2x+4y) \quad \cdots\cdots (2 \text{ 分})$$

$$= (4+2\mathrm{i})(x+\mathrm{i}y) = (4+2\mathrm{i})z \quad \cdots\cdots (1 \text{ 分})$$

可知

$$f(z) = (2+\mathrm{i})z^2 + C, \quad C\in\mathbb{R}. \quad \cdots\cdots (2 \text{ 分, 没有 } C \text{ 减一分})$$

其它解法: 由 $u_x = v_y = 4x-2y$ 得

$$u = 2x^2-2xy+\psi(y). \quad \cdots\cdots (2 \text{ 分})$$

由 $u_y = -v_x = -(2x+4y)$ 得

$$\psi'(y) = -4y, \quad \cdots\cdots (2 \text{ 分})$$

$$\psi(y) = -2y^2+C, \quad u = 2x^2-2xy-2y^2+C. \quad \cdots\cdots (2 \text{ 分})$$

$$f(z) = 2x^2-2xy-2y^2+C+\mathrm{i}(x^2+4xy-y^2) = (2+\mathrm{i})z^2+C. \quad \cdots\cdots (1 \text{ 分})$$

6. （10 分）【解】 由于 $f(z)$ 的奇点是 $1, 2$, 因此 $f(z)$ 在这两个圆环域内都解析.

(1) 由于

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{(z-1)-1} = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{1}{z-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z-1)^n}, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\text{ 分})$$

因此

$$f(z) = \frac{3}{z-2} - \frac{2}{z-1} = -\frac{2}{z-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(z-1)^n}. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

(2) 由于

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1+(z-2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-2)^n, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3\text{ 分})$$

因此

$$f(z) = \frac{3}{z-2} - \frac{2}{z-1} = \frac{3}{z-2} - \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n (z-2)^n. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

7. （10 分）【解】 由于 -1 是分母的一阶零点, 因此它们是 $f(z)$ 的一阶极点. $\cdots\cdots$ (1 分)
由于 -2 是分母的二阶零点, 因此它是 $f(z)$ 的二阶极点. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (1 分)

$$\operatorname{Res}[f(z), -1] = \frac{1}{(z+2)^2}\bigg|_{z=-1} = 1, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}[f(z), -2] &= \left(\frac{1}{z+1}\right)'\bigg|_{z=-2} & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分}) \\ &= -\frac{1}{(z+1)^2}\bigg|_{z=-2} = -1, & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分}) \end{aligned}$$

$$\oint_{|z|=3} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\big[\operatorname{Res}[f(z), \pi\mathrm{i}] + \operatorname{Res}[f(z), 2\pi\mathrm{i}]\big] = 0. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

8. （9 分）【解】 设 $\mathscr{L}[y] = Y$, 则

$$\mathscr{L}[y''] = s^2Y - sy(0) - y'(0) = s^2Y - 1, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3\text{ 分})$$

因此

$$s^2Y - 1 - 4Y = 3\mathscr{L}[\mathrm{e}^t] = \frac{3}{s-1}, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s^2-4} + \frac{3}{(s-1)(s^2-4)} = \frac{s+2}{(s-1)(s^2-4)} \\ &= \frac{1}{(s-1)(s-2)} = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-1}, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分}) \\ y(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] - \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] = \mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^t. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分}) \end{aligned}$$

9. （3 分）【解】 言之成理即可。

- 解析蕴含可导，但反过来不对。 ···························· (1 分)
- $f(z)$ 需要在 z_0 的一个邻域内都可导才解析。 ························(1 分)
- 可导蕴含连续，但反过来不对。 ···························· (1 分)

2024 年合肥工业大学试卷（A）

2024～2025 学年第一学期　　　　复变函数与积分变换 (1400261B)

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 $\omega=\dfrac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$, 则 $\omega+\omega^2=$________________.

2. 对数函数主值 $\ln(-\mathrm{i})=$________________.

3. 设 C 为正向圆周 $|z-1|=1$, 则积分 $\oint_C \overline{z}\,\mathrm{d}z=$________________.

4. 函数 $f(z)=\tan z$ 在 $z=\dfrac{\pi}{2}$ 处的留数等于________________.

5. 常值函数 $f(t)=-2$ 的傅里叶变换为 $F(\omega)=$________________.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 集合 $|z-1|\geqslant|z-\mathrm{i}|$ 是 (　　).

A. 有界单连通区域　　B. 无界单连通闭区域
C. 有界多连通区域　　D. 无界多连通闭区域

2. 下面哪个数不是纯虚数?(　　)

A. $\ln(-1)$　　B. $\cos i$　　C. $\sin i$　　D. $\sqrt{-\pi}$ 主值

3. 设有向曲线 $C: z(t)=\sin 2t+2\mathrm{i}\cos t, t\in[0,\pi]$, 则积分 $\int_C z\,\mathrm{d}z$ 等于 (　　)

A. 0　　B. $-2\mathrm{i}$　　C. $-4\mathrm{i}$　　D. $4\mathrm{i}$

4. 函数 $f(z)=\dfrac{z-1}{z^2-z-2}$ 不能在 (　　) 内作洛朗展开.

A. $0<|z|<2$　　B. $2<|z|<4$　　C. $0<|z+1|<2$　　D. $1<|z+1|<3$

5. $z=0$ 是函数 $f(z)=\dfrac{z\sin z^3}{\ln(1-z^4)}$ 的 (　　).

A. 一阶极点　　B. 本性奇点　　C. 可去奇点　　D. 四阶极点

三、解答题

1. (6 分) 设 $z=\sqrt{2}(1-\mathrm{i})$. 计算 z^5.

2. (6 分) 解方程 $\sin z=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

3. (6 分) 设 C 为从 1 到 $1+\mathrm{i}$ 再到 i 的折线段, 求 $\int_C(\mathrm{Re}\,z+\mathrm{Im}\,z)\,\mathrm{d}z$.

4. (10 分) 设 C 为正向圆周 $|z|=2$, 求 $\oint_C \frac{\cos z}{z^2(z+\mathrm{i})}\,\mathrm{d}z$.

5. (10 分) 假设 $v(x,y)=x^2+xy+ay^2-2y$ 是调和函数，求参数 a 以及 $u(x,y)$ 使得 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 是解析函数且满足 $f(0)=0$.

6. (10 分) 确定函数 $f(z)=\dfrac{z-1}{z^2+3z+2}$ 在圆环域

(1) $0<|z|<1$;　　(2) $|z+1|>1$

内的洛朗级数展开式.

7. (10 分) 设 $f(z)=\dfrac{z^2-\pi^2}{z\sin z}$. 求 $f(z)$ 在有限复平面内的奇点和类型, 求出极点的阶, 并计算 $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z$, 其中 C 为正向圆周 $|z-6|=4$.

8. (9 分) 用拉普拉斯变换求解微分方程初值问题

$$\begin{cases} y''(t)-4y(t)=\mathrm{e}^{3t}, \\ y(0)=1, \quad y'(0)=-1. \end{cases}$$

9. (3 分) 复变函数 $f(z)=\sin z$ 和实变量函数 $g(x)=\sin x$ 的性质有什么相似和不同之处? 试举出三点.

2024 年合肥工业大学考试参考答案（A）

2024～2025 学年第一学期　　　　复变函数与积分变换 (1400261B)

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

请将你的答案对应填在横线上：

1. $\underline{\quad -1 \quad}$, **2.** $\underline{\quad -\frac{\pi i}{2} \quad}$, **3.** $\underline{\quad 2\pi i \quad}$, **4.** $\underline{\quad -1 \quad}$, **5.** $\underline{\quad -4\pi\delta(\omega) \quad}$.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

请将你所选择的字母 **A, B, C, D** 之一对应填在下列表格里：

题号	1	2	3	4	5
答案	B	B	A	A	C

三、解答题

1.（6 分）【解】 由于

$$z = 2e^{-\frac{\pi i}{4}}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\ 分)$$

因此

$$z^5 = 2^5 e^{-\frac{5\pi i}{4}} = -16\sqrt{2} + 16\sqrt{2}i. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4\ 分)$$

也可直接计算得到.

2.（6 分）【解】 由

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\ 分)$$

整理得到

$$e^{2iz} - \frac{4\sqrt{3}}{3} i e^{iz} - 1 = 0, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\ 分)$$

$$e^{iz} = \frac{1}{2}\left(\frac{4\sqrt{3}}{3} i \pm \sqrt{\left(\frac{4\sqrt{3}}{3} i\right)^2 + 4}\right) = \sqrt{3}i \text{ 或} \frac{\sqrt{3}}{3} i, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\ 分)$$

因此

$$iz = \mathrm{Ln}(\sqrt{3}i) = \frac{1}{2}\ln 3 + \frac{\pi i}{2} + 2k\pi i \text{ 或} \mathrm{Ln}\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{1}{2}\ln 3 + \frac{\pi i}{2} + 2k\pi i,$$

$$z = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \pm \frac{\ln 3}{2} i, k \in \mathbb{Z}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\ 分)$$

另解：由于

$$\cos z = \sqrt{1 - \sin^2 z} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} i, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\ 分)$$

因此

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z = \sqrt{3}i \text{ 或 } \frac{\sqrt{3}}{3} i. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\ 分)$$

其余相同.

3. **（6 分）【解】**分段计算. ································· (1 分)

第一段 $C_1: z=1+\mathrm{i}t, t\in[0,1]$, $\mathrm{d}z=i\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{Re}\,z+\mathrm{Im}\,z=1+t$, 因此 ················(1 分)

$$\int_{C_1}(\mathrm{Re}\,z+\mathrm{Im}\,z)\,\mathrm{d}z=\int_0^1(1+t)\mathrm{i}\,\mathrm{d}t=\frac{3}{2}\mathrm{i}. \quad \cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})$$

第二段 $C_2: z=1+\mathrm{i}-t, t\in[0,1]$, $\mathrm{d}z=-\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{Re}\,z+\mathrm{Im}\,z=2-t$, 因此 ············(1 分)

$$\int_{C_2}(\mathrm{Re}\,z+\mathrm{Im}\,z)\,\mathrm{d}z=\int_0^1\big(-(2-t)\big)\,\mathrm{d}t=-\frac{3}{2}. \quad \cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})$$

因此

$$\int_{C}(\mathrm{Re}\,z+\mathrm{Im}\,z)\,\mathrm{d}z=-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i. \quad \cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})$$

4. **（10 分）【解】** $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^2(z+\mathrm{i})}$ 在 $|z|\leqslant 2$ 内的奇点为 $0,-\mathrm{i}$. ················(2 分)

$$\mathrm{Res}[f,0]=\left(\frac{\cos z}{z+\mathrm{i}}\right)'\bigg|_{z=0}=\frac{-(z+\mathrm{i})\sin z-\cos z}{(z+\mathrm{i})^2}\bigg|_{z=0}=1, \quad \cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$\mathrm{Res}[f,-\mathrm{i}]=\frac{\cos z}{z^2}\bigg|_{z=-\mathrm{i}}=-\cos i. \quad \cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

故

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z&=2\pi\mathrm{i}\big[\mathrm{Res}[f(z),0]+\mathrm{Res}[f(z),-\mathrm{i}]\big] && \cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})\\&=2\pi\mathrm{i}(1-\cos i) && \cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})\\&=(2-e-\frac{1}{e})\pi\mathrm{i}. && \cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})\end{aligned}$$

5. **（10 分）【解】**由

$$\Delta v=v_{xx}+v_{yy}=2+2a=0$$

可知 $a=-1$. 由 ····································· (3 分)

$$\begin{aligned}f'(z)&=v_y+\mathrm{i}v_x && \cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})\\&=(x-2y-2)+\mathrm{i}(2x+y) && \cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})\\&=(1+2\mathrm{i})(x+y\mathrm{i})-2=(1+2\mathrm{i})z-2 && \cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})\end{aligned}$$

可知

$$f(z)=\frac{1+2\mathrm{i}}{2}z^2-2z+C,\quad C\in\mathbb{R}. \quad \cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})$$

由 $f(0)=0$ 可知 $C=0$,

$$u=\frac{x^2-y^2}{2}-2xy-2x. \quad \cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})$$

其它解法: 由 $u_x = v_y = x - 2y - 2$ 得

$$u = \frac{1}{2}x^2 - 2xy - 2x + \psi(y). \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2 \text{ 分})$$

由 $u_y = -v_x = -(2x+y)$ 得

$$\psi'(x) = -y, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2 \text{ 分})$$

$$\psi(x) = -\frac{1}{2}y^2 + C, \quad u = \frac{1}{2}x^2 - 2xy - 2x - \frac{1}{2}y^2 + C. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2 \text{ 分})$$

由 $f(0) = 0$ 可知 $C = 0$,

$$u = \frac{1}{2}x^2 - 2xy - 2x - \frac{1}{2}y^2. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1 \text{ 分})$$

6. （10 分）【解】由于 $f(z)$ 的奇点是 $-1, -2$, 因此 $f(z)$ 在这两个圆环域内都解析.

(1) 由于

$$\frac{1}{z+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2 \text{ 分})$$

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2 \text{ 分})$$

因此

$$f(z) = \frac{3}{z+2} - \frac{2}{z+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\Big(\frac{3}{2^{n+1}} - 2\Big)z^n. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2 \text{ 分})$$

(2) 由于

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z+1} \cdot \frac{1}{1+\dfrac{1}{z+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(z+1)^n}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2 \text{ 分})$$

因此

$$f(z) = \frac{3}{z+2} - \frac{2}{z+1} = 3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(z+1)^n} - \frac{2}{z+1} = \frac{1}{z+1} + 3\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(z+1)^n}. \quad \cdots\cdots (2 \text{ 分})$$

7. （10 分）【解】由于 0 是分母的二阶零点, 因此它是 $f(z)$ 的二阶极点. $\cdots\cdots\cdots$ (1 分)

由于 $\pm\pi$ 是分子分母的一阶零点, 因此它是 $f(z)$ 的可去极点. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (1 分)

对于整数 $k \neq 0, \pm 1$, $k\pi$ 是分母的一阶零点, 因此它是 $f(z)$ 的一阶极点. $\cdots\cdots\cdots\cdots$ (1 分)

$$\mathrm{Res}[f(z), \pi] = 0, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1 \text{ 分})$$

$$\mathrm{Res}[f(z), 2\pi] = \frac{z^2 - \pi^2}{\sin z + z\cos z}\bigg|_{z=2\pi} = \frac{3}{2}\pi, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2 \text{ 分})$$

$$\mathrm{Res}[f(z), 3\pi] = \frac{z^2 - \pi^2}{\sin z + z\cos z}\bigg|_{z=3\pi} = -\frac{8}{3}\pi, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2 \text{ 分})$$

$$\oint_{|z-6|=4} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\Big[\mathrm{Res}[f(z),\pi] + \mathrm{Res}[f(z),2\pi] + \mathrm{Res}[f(z),3\pi]\Big] = -\frac{7}{3}\pi^2 i. \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

8. **（9 分）【解】** 设 $\mathscr{L}[y] = Y$, 则

$$\mathscr{L}[y''] = s^2Y - sy(0) - y'(0) = s^2Y - s + 1, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3\text{ 分})$$

因此

$$s^2Y - s + 1 - 4Y = \mathscr{L}[\mathrm{e}^{3t}] = \frac{1}{s-3}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s^2-4}\Big(s - 1 + \frac{1}{s-3}\Big) \\ &= \frac{s-2}{(s+2)(s-3)} = \frac{1}{5}\Big(\frac{1}{s-3} + \frac{4}{s+2}\Big), \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分}) \\ y(t) &= \mathscr{L}^{-1}\Big[\frac{1}{5}\Big(\frac{1}{s-3} + \frac{4}{s+2}\Big)\Big] = \frac{1}{5}\mathrm{e}^{3t} + \frac{4}{5}\mathrm{e}^{-2t}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分}) \end{aligned}$$

9. **（3 分）【解】** 每项 1 分, 例如

- 导数形式相同;
- 一个有界一个无界;
- 都是奇函数;
- 麦克劳林展开的系数相同;
- 都是处处可导;
- 都是周期函数.

2024 年合肥工业大学试卷（B）

2024~2025 学年第一学期　　　　复变函数与积分变换（1400261B）

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 $z=1+\mathrm{i}$, 则 $1+z+z^2=$________________.

2. 复数 $1-\mathrm{i}$ 的辐角主值 $\arg(1-\mathrm{i})=$________________.

3. 函数 $f(z)=\dfrac{z}{\sin z}$ 在 $|z|<4$ 内有________________个奇点.

4. 积分 $\displaystyle\oint_{|z|=1}(u+\mathrm{i}v)\,\mathrm{d}z=$________________, 其中 $v(x,y)$ 是 $u(x,y)$ 在整个复平面内的共轭调和函数.

5. 函数 $f(t)=\delta(t-1)$ 的傅里叶变换为 $F(\omega)=$________________.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 集合 $0<|z|<1$ 是 (　).

A. 有界单连通区域　　B. 无界单连通闭区域
C. 有界多连通区域　　D. 无界多连通闭区域

2. 若 z 是实数, 下面哪个选项未必成立?(　)

A. $z=\overline{z}$　　B. $\operatorname{Im} z=0$　　C. $\arg z=0$　　D. z 在实轴上

3. 若 z_1,z_2 是非零复数, 下面哪个等式未必成立?(　)

A. $\operatorname{Arg}(z_1z_2)=\operatorname{Arg} z_1+\operatorname{Arg} z_2$　　B. $\operatorname{Ln}(z_1z_2)=\operatorname{Ln} z_1+\operatorname{Ln} z_2$
C. $|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$　　D. $\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2$

4. 下面哪个函数在 $z=0$ 处解析?(　)

A. $x^2+y^2\mathrm{i}$　　B. $x-y\mathrm{i}$　　C. $\dfrac{1}{z}$　　D. $y-x\mathrm{i}$

5. 函数 $f(z)=\dfrac{z+1}{z^2+z-2}$ 不能在 (　) 内作泰勒展开.

A. $|z|<1$　　B. $|z+1|<1$　　C. $|z-1|<1$　　D. $|z+\mathrm{i}|<1$

三、解答题

1. (6 分) 设 $z=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$. 计算 z^5.

2. (6 分) 解方程 $\cos z=\dfrac{5}{4}$.

3. **(6 分)** 设 C 为从 1 到 $1+\mathrm{i}$ 再到 i 的折线段, 求 $\displaystyle\int_C (\operatorname{Re} z + \mathrm{i}\operatorname{Im} z)\,\mathrm{d}z$.

4. **(10 分)** 设 C 为正向圆周 $|z|=4$, 求 $\displaystyle\oint_C \frac{\mathrm{e}^z}{z(z-\pi\mathrm{i})^2}\,\mathrm{d}z$.

5. **(10 分)** 假设 $v(x,y) = x^2+ay^2+x+y$ 是调和函数，求参数 a 以及 $u(x,y)$ 使得 $f(z)=u+iv$ 是解析函数且满足 $f(0)=0$.

6. **(10 分)** 确定函数 $f(z)=\dfrac{z^2}{z^2-3z+2}$ 在圆环域

(1) $0<|z|<1$; (2) $|z|>2$

内的洛朗级数展开式.

7. **(10 分)** 设 $f(z)=\dfrac{z+\cos z}{z(z-\pi)(z+\pi)}$. 求 $f(z)$ 在有限复平面内的奇点和类型, 求出极点的阶, 并计算 $\displaystyle\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z$, 其中 C 为正向圆周 $|z|=4$.

8. **(9 分)** 用拉普拉斯变换求解微分方程初值问题

$$\begin{cases} y''(t)+4y(t)=3\cos t, \\ y(0)=2, \quad y'(0)=0. \end{cases}$$

9. **(3 分)** 留数有哪些应用? 试举出三点.

2024 年合肥工业大学考试参考答案（B）

2024～2025 学年第一学期　　　　复变函数与积分变换（1400261B）

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

请将你的答案对应填在横线上：

1. $\underline{\quad 2+3\mathrm{i} \quad}$, **2.** $\underline{\quad -\frac{\pi}{4} \quad}$, **3.** $\underline{\quad 3 \quad}$, **4.** $\underline{\quad 0 \quad}$, **5.** $\underline{\quad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega} \quad}$.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

请将你所选择的字母 **A, B, C, D** 之一对应填在下列表格里：

题号	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
答案	C	C	D	D	C

三、解答题

1. （**6** 分）【解】由于

$$z = 2\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{3}}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

因此

$$z^5 = 2^5\mathrm{e}^{\frac{5\pi\mathrm{i}}{3}} = 16 - 16\sqrt{3}\mathrm{i}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4\text{ 分})$$

也可直接计算得到.

2. （**6** 分）【解】由

$$\cos z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2} = \frac{5}{4}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})$$

整理得到

$$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} - \frac{5}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + 1 = 0, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = 2 \text{ 或} \frac{1}{2}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

因此

$$\mathrm{i}z = \mathrm{Ln}\,2 = 2k\pi\mathrm{i} + \ln 2 \text{ 或} \,\mathrm{Ln}\,\frac{1}{2} = 2k\pi\mathrm{i} - \ln 2,$$

$$z = 2k\pi \pm \mathrm{i}\ln 2, k \in \mathbb{Z}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})$$

另解: 由于

$$\sin z = \sqrt{1 - \cos^2 z} = \pm\frac{3}{4}\mathrm{i}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

因此

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i}\sin z = 2 \text{ 或 } \frac{1}{2}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3\text{ 分})$$

其余相同.

3. **（6 分）【解】** 由于 $f(z)=\mathrm{Re}\,z+\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,z=z$ 处处解析, 因此 $\cdots\cdots\cdots\cdots$(2 分)

$$\int_C(\mathrm{Re}\,z+\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,z)\,\mathrm{d}z=\int_C z\,\mathrm{d}z=\frac{z^2}{2}\Big|_1^{\mathrm{i}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

$$=-1. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

也可以写出两段参数方程分别计算再相加.

4. **（10 分）【解】** $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^z}{z(z-\pi\mathrm{i})^2}$ 在 $|z|\leqslant 4$ 内的奇点为 $0,\pi\mathrm{i}$. $\cdots\cdots\cdots\cdots$(2 分)

$$\mathrm{Res}[f,0]=\frac{\mathrm{e}^z}{(z-\pi\mathrm{i})^2}\Big|_{z=0}=-\frac{1}{\pi^2}. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

$$\mathrm{Res}[f,\pi\mathrm{i}]=\left(\frac{\mathrm{e}^z}{z}\right)'\Big|_{z=\pi\mathrm{i}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1\text{ 分})$$

$$=\frac{\mathrm{e}^z(z-1)}{z^2}\Big|_{z=\pi\mathrm{i}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1\text{ 分})$$

$$=\frac{\pi\mathrm{i}-1}{\pi^2}, \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1\text{ 分})$$

故

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\big[\mathrm{Res}[f(z),0]+\mathrm{Res}[f(z),-\pi\mathrm{i}]\big] \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

$$=-2-\frac{4}{\pi}\mathrm{i}. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1\text{ 分})$$

5. **（10 分）【解】** 由

$$\Delta v=v_{xx}+v_{yy}=2+2a=0$$

可知 $a=-1$. 由 $\cdots\cdots\cdots\cdots$(3 分)

$$f'(z)=v_y+\mathrm{i}v_x \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

$$=(-2y+1)+\mathrm{i}(2x+1) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

$$=2\mathrm{i}(x+yi)+1+\mathrm{i}=2\mathrm{i}z+1+\mathrm{i} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1\text{ 分})$$

可知

$$f(z)=\mathrm{i}z^2+(1+\mathrm{i})z+C, C\in\mathbb{R}. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1\text{ 分})$$

由 $f(0)=0$ 可知 $C=0$,

$$u=-2xy+x-y. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1\text{ 分})$$

其它解法: 由 $u_x=v_y=-2y+1$ 得

$$u=-2xy+x+\psi(y). \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

由 $u_y=-v_x=-(2x+1)$ 得

$$\psi'(y)=-1, \quad \cdots\cdots(2\text{ 分})$$

$$\psi(y)=-y+C, \quad u=-2xy+x-y+C. \quad \cdots\cdots(2\text{ 分})$$

由 $f(0)=0$ 可知 $C=0$,

$$u=-2xy+x-y. \quad \cdots\cdots(1\text{ 分})$$

6. （10 分）【解】由于 $f(z)$ 的奇点是 $1,2$, 因此 $f(z)$ 在这两个圆环域内都解析.

(1) 由于

$$\frac{1}{z-1}=-\sum_{n=0}^{\infty}z^n, \quad \cdots\cdots(2\text{ 分})$$

$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}z^n, \quad \cdots\cdots(2\text{ 分})$$

因此

$$f(z)=1+\frac{4}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\sum_{n=2}^{\infty}\Big(1-\frac{1}{2^{n-1}}\Big)z^n. \quad \cdots\cdots(1\text{ 分})$$

n 从 1 开始也对.

(2) 由于

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}, \quad \cdots\cdots(2\text{ 分})$$

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n}, \quad \cdots\cdots(2\text{ 分})$$

因此

$$f(z)=1+\frac{4}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}-1}{z^n}. \quad \cdots\cdots(1\text{ 分})$$

7. （10 分）【解】 $0,\pi,-\pi$ 是 $f(z)$ 的一阶极点. $\cdots\cdots(2\text{ 分})$

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=\frac{z+\cos z}{(z-\pi)(z+\pi)}\Big|_{z=0}=-\frac{1}{\pi^2}, \quad \cdots\cdots(2\text{ 分})$$

$$\mathrm{Res}[f(z),\pi]=\frac{z+\cos z}{z(z+\pi)}\Big|_{z=\pi}=\frac{\pi-1}{2\pi^2}, \quad \cdots\cdots(2\text{ 分})$$

$$\mathrm{Res}[f(z),-\pi]=\frac{z+\cos z}{z(z-\pi)}\Big|_{z=-\pi}=\frac{-\pi-1}{2\pi^2}, \quad \cdots\cdots(2\text{ 分})$$

$$\oint_{|z|=4}f(z)\,\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\Big[\mathrm{Res}[f(z),0]+\mathrm{Res}[f(z),\pi]+\mathrm{Res}[f(z),-\pi]\Big]=-\frac{4\mathrm{i}}{\pi}. \quad \cdots\cdots(2\text{ 分})$$

8. **(9 分)【解】** 设 $\mathscr{L}[y]=Y$, 则

$$\mathscr{L}[y'']=s^2Y-sy(0)-y'(0)=s^2Y-2s, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3\text{ 分})$$

因此

$$s^2Y-2s+4Y=3\mathscr{L}[\cos t]=\frac{3s}{s^2+1}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

$$\begin{aligned}
Y(s)&=\frac{2s^3+5s}{(s^2+1)(s^2+4)}\\
&=\frac{s}{s^2+1}+\frac{s}{s^2+4}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})\\
y(t)&=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}+\frac{s}{s^2+4}\right]=\cos t+\cos 2t. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})
\end{aligned}$$

9. **(3 分)【解】** 每项 1 分, 例如

- 用于计算复变函数积分;
- 用于计算广义函数积分;
- 用于计算三角函数的有理函数在 0 到 2π 的积分;
- 用于计算级数;
- 用于计算拉普拉斯逆变换.

2025 年合肥工业大学试卷（A）

2025~2026 学年第一学期　　复变函数与积分变换（1400261B）

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 计算 $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)^{2025}=$________________.

2. 复数幂 $(-\mathrm{i})^{2\sqrt{2}}$ 的模等于________________.

3. 设 C 为正向圆周 $|z|=2$, 则积分 $\displaystyle\oint_C\left(\overline{z}-\frac{1}{z}\right)\mathrm{d}z=$________________.

4. 函数 $f(z)=\dfrac{\cos z}{z-3}$ 在 $z=\mathrm{i}$ 处泰勒展开等式成立的最大圆域半径为________________.

5. 函数 $f(t)=\sin 4t$ 的拉普拉斯变换为 $F(s)=$________________.

二、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 设 z,z_1,z_2 是非零复数. 下列等式**未必成立**的是 (　　).

A. $|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$　　B. $\arg\dfrac{1}{z}=-\arg z$

C. $\mathrm{Ln}(z_1z_2)=\mathrm{Ln}\,z_1+\mathrm{Ln}\,z_2$　　D. $\cos^2 z+\sin^2 z=1$

2. 集合 $\left|\dfrac{z-3}{z+3}\right|<2$ 是 (　　).

A. 有界单连通闭区域　　B. 无界单连通区域

C. 有界多连通闭区域　　D. 无界多连通区域

3. 若 $f(z)$ 是区域 D 内的解析函数, 以下命题**一定成立**的是 (　　).

A. $f(z)$ 在区域 D 内的积分只和起点终点有关, 与路径无关

B. $f(z)$ 在区域 D 内闭路上的积分总是零

C. $f(z)$ 在区域 D 内存在原函数

D. $f'(z)$ 是区域 D 内的解析函数

4. 下面哪个函数不能在相应区域展开成双边幂级数? (　　)

A. $\dfrac{1}{z^2+1},\ 1<|z-\mathrm{i}|<2$　　B. $\dfrac{\ln(z+1)}{z},\ 0<|z|<1$

C. $\sqrt{z}$ 的主值, $|z-1|>1$　　D. $\sin z,\ 0<|z-\pi|<\pi$

5. 以下哪个函数不存在傅里叶变换? (　　)

A. $f(t)=\mathrm{e}^t$　　B. $f(t)=1$　　C. $f(t)=\cos t$　　D. $f(t)=\sin t$

三、解答题（共 60 分）

1. (5 分) 设 $z=1-\mathrm{i}$. 计算 $1+z+z^2+z^3+z^4+z^5$.

2. (5 分) 解方程 $\sin z=\dfrac{3\mathrm{i}}{4}$.

3. (5 分) 设 C 为从 1 沿着单位圆 $|z|=1$ 逆时针旋转到 i 的圆弧, 求 $\displaystyle\int_C \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z$.

4. (5 分) 确定函数 $f(z)=\dfrac{3z}{z^2-z-2}$ 在圆环域 $1<|z|<2$ 内的洛朗级数展开式.

5. (5 分) 设 $f(x)$ 是一个有理函数, 分母没有非负实根, 且分母至少比分子高 2 次, 则

$$\int_0^{+\infty} f(x)\ln x\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\sum_a \operatorname{Res}\big[\ln^2(-z)f(z),a\big],$$

其中 a 取遍 $f(z)$ 的奇点. 利用上述结论计算积分 $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x$.

6. (5 分) 已知

- $f(t)=\dfrac{1}{t^2+a^2}$ 的傅里叶变换为 $F(\omega)=\mathrm{e}^{-2a\pi|\omega|}$;
- 若 $\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)$, 则 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega$.

利用上述结论计算积分 $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^2}$.

7. (10 分) 假设 $u(x,y)=3x^2+2xy+ay^2$ 是调和函数，求参数 a 以及 $v(x,y)$ 使得 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 是解析函数且满足 $f(0)=0$.

8. (10 分) 设 $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^4-1}$. 求 $f(z)$ 在有限复平面内的奇点和类型, 求出极点的阶, 并计算 $\displaystyle\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z$, 其中 C 为连接 $\dfrac{1}{2}\pm 2\mathrm{i},-\dfrac{1}{2}\pm 2\mathrm{i}$ 的正向矩形闭路.

9. (10 分) 用拉普拉斯变换求解微分方程初值问题

$$\begin{cases} y''(t)+2y'(t)=-2\mathrm{e}^{-2t}, \\ y(0)=1, \quad y'(0)=-1. \end{cases}$$

2025 年合肥工业大学考试参考答案（A）

2025～2026 学年第一学期　　　复变函数与积分变换（1400261B）

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

请将你的答案对应填在横线上：

1. $\underline{\quad -1 \quad}$, **2.** $\underline{\quad 1 \quad}$, **3.** $\underline{\quad 6\pi \mathrm{i} \quad}$, **4.** $\underline{\quad \sqrt{10} \quad}$, **5.** $\underline{\quad \dfrac{4}{s^2+16} \quad}$.

二、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

请将你所选择的字母 A, B, C, D 之一对应填在下列表格里：

题号	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
答案	B	D	D	C	A

三、解答题（共 60 分）

1. （5 分）【解】由于

$$z = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi \mathrm{i}}{4}}. \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

因此

$$\begin{aligned} 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 &= \frac{1 - z^6}{1 - z} \quad \cdots\cdots (2\text{ 分}) \\ &= \frac{1}{\mathrm{i}} \cdot \left(1 - 8\mathrm{e}^{-\frac{6\pi \mathrm{i}}{4}}\right) = -8 - \mathrm{i}. \quad \cdots\cdots (1\text{ 分}) \end{aligned}$$

也可直接计算得到.

2. （5 分）【解】由

$$\sin z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} = \frac{3\mathrm{i}}{4}, \quad \cdots\cdots (1\text{ 分})$$

整理得到

$$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} + \frac{3}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - 1 = 0, \quad \cdots\cdots (1\text{ 分})$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = -2 \text{ 或 } \frac{1}{2}, \quad \cdots\cdots (1\text{ 分})$$

因此

$$\mathrm{i}z = \mathrm{Ln}(-2) = \ln 2 + (2k+1)\pi \mathrm{i} \text{ 或 } \mathrm{Ln}\frac{1}{2} = -\ln 2 + 2k\pi \mathrm{i}, \quad \cdots\cdots (1\text{ 分})$$

$$z = (2k+1)\pi - \mathrm{i}\ln 2 \text{ 或 } 2k\pi + \mathrm{i}\ln 2, k \in \mathbb{Z}. \quad \cdots\cdots (1\text{ 分})$$

另解: 由于

$$\cos z = \sqrt{1 - \sin^2 z} = \pm\frac{5}{4}, \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

因此

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i}\sin z = -2 \text{ 或 } \frac{1}{2}, \quad \cdots\cdots (1\text{ 分})$$

其余相同.

3. （**5 分**）【**解**】曲线 C 的参数方程为 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\theta\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$, ························ (2 分)

于是 $\mathrm{d}z=\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta$. 因此 ·· (1 分)

$$\int_C \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\cdot \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta=\mathrm{i}\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta=\frac{\pi\mathrm{i}}{2}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

4. （**5 分**）【**解**】由于 $f(z)$ 的奇点是 $-1,2$, 因此 $f(z)$ 在 $1<|z|<2$ 内解析. 我们有

$$f(z)=\frac{2}{z-2}+\frac{1}{z+1}.$$

由于

$$\frac{2}{z-2}=-\frac{1}{1-\dfrac{z}{2}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{1}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^n}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

因此

$$f(z)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}=\cdots+\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}-1-\frac{z}{2}-\frac{z^2}{4}-\cdots. \quad \cdots\cdots (1\text{ 分})$$

5. （**5 分**）【**解**】注意到 $\dfrac{1}{(z+2)^2}$ 的奇点为 -2, 且 ································ (1 分)

$$\operatorname{Res}\left[\frac{\ln^2(-z)}{(z+2)^2},-2\right]=\left[\ln^2(-z)\right]'\Big|_{z=-2}=\frac{2\ln(-z)}{z}\Big|_{z=-2}=-\ln 2. \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

因此

$$I=-\frac{1}{2}\operatorname{Res}\left[\frac{\ln^2(-z)}{(z+2)^2},-2\right]=\frac{\ln 2}{2}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

6. （**5 分**）【**解**】

$$\begin{aligned}
I&=\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega &&\cdots\cdots (1\text{ 分})\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\mathrm{e}^{-2a\pi|\omega|}\right|^2\mathrm{d}\omega &&\cdots\cdots (1\text{ 分})\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-4a\pi|\omega|}\,\mathrm{d}\omega &&\cdots\cdots (1\text{ 分})\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-4a\pi\omega}\,\mathrm{d}\omega &&\cdots\cdots (1\text{ 分})\\
&=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{4a\pi}=\frac{1}{4a\pi^2}. &&\cdots\cdots (1\text{ 分})
\end{aligned}$$

7.（10 分）【解】我们有 $u_x = 6x + 2y, u_y = 2x + 2ay.$ ························ (1 分)
由

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 6 + 2a = 0$$

可知 $a = -3$. 由 ·· (2 分)

$$\begin{aligned} f'(z) &= u_x - \mathrm{i}u_y & \cdots\cdots (2 \text{ 分}) \\ &= (6x + 2y) - \mathrm{i}(2x - 6y) & \cdots\cdots (2 \text{ 分}) \\ &= (6 - 2\mathrm{i})(x + y\mathrm{i}) = (6 - 2\mathrm{i})z & \cdots\cdots (1 \text{ 分}) \end{aligned}$$

可知

$$f(z) = (3 - \mathrm{i})z^2 + C, C \in \mathbb{R}. \quad \cdots\cdots (1 \text{ 分})$$

由 $f(0) = 0$ 可知 $C = 0$, $v = -x^2 + y^2 + 6xy.$ ··· (1 分)

另解: 前面的相同. 由 $v_x = -u_y = -2x + 6y$ 得

$$v = -x^2 + 6xy + \psi(y). \quad \cdots\cdots (2 \text{ 分})$$

由 $v_y = u_x = 6x + 2y$ 得

$$\psi'(y) = 2y, \quad \cdots\cdots (2 \text{ 分})$$

$$\psi(y) = y^2 + C, \quad v = -x^2 + 6xy + y^2 + C. \quad \cdots\cdots (2 \text{ 分})$$

由 $f(0) = 0$ 可知 $C = 0$, $v = -x^2 + y^2 + 6xy.$ ··· (1 分)

8.（10 分）【解】由 $z^4 - 1 = 0$ 可知 $f(z)$ 的奇点为 $\pm 1, \pm \mathrm{i}$, ···················· (2 分)
且它们都是 $f(z)$ 的一阶极点. ··· (2 分)

$$\mathrm{Res}[f(z), \mathrm{i}] = \left.\frac{\sin z}{(z^4 - 1)'}\right|_{z=\mathrm{i}} = \left.\frac{\sin z}{4z^3}\right|_{z=\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}\sin\mathrm{i}}{4} = \frac{\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}}{8}, \quad \cdots\cdots (2 \text{ 分})$$

$$\mathrm{Res}[f(z), -\mathrm{i}] = \left.\frac{\sin z}{(z^4 - 1)'}\right|_{z=-\mathrm{i}} = \left.\frac{\sin z}{4z^3}\right|_{z=-\mathrm{i}} = -\frac{\mathrm{i}\sin(-\mathrm{i})}{4} = \frac{\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}}{8}, \quad \cdots\cdots (2 \text{ 分})$$

由于 C 内部的奇点为 $\pm\mathrm{i}$, 因此

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\Big[\mathrm{Res}[f(z), \mathrm{i}] + \mathrm{Res}[f(z), -\mathrm{i}]\Big] = \frac{(\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e})\pi\mathrm{i}}{2}. \quad \cdots\cdots (2 \text{ 分})$$

9.（10 分）【解】设 $\mathscr{L}[y] = Y$, 则

$$\mathscr{L}[y'] = sY - y(0) = sY - 1, \quad \cdots\cdots (2 \text{ 分})$$

$$\mathscr{L}[y''] = s^2Y - sy(0) - y'(0) = s^2Y - s + 1, \quad \cdots\cdots (2 \text{ 分})$$

因此

$$(s^2+2s)Y-s-1=-\frac{2}{s+2}, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s^2+2s}\left(s+1-\frac{2}{s+2}\right)=\frac{s+3}{(s+2)^2} \\ &= \frac{1}{s+2}+\frac{1}{(s+2)^2}, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分}) \\ y(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}+\frac{1}{(s+2)^2}\right]=(1+t)\mathrm{e}^{-2t}. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分}) \end{aligned}$$