复变函数与积分变换

张神星 (合肥工业大学)

办公室: 翡翠科教楼 *B1810* 东

Email: zhangshenxing@hfut.edu.cn

课件地址: https://faculty.hfut.edu.cn/zhangshenxing

第一节　复习课

- 复数的运算
- 解析理论
- 积分理论
- 级数理论
- 积分变换
- 在积分和级数中的应用

复数代数运算

- 复数的四则运算, 求实部 $\operatorname{Re} z$, 虚部 $\operatorname{Im} z$, 模 $|z|$.
- 复数的辐角主值 $\arg z$:
  (1) 当 z 在一四象限时, 辐角主值为 $\arctan \dfrac{y}{x}$;
  (2) 当 z 在第二象限时, 辐角主值为 $\arctan \dfrac{y}{x} + \pi$;
  (3) 当 z 在第三象限时, 辐角主值为 $\arctan \dfrac{y}{x} - \pi$.
- 复数的辐角 $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- 共轭复数和模的有关等式和不等式.

复数的三角/指数形式

- 复数的三角/指数形式主要是要求它的模和辐角.
- 复数的乘法, 除法, 乘幂的计算.
- 以下等式成立 (Arg 可以换成 Ln)

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2, \quad \operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2,$$

$$\operatorname{Arg} \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \operatorname{Arg} z, \quad \operatorname{Arg} \frac{1}{z} = \operatorname{Arg} \overline{z} = -\operatorname{Arg} z.$$

- 以下等式未必成立

$$\operatorname{Arg} z^n = n \operatorname{Arg} z.$$

上述等式中 $\operatorname{Arg} z$ 换成 $\arg$ 或 $\ln$ 都不成立.

- 圆 $|z-z_0|=r$ 或 $z=z_0+re^{i\theta},\theta\in[0,2\pi]$.
- 椭圆 $|z-z_1|+|z-z_2|=2a>|z_1-z_2|$.
- 双曲线 $||z-z_1|-|z-z_2||=2a<|z_1-z_2|$.
- 直线 $ax+by+c=0$ 或 $z=z_0+z_1t,t\in\mathbb{R}$.
- 射线 $\arg z=\theta$.
- 区域是连通的开集, 闭区域是区域和它的边界.
- 有界/无界, 单连通/多连通的判断.
- 注意复平面去掉负实轴和零是单连通的.

- 集合在映照下的像.
- 数列的极限: 实部虚部数列都收敛. 若 $|z| \to 0$ 则 $z \to 0$.
- 函数的极限: 会证明特定函数极限不存在, 例如 $f(z) = \dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|}, z \to 0$.
- 会计算函数的导数.
- 可导蕴含连续.
- 可导与解析的差别: 解析要求在一个邻域内都可导.
- 开集内处处可导和解析等价.

- $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 在 z_0 可导等价于 u,v 均可微且满足 C-R 方程:

$$u_x=v_y,\quad u_y=-v_x.$$

- $f'(z)=u_x+\mathrm{i}v_x$.
- 会计算函数的可导点和解析区域.

练习. 求 $f(z)=3x^2-y^2+2xy\mathrm{i}$ 的可导点和解析点.

答案. 可导点为 $\operatorname{Re} z=0$, 没有解析点.

初等函数

- 指数函数 $\exp z = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$.
- 指数函数的周期性, 解析性: 处处解析, 导数 $(\exp z)' = \exp z$.
- 对数函数 $\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\, z$ 和主值 $\ln z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z$ 的计算.
- 主值的解析性: 去掉负实轴和 0 后解析, 导数 $(\ln z)' = \dfrac{1}{z}$.
- 幂函数 $z^a = \exp(a\,\mathrm{Ln}\, z)$ 的计算, 主值 $\exp(a\ln z)$ 的计算.
- 主值的解析性: 去掉负实轴和 0 后解析, 导数 $(z^a)' = az^{a-1}$.
- 三角函数的定义

$$\cos z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}, \quad \sin z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}.$$

- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i}\sin z$.
- 无界性, 处处解析, 其它性质和实情形类似.
- 反三角函数的计算: 化成指数函数和对数函数来计算.

- 若 $f(z)$ 有原函数 (例如在单连通区域 D 内解析),
$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,\mathrm{d}z = F(z_2) - F(z_1), \quad F(z) = \int f(z)\,\mathrm{d}z.$$
- 若 $f(z)$ 在闭路 C 内只有奇点 $z_1, \dots, z_n$, 则
$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z), z_k].$$
若 C 是圆周, $f(z)$ 中的 $\bar{z}, |z|$ 可以换成 z 的形式用此法计算.
- 一般情形: 曲线 $C : z = z(t), a \leqslant t \leqslant b$, 则
$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f\big[z(t)\big] z'(t)\,\mathrm{d}t.$$
- 会求原函数: 分部积分, 凑微分等.

练习. 三类积分题, 自己多翻书.

- 柯西古萨定理: 若 $f(z)$ 在闭路 C 及其内部解析, 则 $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.
- 复合闭路定理: 若 $f(z)$ 在复合闭路 $C = C_0 + C_1^- + \cdots + C_n^-$ 及其围成的多连通区域内解析, 则 $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$, 即

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \cdots + \oint_{C_n} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

- 柯西积分公式: 若 $f(z)$ 在闭路 C 及其内部解析, $z_0 \in D$, 则

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z,$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z.$$

从 z_0 是 (至多) $n+1$ 阶极点看出.

- 可去奇点: 从 $\lim_{z\to z_0} f(z)$ 存在或 $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=0$ 得到.
- 本性奇点: 从洛朗展开的形式得到, 主要部分有无穷多项.
- 极点 (包括可去奇点): 从分子分母零点的阶得到, 例如 0 是 $\dfrac{(\sin z)^3(\mathrm{e}^z-1)^4}{z^9}$ 的 2 阶极点, 0 是 $\dfrac{(\sin z)^3(\mathrm{e}^z-1)^4}{z^5}$ 的可去奇点.

- 可去奇点处留数为 0, 本性奇点留数按照定义计算: c_{-1}.
- (至多) n 阶极点

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \left[(z-z_0)^n f(z)\right]^{(n-1)},$$

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z), \quad \text{若 } n = 1.$$

- 设 z_0 是 P 的解析点, 是 Q 的一阶零点, 则

$$\operatorname{Res}\left[\frac{P}{Q}, z_0\right] = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

常用于 $\dfrac{1}{z^n+1}, \tan z, \operatorname{th} z$ 等情形.

调和函数

- 定义：二阶连续可导，$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$.
- 解析函数的实部和虚部都是调和函数，解析函数任意阶可导，调和函数任意阶可微可导.
- 单连通区域内调和函数是解析函数的实部或虚部.
- 求共轭调和函数：
  (1) 偏积分法：通过 $v_y = u_x$ 解得 $v = \varphi(x, y) + \psi(x)$，其中 $\psi(x)$ 待定．再代入 $u_y = -v_x$ 中解出 $\psi(x)$.
  (2) 不定积分法：对 $f'(z) = u_x - \mathrm{i}u_y = v_y + \mathrm{i}v_x$ 求不定积分得到 $f(z)$.

练习. 证明 $u(x, y) = x^3 - 6x^2y - 3xy^2 + 2y^3$ 是调和函数并求它的共轭调和函数.

答案. $v(x, y) = 2x^3 + 3x^2y - 6xy^2 - y^3 + C$.

- 级数收敛 $\iff$ 实部和虚部级数都收敛.
- 级数绝对收敛 $\iff$ 实部和虚部级数都绝对收敛.
- 幂级数的收敛区域是一个圆域, 半径 $R = \dfrac{1}{r}$, 其中

  (1) 比值法: $r = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|$;

  (2) 根式法: $r = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$.
- 在收敛圆周上可能收敛可能发散.
- 幂级数有理运算, 逐项求导, 逐项积分性质; 等比级数的展开.
- 上述技巧在函数的幂级数/洛朗级数展开中的运用.

- 幂级数的收敛域是圆域, 双边幂级数的收敛域是圆环域.
- 泰勒展开与洛朗展开的成立范围的判定: 看奇点位置.
- 有理函数的洛朗展开: 注意怎么选公比.

练习. 求 $f(z)=\dfrac{1}{z^2(z+1)}$ 在以 0 为圆心的不同圆环域的洛朗展开.

- 傅里叶变换:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega,\qquad F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t.$$

- 傅里叶变换的性质: 重点是位移性质和微分性质

$$\mathscr{F}[f(t-t_0)]=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t_0}F(\omega),\quad \mathscr{F}^{-1}[F(\omega-\omega_0)]=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}f(t),$$

$$\mathscr{F}[f'(t)]=\mathrm{i}\omega F(\omega),\quad \mathscr{F}^{-1}[F'(\omega)]=-\mathrm{i}tf(t).$$

- $\mathscr{F}[\delta(t)] = 1, \mathscr{F}[\delta(t-t_0)] = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t_0}$,
- $\mathscr{F}[1] = 2\pi\delta(\omega), \mathscr{F}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$.
- $\mathscr{F}[\sin\omega_0 t] = \mathrm{i}\pi\big[\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0)\big]$,
- $\mathscr{F}[\cos\omega_0 t] = \pi\big[\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)\big]$.
- $\mathscr{F}[u(t)] = \dfrac{1}{\mathrm{i}\omega} + \pi\delta(\omega)$,
- $\mathscr{F}[u(t)\mathrm{e}^{-\beta t}] = \dfrac{1}{\beta + \mathrm{i}\omega}$,
- $\mathscr{F}[\mathrm{e}^{-\beta t^2}] = \sqrt{\dfrac{\pi}{\beta}}\mathrm{e}^{-\omega^2/(4\beta)}$

- 拉普拉斯变换:

$$F(s)=\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t.$$

- 拉普拉斯变换的性质: 重点是位移性质和微分性质

$$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{at}f(t)]=F(s-a),$$

$$\mathscr{L}[f'(t)]=sF(s)-f(0),$$

$$\mathscr{L}[f''(t)]=s^2F(s)-sf(0)-f'(0),$$

其它性质可由此类推.

- $\mathscr{L}[\mathrm{e}^{at}]=\dfrac{1}{s-a}$, $\mathscr{L}[1]=\dfrac{1}{s}$, $\mathscr{L}[t]=\dfrac{1}{s^2}$.
- $\mathscr{L}[\sin kt]=\dfrac{k}{s^2+k^2}$, $\mathscr{L}[\cos kt]=\dfrac{s}{s^2+k^2}$.

解微分方程: 两边同时做 $\mathscr{L}$, 利用微分性质求得 $X=\mathscr{L}[x]$, 然后利用常见函数的拉普拉斯变换反解得到 $x(t)$.

练习. 解方程 $\begin{cases} x''(t)+4x(t)=3\cos t, \\ x(0)=x'(0)=0. \end{cases}$

这些公式均不要求背诵.

三角函数的有理函数在 0 到 2π 的积分: 若 R 是有理函数, 则由 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 可得:

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta=\oint_{|z|=1} R\Big(\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}\Big)\frac{1}{\mathrm{i}z}\,\mathrm{d}z.$$

有理函数及带三角函数的广义积分: 若 $f(x)$ 是有理函数, 分母比分子至少高 2 次, 且分母没有实根, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\sum_{\operatorname{Im}a>0}\operatorname{Res}[R(z),a],$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\,\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\sum_{\operatorname{Im}a>0}\operatorname{Res}[f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda z},a],$$

实部和虚部分别是 $f(x)\cos\lambda x$ 和 $f(x)\cos\lambda x$ 的积分.

含幂函数的积分: 设实数 p 不是整数, $f(x)$ 是一个有理函数, 分母没有正实根, 且满足

$$\lim_{x\to 0} x^{p+1} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} x^{p+1} f(x) = 0,$$

则

$$\int_0^{+\infty} f(x) x^p \,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{\sin p\pi} \sum_a \operatorname{Res}\big[\mathrm{e}^{p\ln(-z)} f(z), a\big],$$

其中 a 取遍 $f(z)$ 的非零奇点.

含对数函数的积分: 设 $f(x)$ 是一个有理函数, 分母没有正实根, 且分母至少比分子高 2 次, 则

$$\int_0^{+\infty} f(x) \ln x \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2} \sum_a \operatorname{Res}\big[\ln^2(-z) f(z), a\big],$$

其中 a 取遍 $f(z)$ 的奇点.

若 $\mathscr{F}[f(t)] = F(\omega), \mathscr{F}[g(t)] = G(\omega)$, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\overline{G(\omega)}\,\mathrm{d}\omega.$$

特别地,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega.$$

定义

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

卷积定理:

$$\mathscr{F}[f_1 * f_2] = F_1 \cdot F_2, \quad \mathscr{F}^{-1}[F_1 * F_2] = \frac{1}{2\pi} f_1 \cdot f_2.$$

可用于计算积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) G(\omega)\,\mathrm{d}\omega = 2\pi (f * g)(0).$$

帕赛瓦尔等式: 若 $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega n t}$, 则 $\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n|^2$.

泊松求和公式: 若 $\mathscr{F}[f]=F$, 则 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(2\pi n)$, 间断点处需修改为左右极限平均值.

柯西公式: 设函数 $f(z)$ 只有有限多个奇点, 其中不是整数的奇点为 $a_1,\cdots,a_k$, 且满足 $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z)=0$, 则

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \operatorname{Res}\big[f(z)\cot(\pi z), n\big]=-\sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}\big[f(z)\cot(\pi z), a_j\big].$$

可用于计算 $\dfrac{1}{n^2+a^2}$ 等有理函数级数.