复变函数与积分变换

张神星 (合肥工业大学)

办公室：翡翠科教楼 *B1810* 东

Email: zhangshenxing@hfut.edu.cn

课件地址: https://faculty.hfut.edu.cn/zhangshenxing

第四章　级数

第一节　复数项级数

- 复数项级数及其敛散性
- 判别法

复数域上的级数与实数域上的级数并无本质差别.

复数项级数

复数域上的级数与实数域上的级数并无本质差别.

定义.

复数项级数

复数域上的级数与实数域上的级数并无本质差别.

定义.

(1) 设 $\{z_n\}_{n\geqslant 1}$ 是复数列. 表达式 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 称为复数项**无穷级数**.

复数域上的级数与实数域上的级数并无本质差别.

定义.

(1) 设 $\{z_n\}_{n\geqslant 1}$ 是复数列. 表达式 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 称为复数项**无穷级数**.

(2) 称 $s_n := z_1 + z_2 + \cdots + z_n$ 为该级数的**部分和**.

复数域上的级数与实数域上的级数并无本质差别.

定义.

(1) 设 $\{z_n\}_{n\geqslant 1}$ 是复数列. 表达式 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 称为复数项**无穷级数**.

(2) 称 $s_n := z_1 + z_2 + \cdots + z_n$ 为该级数的**部分和**.

(3) 若部分和数列 $\{s_n\}_{n\geqslant 1}$ 极限存在, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ **收敛**, 并记

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} s_n$$ 为它的**和**. 否则称该级数**发散**.

复数域上的级数与实数域上的级数并无本质差别.

定义.

(1) 设 $\{z_n\}_{n\geqslant 1}$ 是复数列. 表达式 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 称为复数项**无穷级数**.

(2) 称 $s_n := z_1 + z_2 + \cdots + z_n$ 为该级数的**部分和**.

(3) 若部分和数列 $\{s_n\}_{n\geqslant 1}$ 极限存在, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ **收敛**, 并记

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} s_n$$

为它的**和**. 否则称该级数**发散**.

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = A$ 收敛, 则 $z_n = s_n - s_{n-1} \to A - A = 0.$

复数项级数

复数域上的级数与实数域上的级数并无本质差别.

定义.

(1) 设 $\{z_n\}_{n\geqslant 1}$ 是复数列. 表达式 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 称为复数项无穷级数.

(2) 称 $s_n := z_1 + z_2 + \cdots + z_n$ 为该级数的部分和.

(3) 若部分和数列 $\{s_n\}_{n\geqslant 1}$ 极限存在, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛, 并记

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} s_n$$

为它的和. 否则称该级数发散.

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = A$ 收敛, 则 $z_n = s_n - s_{n-1} \to A - A = 0$. 因此 $z_n \to 0$ 是 $\sum z_n$ 收敛的必要条件.

复数项级数敛散性的判定

定理. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = a + b\mathrm{i}$ 当且仅当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = a, \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n = b$.

定理. $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = a+bi$ 当且仅当 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = a, \sum_{n=1}^{\infty} y_n = b$.

证明. 设部分和

$$\sigma_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \quad \tau_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n.$$

定理. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = a + b\mathrm{i}$ **当且仅当** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = a, \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n = b$.

证明. 设部分和

$$\sigma_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \quad \tau_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n.$$

则

$$s_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n = \sigma_n + \mathrm{i}\tau_n.$$

复数项级数敛散性的判定

定理. $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = a + bi$ **当且仅当** $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = a, \sum_{n=1}^{\infty} y_n = b$.

证明. 设部分和

$$\sigma_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \quad \tau_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n.$$

则

$$s_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n = \sigma_n + \mathrm{i}\tau_n.$$

由复数列的敛散性判定条件可知

$$\lim_{n\to\infty} s_n = a + bi \iff \lim_{n\to\infty} \sigma_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} \tau_n = b.$$

定理. $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = a + b\mathrm{i}$ 当且仅当 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = a, \sum_{n=1}^{\infty} y_n = b$.

证明. 设部分和

$$\sigma_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \quad \tau_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n.$$

则

$$s_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n = \sigma_n + \mathrm{i}\tau_n.$$

由复数列的敛散性判定条件可知

$$\lim_{n\to\infty} s_n = a + b\mathrm{i} \iff \lim_{n\to\infty} \sigma_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} \tau_n = b.$$

于是命题得证. □

复数项级数敛散性的判定

定理. 若实数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 也收敛，且 $\left|\sum_{n=1}^{\infty} z_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$.

定理. 若实数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|z_n|$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 也收敛, 且 $\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n\right| \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty}|z_n|$.

证明. 因为 $|x_n|, |y_n| \leqslant |z_n|$, 由比较判别法可知实数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ 绝对收敛, 从而收敛.

定理. 若实数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 也收敛, 且 $\left|\sum_{n=1}^{\infty} z_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$.

证明. 因为 $|x_n|, |y_n| \leqslant |z_n|$, 由比较判别法可知实数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 绝对收敛, 从而收敛. 故 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 也收敛.

复数项级数敛散性的判定

定理. 若实数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 也收敛, 且 $\left|\sum_{n=1}^{\infty} z_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$.

证明. 因为 $|x_n|, |y_n| \leqslant |z_n|$, 由比较判别法可知实数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 绝对收敛, 从而收敛. 故 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 也收敛.

由三角不等式可知 $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n}|z_k|$.

复数项级数敛散性的判定

定理. 若实数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 也收敛, 且 $\left|\sum_{n=1}^{\infty} z_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$.

证明. 因为 $|x_n|, |y_n| \leqslant |z_n|$, 由比较判别法可知实数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 绝对收敛, 从而收敛. 故 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 也收敛.

由三角不等式可知 $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n}|z_k|$. 两边同时取极限即得级数的不等式关系

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} z_n\right| = \left|\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|z_k| = \sum_{n=1}^{\infty}|z_n|,$$

定理. 若实数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|z_n|$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 也收敛, 且 $\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n\right| \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty}|z_n|$.

证明. 因为 $|x_n|, |y_n| \leqslant |z_n|$, 由比较判别法可知实数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ 绝对收敛, 从而收敛. 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 也收敛.

由三角不等式可知 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n}|z_k|$. 两边同时取极限即得级数的不等式关系

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} z_n\right| = \left|\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|z_k| = \sum_{n=1}^{\infty}|z_n|,$$

其中第二个等式是因为绝对值函数 $|z|$ 连续. □

定义. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|z_n|$ 收敛，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ **绝对收敛**.

绝对收敛和条件收敛

定义. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|z_n|$ 收敛，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ **绝对收敛**. 称收敛但不绝对收敛的级数**条件收敛**.

定义. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ **绝对收敛**. 称收敛但不绝对收敛的级数**条件收敛**.

绝对收敛的复级数各项可以任意重排次序而不改变其绝对收敛性，且不改变其和.

定义. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ **绝对收敛**. 称收敛但不绝对收敛的级数**条件收敛**.

绝对收敛的复级数各项可以任意重排次序而不改变其绝对收敛性，且不改变其和. 一般的级数重排有限项不改变其敛散性与和，但若重排无限项则可能会改变其敛散性与和.

定义. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|z_n|$ 收敛，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ **绝对收敛**. 称收敛但不绝对收敛的级数**条件收敛**.

绝对收敛的复级数各项可以任意重排次序而不改变其绝对收敛性，且不改变其和. 一般的级数重排有限项不改变其敛散性与和，但若重排无限项则可能会改变其敛散性与和.

定理. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 绝对收敛当且仅当它的实部和虚部级数都绝对收敛.

绝对收敛和条件收敛

定义. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ **绝对收敛**. 称收敛但不绝对收敛的级数**条件收敛**.

绝对收敛的复级数各项可以任意重排次序而不改变其绝对收敛性，且不改变其和. 一般的级数重排有限项不改变其敛散性与和，但若重排无限项则可能会改变其敛散性与和.

定理. $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 绝对收敛当且仅当它的实部和虚部级数都绝对收敛.

证明. 必要性由前一定理的证明已经知道，

定义. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty}z_n$ **绝对收敛**. 称收敛但不绝对收敛的级数**条件收敛**.

绝对收敛的复级数各项可以任意重排次序而不改变其绝对收敛性，且不改变其和. 一般的级数重排有限项不改变其敛散性与和，但若重排无限项则可能会改变其敛散性与和.

定理. $\sum_{n=1}^{\infty}z_n$ 绝对收敛当且仅当它的实部和虚部级数都绝对收敛.

证明. 必要性由前一定理的证明已经知道，充分性由 $|z_n| \leqslant |x_n| + |y_n|$ 加上正项级数可重排得到. □

绝对收敛和条件收敛的判定

虚部级数 \ 实部级数	发散	条件收敛	绝对收敛
发散	发散	发散	发散
条件收敛	发散	条件收敛	条件收敛
绝对收敛	发散	条件收敛	绝对收敛

绝对收敛和条件收敛的判定

		实部级数	
	发散	条件收敛	绝对收敛
虚部级数 发散	发散	发散	发散
虚部级数 条件收敛	发散	条件收敛	条件收敛
虚部级数 绝对收敛	发散	条件收敛	绝对收敛

思考. 什么时候 $\left|\sum_{n=1}^{\infty} z_n\right| = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$?

绝对收敛和条件收敛的判定

虚部级数 \ 实部级数	发散	条件收敛	绝对收敛
发散	发散	发散	发散
条件收敛	发散	条件收敛	条件收敛
绝对收敛	发散	条件收敛	绝对收敛

思考. 什么时候 $\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$? 当且仅当非零的 z_n 的辐角全都相同时成立.

例. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\mathrm{i}^n}{n}$ 发散、条件收敛、还是绝对收敛？

典型例题：判断级数的敛散性

例. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\mathrm{i}^n}{n}$ 发散、条件收敛、还是绝对收敛？

解答. 由于实部级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{2}{8} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

发散，所以该级数发散.

例. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\mathrm{i}^n}{n}$ 发散、条件收敛、还是绝对收敛？

解答. 由于实部级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{2}{8} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

发散，所以该级数发散.

它的虚部级数是一个交错级数，从而是条件收敛的.

例. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{n}$ 发散、条件收敛、还是绝对收敛？

例. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n}$ 发散、条件收敛、还是绝对收敛？

解答. 因为它的实部和虚部级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots$$

例. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n}$ 发散、条件收敛、还是绝对收敛？

解答. 因为它的实部和虚部级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

均条件收敛，

典型例题：判断级数的敛散性

例. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n}$ 发散、条件收敛、还是绝对收敛？

解答. 因为它的实部和虚部级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

均条件收敛，所以原级数条件收敛.

练习. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{\mathrm{i}}{2^n}\right]$ 发散、条件收敛、还是绝对收敛？

练习. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{\mathrm{i}}{2^n}\right]$ 发散、条件收敛、还是绝对收敛？

答案. 实部级数条件收敛，虚部级数绝对收敛，所以该级数条件收敛.

级数敛散性判别法

由正项级数的相应审敛法可以得到:

由正项级数的相应审敛法可以得到:

(1) **达朗贝尔判别法 (比值法)**: $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right|$ (假设存在);

由正项级数的相应审敛法可以得到:

(1) **达朗贝尔判别法 (比值法)**: $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right|$ (假设存在);

(2) 柯西判别法 (根式法): $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|}$ (假设存在);

由正项级数的相应审敛法可以得到:

(1) **达朗贝尔判别法 (比值法)**: $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right|$ (假设存在);

(2) 柯西判别法 (根式法): $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|z_n|}$ (假设存在);

(3) 柯西-阿达马判别法: $\lambda = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|z_n|}$ (子数列中极限的最大值).

由正项级数的相应审敛法可以得到:

(1) **达朗贝尔判别法 (比值法)**: $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right|$ (假设存在);

(2) 柯西判别法 (根式法): $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|}$ (假设存在);

(3) 柯西-阿达马判别法: $\lambda = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|z_n|}$ (子数列中极限的最大值).

- 当 $\lambda < 1$ 时, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ 绝对收敛.

由正项级数的相应审敛法可以得到:

(1) **达朗贝尔判别法 (比值法)**: $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right|$ (假设存在);

(2) 柯西判别法 (根式法): $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|}$ (假设存在);

(3) 柯西-阿达马判别法: $\lambda = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|}$ (子数列中极限的最大值).

- 当 $\lambda < 1$ 时, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ 绝对收敛.
- 当 $\lambda > 1$ 时, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ 发散.

由正项级数的相应审敛法可以得到:

(1) **达朗贝尔判别法 (比值法)**: $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right|$ (假设存在);

(2) 柯西判别法 (根式法): $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|z_n|}$ (假设存在);

(3) 柯西-阿达马判别法: $\lambda = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|z_n|}$ (子数列中极限的最大值).

- 当 $\lambda < 1$ 时, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ 绝对收敛.
- 当 $\lambda > 1$ 时, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ 发散.
- 当 $\lambda = 1$ 时, 无法使用该方法判断敛散性.

级数敛散性判别法

由正项级数的相应审敛法可以得到:

(1) **达朗贝尔判别法 (比值法)**: $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right|$ (假设存在);

(2) 柯西判别法 (根式法): $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|}$ (假设存在);

(3) 柯西-阿达马判别法: $\lambda = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|}$ (子数列中极限的最大值).

- 当 $\lambda < 1$ 时, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ 绝对收敛.
- 当 $\lambda > 1$ 时, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ 发散.
- 当 $\lambda = 1$ 时, 无法使用该方法判断敛散性.

其证明是通过将该级数与相应的等比级数做比较得到的.

例. 级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(8\mathrm{i})^n}{n!}$ 发散、条件收敛、还是绝对收敛？

例. 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(8\mathrm{i})^n}{n!}$ 发散、条件收敛、还是绝对收敛？

解答. 因为 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{8}{n+1} = 0$，所以该级数绝对收敛.

例. 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(8\mathrm{i})^n}{n!}$ 发散、条件收敛、还是绝对收敛？

解答. 因为 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{8}{n+1} = 0$，所以该级数绝对收敛.

实际上，它的实部和虚部级数分别为

$$1 - \frac{8^2}{2!} + \frac{8^4}{4!} - \cdots = \cos 8, \quad 8 - \frac{8^3}{3!} + \frac{8^5}{5!} - \cdots = \sin 8,$$

例. 级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(8\mathrm{i})^n}{n!}$ 发散、条件收敛、还是绝对收敛？

解答. 因为 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{8}{n+1}=0$，所以该级数绝对收敛.

实际上，它的实部和虚部级数分别为

$$1-\frac{8^2}{2!}+\frac{8^4}{4!}-\cdots=\cos 8,\quad 8-\frac{8^3}{3!}+\frac{8^5}{5!}-\cdots=\sin 8,$$

因此

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(8\mathrm{i})^n}{n!}=\cos 8+\mathrm{i}\sin 8=\mathrm{e}^{8\mathrm{i}}.$$

第二节　幂级数

- 幂级数及其收敛圆
- 收敛半径的计算
- 幂级数的运算性质

复变函数级数与实变量函数级数也是类似的.

复变函数级数与实变量函数级数也是类似的.

定义.

复变函数级数与实变量函数级数也是类似的.

定义.

(1) 设 $\{f_n(z)\}_{n\geqslant 1}$ 是一个复变函数列, 其中每一项都在区域 D 上有定义. 表达式 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 称为**复变函数项级数**.

复变函数级数与实变量函数级数也是类似的.

定义.

(1) 设 $\{f_n(z)\}_{n\geqslant 1}$ 是一个复变函数列, 其中每一项都在区域 D 上有定义. 表达式 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 称为**复变函数项级数**.

(2) 对于 $z_0 \in D$, 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$ 收敛, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ **在 z_0 处收敛**, 相应级数的值称为它的**和**.

复变函数级数与实变量函数级数也是类似的.

定义.

(1) 设 $\{f_n(z)\}_{n\geqslant 1}$ 是一个复变函数列, 其中每一项都在区域 D 上有定义. 表达式 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 称为**复变函数项级数**.

(2) 对于 $z_0 \in D$, 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$ 收敛, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ **在 z_0 处收敛**, 相应级数的值称为它的**和**.

(3) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 D 上处处收敛, 则它的和是一个函数, 称为**和函数**.

复变函数级数与实变量函数级数也是类似的.

定义.

(1) 设 $\{f_n(z)\}_{n\geqslant 1}$ 是一个复变函数列, 其中每一项都在区域 D 上有定义. 表达式 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 称为**复变函数项级数**.

(2) 对于 $z_0 \in D$, 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$ 收敛, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ **在 z_0 处收敛**, 相应级数的值称为它的**和**.

(3) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 D 上处处收敛, 则它的和是一个函数, 称为**和函数**.

(4) 称形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的函数项级数为**幂级数**.

我们只需要考虑 $a=0$ 情形的幂级数, 因为二者的收敛范围与和函数只是差一个平移.

我们只需要考虑 $a=0$ 情形的幂级数, 因为二者的收敛范围与和函数只是差一个平移.

阿贝尔定理.

我们只需要考虑 $a=0$ 情形的幂级数, 因为二者的收敛范围与和函数只是差一个平移.

阿贝尔定理.

(1) 若 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 $z_0 \neq 0$ 处收敛, 那么对任意 $|z|<|z_0|$ 的 z, 该级数必绝对收敛.

我们只需要考虑 $a=0$ 情形的幂级数, 因为二者的收敛范围与和函数只是差一个平移.

阿贝尔定理.

(1) 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 $z_0 \neq 0$ 处收敛, 那么对任意 $|z|<|z_0|$ 的 z, 该级数必绝对收敛.

(2) 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 $z_0 \neq 0$ 处发散, 那么对任意 $|z|>|z_0|$ 的 z, 该级数必发散.

证明.

证明.

(1) 因为级数收敛, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n z_0^n = 0$.

阿贝尔定理

证明.

(1) 因为级数收敛，所以 $\lim_{n\to\infty} c_n z_0^n = 0$. 故存在 M 使得 $|c_n z_0^n| < M$.

证明.

(1) 因为级数收敛，所以 $\lim_{n\to\infty} c_n z_0^n = 0$. 故存在 M 使得 $|c_n z_0^n| < M$. 对于 $|z| < |z_0|$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n z_0^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$$

证明.

(1) 因为级数收敛，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n z_0^n = 0$. 故存在 M 使得 $|c_n z_0^n| < M$. 对于 $|z| < |z_0|$,

$$\sum_{n=0}^{\infty}|c_n z^n| = \sum_{n=0}^{\infty}|c_n z_0^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leqslant M\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{z}{z_0}\right|^n = \frac{M}{1-\left|\frac{z}{z_0}\right|}.$$

证明.

(1) 因为级数收敛, 所以 $\lim_{n\to\infty} c_n z_0^n = 0$. 故存在 M 使得 $|c_n z_0^n| < M$. 对于 $|z| < |z_0|$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n z_0^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leqslant M \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z}{z_0}\right|^n = \frac{M}{1 - \left|\frac{z}{z_0}\right|}.$$

所以级数在 z 处绝对收敛.

证明.

(1) 因为级数收敛, 所以 $\lim_{n\to\infty} c_n z_0^n = 0$. 故存在 M 使得 $|c_n z_0^n| < M$. 对于 $|z| < |z_0|$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n z_0^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leqslant M \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z}{z_0}\right|^n = \frac{M}{1 - \left|\frac{z}{z_0}\right|}.$$

所以级数在 z 处绝对收敛.

(2) 是(1)的逆否命题. □

设 R 是实幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|c_n|x^n$ 的收敛半径.

幂级数的收敛半径

设 R 是实幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|c_n|x^n$ 的收敛半径.

- 若 $R=+\infty$, 由阿贝尔定理可知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 处处绝对收敛.

设 R 是实幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|x^n$ 的收敛半径.

- 若 $R=+\infty$, 由阿贝尔定理可知 $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 处处绝对收敛.
- 若 $0<R<+\infty$, 那么 $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 在 $|z|<R$ 上绝对收敛, 在 $|z|>R$ 上发散.

设 R 是实幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|c_n|x^n$ 的收敛半径.

- 若 $R=+\infty$, 由阿贝尔定理可知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 处处绝对收敛.
- 若 $0<R<+\infty$, 那么 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 在 $|z|<R$ 上绝对收敛, 在 $|z|>R$ 上发散.
- 若 $R=0$, 那么 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 仅在 $z=0$ 处收敛, 对任意 $z\neq 0$ 都发散.

幂级数的收敛半径

设 R 是实幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|x^n$ 的收敛半径.

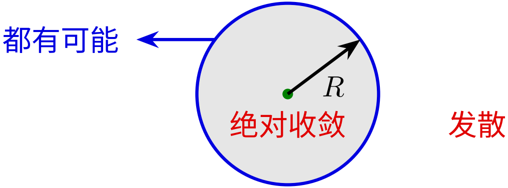
- 若 $R=+\infty$, 由阿贝尔定理可知 $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 处处绝对收敛.
- 若 $0<R<+\infty$, 那么 $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 在 $|z|<R$ 上绝对收敛, 在 $|z|>R$ 上发散.
- 若 $R=0$, 那么 $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 仅在 $z=0$ 处收敛, 对任意 $z\neq 0$ 都发散.

我们称 R 为该幂级数的收敛半径.

设 R 是实幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|x^n$ 的收敛半径.

- 若 $R=+\infty$, 由阿贝尔定理可知 $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 处处绝对收敛.
- 若 $0<R<+\infty$, 那么 $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 在 $|z|<R$ 上绝对收敛, 在 $|z|>R$ 上发散.
- 若 $R=0$, 那么 $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 仅在 $z=0$ 处收敛, 对任意 $z\neq 0$ 都发散.

我们称 R 为该幂级数的**收敛半径**.



例题：收敛半径的计算

例. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots$ 的收敛半径与和函数.

例. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots$ 的收敛半径与和函数.

解答. 若幂级数收敛，则由 $z^n \to 0$ 可知 $|z| < 1$.

例题：收敛半径的计算

例. 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots$ 的收敛半径与和函数.

解答. 若幂级数收敛，则由 $z^n \to 0$ 可知 $|z| < 1$. 当 $|z| < 1$ 时，和函数为

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z}.$$

例题：收敛半径的计算

例. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots$ 的收敛半径与和函数.

解答. 若幂级数收敛，则由 $z^n \to 0$ 可知 $|z| < 1$. 当 $|z| < 1$ 时，和函数为

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z}.$$

因此收敛半径为 1.

由正项级数的相应判别法容易得到公式 $R = \dfrac{1}{r}$, 其中

由正项级数的相应判别法容易得到公式 $R=\frac{1}{r}$, 其中

(1) **达朗贝尔公式 (比值法)**: $r=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ (假设存在);

收敛半径的计算

由正项级数的相应判别法容易得到公式 $\boldsymbol{R = \frac{1}{r}}$, 其中

(1) **达朗贝尔公式 (比值法)**: $\boldsymbol{r = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|}$ (假设存在);

(2) 柯西公式 (根式法): $r = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ (假设存在);

由正项级数的相应判别法容易得到公式 $R = \dfrac{1}{r}$, 其中

(1) **达朗贝尔公式 (比值法)**: $r = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ (假设存在);

(2) 柯西公式 (根式法): $r = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ (假设存在);

(3) 柯西-阿达马公式: $r = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$.

收敛半径的计算

由正项级数的相应判别法容易得到公式 $R = \frac{1}{r}$, 其中

(1) **达朗贝尔公式 (比值法)**: $r = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ (假设存在);

(2) 柯西公式 (根式法): $r = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ (假设存在);

(3) 柯西-阿达马公式: $r = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$.

若 $r = 0$ 或 $+\infty$, 则 $R = +\infty$ 或 0.

例. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n}$ 的收敛半径, 并讨论 $z=0,2$ 处的敛散性.

例. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n}$ 的收敛半径，并讨论 $z=0,2$ 处的敛散性.

解答. 由

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$$

可知收敛半径为 1.

典型例题：收敛半径的计算

例. 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n}$ 的收敛半径，并讨论 $z=0,2$ 处的敛散性.

解答. 由

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

可知收敛半径为 1.

当 $z=2$ 时，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

例. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n}$ 的收敛半径，并讨论 $z=0,2$ 处的敛散性.

解答. 由

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$$

可知收敛半径为 1.

当 $z=2$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

当 $z=0$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛.

例. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)}$ 的收敛半径，并讨论收敛圆周上的情形.

典型例题：收敛半径的计算

例. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n(n+1)}$ 的收敛半径，并讨论收敛圆周上的情形.

解答. 由

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = 1$$

可知收敛半径为 1.

典型例题：收敛半径的计算

例. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n(n+1)}$ 的收敛半径，并讨论收敛圆周上的情形.

解答. 由

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}=1$$

可知收敛半径为 1.

当 $|z|=1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z^n}{n(n+1)}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$ 收敛.

例. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)}$ 的收敛半径，并讨论收敛圆周上的情形.

解答. 由

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = 1$$

可知收敛半径为 1.

当 $|z| = 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z^n}{n(n+1)}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1$ 收敛. 因此该幂级数在收敛圆周上处处绝对收敛.

例. 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n(n+1)}$ 的收敛半径，并讨论收敛圆周上的情形.

解答. 由

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}=1$$

可知收敛半径为 1.

当 $|z|=1$ 时，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z^n}{n(n+1)}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$ 收敛. 因此该幂级数在收敛圆周上处处绝对收敛.

事实上，**收敛圆周上既可能处处收敛，也可能处处发散，也可能既有收敛的点也有发散的点**.

例. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \cos(\mathrm{i}n) z^n$ 的收敛半径.

例. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \cos(\mathrm{i}n) z^n$ 的收敛半径.

解答. 我们有 $c_n = \cos(\mathrm{i}n) = \dfrac{\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n}}{2}$.

例. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \cos(\mathrm{i}n) z^n$ 的收敛半径.

解答. 我们有 $c_n = \cos(\mathrm{i}n) = \dfrac{\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n}}{2}$. 由

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{n+1}+\mathrm{e}^{-n-1}}{\mathrm{e}^n+\mathrm{e}^{-n}} = \mathrm{e}\lim_{n\to\infty}\frac{1+\mathrm{e}^{-2n-2}}{1+\mathrm{e}^{-2n}} = \mathrm{e}$$

可知收敛半径为 $1/\mathrm{e}$.

典型例题：收敛半径的计算

例. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \cos(\mathrm{i}n) z^n$ 的收敛半径.

解答. 我们有 $c_n = \cos(\mathrm{i}n) = \dfrac{\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n}}{2}$. 由

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{n+1} + \mathrm{e}^{-n-1}}{\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n}} = \mathrm{e} \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \mathrm{e}^{-2n-2}}{1 + \mathrm{e}^{-2n}} = \mathrm{e}$$

可知收敛半径为 $1/\mathrm{e}$.

练习. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (1+\mathrm{i})^n z^n$ 的收敛半径为__________.

典型例题：收敛半径的计算

例. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \cos(\mathrm{i}n) z^n$ 的收敛半径.

解答. 我们有 $c_n = \cos(\mathrm{i}n) = \dfrac{\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n}}{2}$. 由

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{n+1} + \mathrm{e}^{-n-1}}{\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n}} = \mathrm{e} \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \mathrm{e}^{-2n-2}}{1 + \mathrm{e}^{-2n}} = \mathrm{e}$$

可知收敛半径为 $1/\mathrm{e}$.

练习. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (1+\mathrm{i})^n z^n$ 的收敛半径为 $\underline{\quad \sqrt{2}/2 \quad}$.

幂级数的有理运算

定理. 设幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n,|z|<R_1,\quad g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n,|z|<R_2.$$

定理. 设幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n, |z|<R_1, \quad g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n, |z|<R_2.$$

那么当 $|z|<R=\min\{R_1,R_2\}$ 时,

$$(f\pm g)(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)z^n, \quad (fg)(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\Big)z^n.$$

定理. 设幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n,|z|<R_1,\quad g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n,|z|<R_2.$$

那么当 $|z|<R=\min\{R_1,R_2\}$ 时,

$$(f\pm g)(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)z^n,\quad (fg)(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\Big)z^n.$$

当 f,g 的收敛半径相同时, $f\pm g$ 或 fg 的收敛半径可以比 f,g 的大.

幂级数的解析性质

定理. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径为 R, 则在 $|z| < R$ 上:

定理. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径为 R, 则在 $|z| < R$ 上:

(1) 它的和函数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 解析,

定理. 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径为 R, 则在 $|z| < R$ 上:

(1) 它的和函数 $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 解析,

(2) $f'(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$,

定理. 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径为 R, 则在 $|z|<R$ 上:

(1) 它的和函数 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 解析,

(2) $f'(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n z^{n-1}$,

(3) $\displaystyle\int_0^z f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}z^{n+1}$.

定理. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径为 R, 则在 $|z| < R$ 上:

(1) 它的和函数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 解析,

(2) $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$,

(3) $\int_0^z f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1}$.

也就是说, 在收敛圆内, 幂级数的和函数解析, 且可以逐项求导, 逐项积分.

定理. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径为 R, 则在 $|z| < R$ 上:

(1) 它的和函数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 解析,

(2) $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$,

(3) $\int_0^z f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1}$.

也就是说, 在收敛圆内, 幂级数的和函数解析, 且可以逐项求导, 逐项积分.

由于和函数在 $|z| > R$ 上没有定义, 因此和函数在 $|z| = R$ 上不可能解析.

例题：幂级数展开

例. 把函数 $\dfrac{1}{z-b}$ 表成形如 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的幂级数，其中 $a \neq b$.

例题：幂级数展开

例. 把函数 $\dfrac{1}{z-b}$ 表成形如 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的幂级数，其中 $a \neq b$.

解答.

$$\frac{1}{z-b} = \frac{1}{(z-a)-(b-a)}$$

例. 把函数 $\dfrac{1}{z-b}$ 表成形如 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的幂级数，其中 $a \neq b$.

解答.

$$\frac{1}{z-b} = \frac{1}{(z-a)-(b-a)} = \frac{1}{a-b} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{z-a}{b-a}}.$$

例题：幂级数展开

例. 把函数 $\dfrac{1}{z-b}$ 表成形如 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的幂级数，其中 $a \neq b$.

解答.

$$\frac{1}{z-b} = \frac{1}{(z-a)-(b-a)} = \frac{1}{a-b} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{z-a}{b-a}}.$$

当 $|z-a|<|b-a|$ 时，

例题：幂级数展开

例. 把函数 $\dfrac{1}{z-b}$ 表成形如 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的幂级数，其中 $a \neq b$.

解答.

$$\frac{1}{z-b} = \frac{1}{(z-a)-(b-a)} = \frac{1}{a-b} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{z-a}{b-a}}.$$

当 $|z-a|<|b-a|$ 时，$\displaystyle\frac{1}{z-b} = \frac{1}{a-b}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{z-a}{b-a}\Big)^n$,

例题：幂级数展开

例. 把函数 $\dfrac{1}{z-b}$ 表成形如 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的幂级数，其中 $a \neq b$.

解答.

$$\frac{1}{z-b} = \frac{1}{(z-a)-(b-a)} = \frac{1}{a-b} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{z-a}{b-a}}.$$

当 $|z-a|<|b-a|$ 时，$\dfrac{1}{z-b} = \dfrac{1}{a-b}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{z-a}{b-a}\right)^n$，即

$$\frac{1}{z-b} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(b-a)^{n+1}}, \quad |z-a|<|b-a|.$$

典型例题: 幂级数的收敛半径与和函数

例. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(2^n-1)z^{n-1}$ 的收敛半径与和函数.

例. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(2^n-1)z^{n-1}$ 的收敛半径与和函数.

解答. 由

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+2}-1}{2^{n+1}-1} = 2$$

可知收敛半径为 $\dfrac{1}{2}$.

例. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(2^n-1)z^{n-1}$ 的收敛半径与和函数.

解答. 由

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+2}-1}{2^{n+1}-1} = 2$$

可知收敛半径为 $\frac{1}{2}$. 当 $|z|<\frac{1}{2}$ 时, $|2z|<1$.

例. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(2^n-1)z^{n-1}$ 的收敛半径与和函数.

解答. 由

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+2}-1}{2^{n+1}-1} = 2$$

可知收敛半径为 $\frac{1}{2}$. 当 $|z|<\frac{1}{2}$ 时, $|2z|<1$. 从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2^n-1)z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}2^n z^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty}z^{n-1}$$

例. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2^n-1)z^{n-1}$ 的收敛半径与和函数.

解答. 由

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+2}-1}{2^{n+1}-1} = 2$$

可知收敛半径为 $\frac{1}{2}$. 当 $|z|<\frac{1}{2}$ 时, $|2z|<1$. 从而

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(2^n-1)z^{n-1} &= \sum_{n=1}^{\infty}2^n z^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty}z^{n-1} \\ &= \frac{2}{1-2z} - \frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-2z)(1-z)}.\end{aligned}$$

例. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$ 的收敛半径与和函数.

例. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$ 的收敛半径与和函数.

解答. 由 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1} = 1$ 可知收敛半径为 1.

例. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$ 的收敛半径与和函数.

解答. 由 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1} = 1$ 可知收敛半径为 1. 当 $|z|<1$ 时,

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} = \frac{z}{1-z} = -1 - \frac{1}{z-1},$$

典型例题：幂级数的收敛半径与和函数

例. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$ 的收敛半径与和函数.

解答. 由 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1} = 1$ 可知收敛半径为 1. 当 $|z| < 1$ 时,

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} = \frac{z}{1-z} = -1 - \frac{1}{z-1},$$

因此

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n = \Big(-\frac{1}{z-1}\Big)' = \frac{1}{(z-1)^2}, \quad |z| < 1.$$

通过对

$$1+\lambda z+\lambda^2z^2+\cdots=\frac{1}{1-\lambda z}$$

两边求 k 阶导数可得

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+k)\cdots(n+2)(n+1)\lambda^n z^n=\frac{k!}{(1-\lambda z)^{k+1}}.$$

通过对

$$1+\lambda z+\lambda^2 z^2+\cdots=\frac{1}{1-\lambda z}$$

两边求 k 阶导数可得

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+k)\cdots(n+2)(n+1)\lambda^n z^n=\frac{k!}{(1-\lambda z)^{k+1}}.$$

因此若 $p(n)$ 是次数为 $m-1$ 的多项式, 那么

$$\sum_{n=0}^{\infty}p(n)\lambda^n z^n=\frac{P(z)}{(1-\lambda z)^m},$$

其中 P 是多项式.

一般地, 若幂级数的系数形如

$$c_n = p_1(n)\lambda_1^n + \cdots + p_k(n)\lambda_k^n,$$

一般地，若幂级数的系数形如

$$c_n = p_1(n)\lambda_1^n + \cdots + p_k(n)\lambda_k^n,$$

则和函数一定是形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \frac{P(z)}{(1-\lambda_1 z)^{m_1}\cdots(1-\lambda_k z)^{m_k}}$$

的有理函数，其中 $m_j = \deg p_j + 1$.

一般地, 若幂级数的系数形如

$$c_n = p_1(n)\lambda_1^n + \cdots + p_k(n)\lambda_k^n,$$

则和函数一定是形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \frac{P(z)}{(1-\lambda_1 z)^{m_1} \cdots (1-\lambda_k z)^{m_k}}$$

的有理函数, 其中 $m_j = \deg p_j + 1$. 反过来这样的分式展开成幂级数的系数也一定有上述形式, 至多有有限多项例外.

一般地，若幂级数的系数形如

$$c_n = p_1(n)\lambda_1^n + \cdots + p_k(n)\lambda_k^n,$$

则和函数一定是形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \frac{P(z)}{(1-\lambda_1 z)^{m_1}\cdots(1-\lambda_k z)^{m_k}}$$

的有理函数，其中 $m_j = \deg p_j + 1$. 反过来这样的分式展开成幂级数的系数也一定有上述形式，至多有有限多项例外. 这可以帮助我们进行计算的验证.

一般地, 若幂级数的系数形如

$$c_n = p_1(n)\lambda_1^n + \cdots + p_k(n)\lambda_k^n,$$

则和函数一定是形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \frac{P(z)}{(1-\lambda_1 z)^{m_1}\cdots(1-\lambda_k z)^{m_k}}$$

的有理函数, 其中 $m_j = \deg p_j + 1$. 反过来这样的分式展开成幂级数的系数也一定有上述形式, 至多有有限多项例外. 这可以帮助我们进行计算的验证.

练习. 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ 的收敛半径与和函数.

一般地, 若幂级数的系数形如

$$c_n = p_1(n)\lambda_1^n + \cdots + p_k(n)\lambda_k^n,$$

则和函数一定是形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \frac{P(z)}{(1-\lambda_1 z)^{m_1}\cdots(1-\lambda_k z)^{m_k}}$$

的有理函数, 其中 $m_j = \deg p_j + 1$. 反过来这样的分式展开成幂级数的系数也一定有上述形式, 至多有有限多项例外. 这可以帮助我们进行计算的验证.

练习. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ 的收敛半径与和函数.

答案. 收敛半径为 1, 和函数为 $-\ln(1-z)$.

例题：函数项级数的积分

例. 求 $\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=-1}^{\infty} z^n\right)\mathrm{d}z.$

例题：函数项级数的积分

例. 求 $\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=-1}^{\infty} z^n\right)\mathrm{d}z.$

解答. 由于 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 在 $|z|<1$ 收敛，

例. 求 $\displaystyle\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\Big(\sum_{n=-1}^{\infty} z^n\Big)\,\mathrm{d}z.$

解答. 由于 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 在 $|z|<1$ 收敛，它的和函数解析.

例. 求 $\displaystyle\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\Big(\sum_{n=-1}^{\infty} z^n\Big)\,\mathrm{d}z.$

解答. 由于 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 在 $|z|<1$ 收敛，它的和函数解析．因此

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\Big(\sum_{n=-1}^{\infty} z^n\Big)\,\mathrm{d}z=\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z+\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\Big)\,\mathrm{d}z$$

例题：函数项级数的积分

例. 求 $\displaystyle\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \Big(\sum_{n=-1}^{\infty} z^n\Big)\,\mathrm{d}z.$

解答. 由于 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 在 $|z|<1$ 收敛，它的和函数解析. 因此

$$\begin{aligned}\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \Big(\sum_{n=-1}^{\infty} z^n\Big)\,\mathrm{d}z &= \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z + \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \Big(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\Big)\,\mathrm{d}z \\ &= 2\pi\mathrm{i} + 0 = 2\pi\mathrm{i}.\end{aligned}$$

第三节　泰勒级数

- 泰勒展开的形式与性质
- 泰勒展开的计算方法

实泰勒级数的特点

我们知道，幂级数在它的收敛域内的和函数是一个解析函数.

实泰勒级数的特点

我们知道, 幂级数在它的收敛域内的和函数是一个解析函数. 反过来, 解析函数是不是也一定可以在一点展开成幂级数呢? 也就是说是否存在泰勒级数展开?

我们知道，幂级数在它的收敛域内的和函数是一个解析函数．反过来，解析函数是不是也一定可以在一点展开成幂级数呢？也就是说是否存在泰勒级数展开？

在高等数学中我们知道，一个函数即使在一点附近无限次可导，它的泰勒级数也未必收敛到原函数．

我们知道, 幂级数在它的收敛域内的和函数是一个解析函数. 反过来, 解析函数是不是也一定可以在一点展开成幂级数呢? 也就是说是否存在泰勒级数展开?

在高等数学中我们知道, 一个函数即使在一点附近无限次可导, 它的泰勒级数也未必收敛到原函数. 例如

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x^{-2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

我们知道, 幂级数在它的收敛域内的和函数是一个解析函数. 反过来, 解析函数是不是也一定可以在一点展开成幂级数呢? 也就是说是否存在泰勒级数展开?

在高等数学中我们知道, 一个函数即使在一点附近无限次可导, 它的泰勒级数也未必收敛到原函数. 例如

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x^{-2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

它处处可导, 但是它在 0 处的各阶导数都是 0.

我们知道，幂级数在它的收敛域内的和函数是一个解析函数. 反过来，解析函数是不是也一定可以在一点展开成幂级数呢？也就是说是否存在泰勒级数展开？

在高等数学中我们知道，一个函数即使在一点附近无限次可导，它的泰勒级数也未必收敛到原函数. 例如

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x^{-2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

它处处可导，但是它在 0 处的各阶导数都是 0. 因此它的泰勒级数是 0，余项恒为 $f(x)$.

我们知道, 幂级数在它的收敛域内的和函数是一个解析函数. 反过来, 解析函数是不是也一定可以在一点展开成幂级数呢? 也就是说是否存在泰勒级数展开?

在高等数学中我们知道, 一个函数即使在一点附近无限次可导, 它的泰勒级数也未必收敛到原函数. 例如

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x^{-2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

它处处可导, 但是它在 0 处的各阶导数都是 0. 因此它的泰勒级数是 0, 余项恒为 $f(x)$. 除 0 外它的泰勒级数均不收敛到原函数.

而即使是泰勒级数能收敛到原函数的情形，它成立的范围也很难从函数本身读出.

实泰勒级数的特点

而即使是泰勒级数能收敛到原函数的情形，它成立的范围也很难从函数本身读出. 例如

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots, \quad |x| < 1.$$

实泰勒级数的特点

而即使是泰勒级数能收敛到原函数的情形, 它成立的范围也很难从函数本身读出. 例如

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots, \quad |x| < 1.$$

这可以从 $x = -1$ 是奇点看出.

而即使是泰勒级数能收敛到原函数的情形, 它成立的范围也很难从函数本身读出. 例如

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots, \quad |x|<1.$$

这可以从 $x=-1$ 是奇点看出. 而

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots, \quad |x|<1$$

却并没有奇点.

而即使是泰勒级数能收敛到原函数的情形, 它成立的范围也很难从函数本身读出. 例如

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots, \quad |x| < 1.$$

这可以从 $x = -1$ 是奇点看出. 而

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots, \quad |x| < 1$$

却并没有奇点. 为什么它的麦克劳林级数成立的开区间也是 $(-1, 1)$?

而即使是泰勒级数能收敛到原函数的情形, 它成立的范围也很难从函数本身读出. 例如

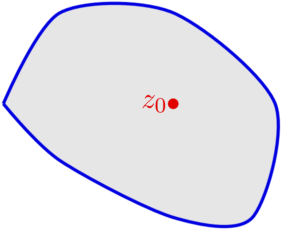
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots, \quad |x| < 1.$$

这可以从 $x = -1$ 是奇点看出. 而

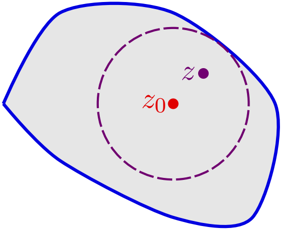
$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots, \quad |x| < 1$$

却并没有奇点. 为什么它的麦克劳林级数成立的开区间也是 $(-1, 1)$? 这个问题在本节可以得到回答.

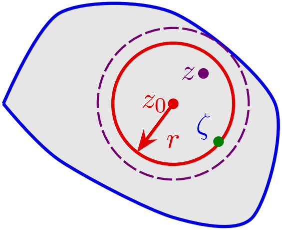
设函数 $f(z)$ 在区域 D 解析, $z_0 \in D$.



设函数 $f(z)$ 在区域 D 解析, $z_0 \in D$. 设 $|z-z_0|$ 小于 z_0 到 D 边界的距离 d, 则存在 $|z-z_0|<r<d$.



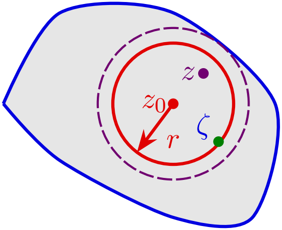
设函数 $f(z)$ 在区域 D 解析, $z_0 \in D$. 设 $|z-z_0|$ 小于 z_0 到 D 边界的距离 d, 则存在 $|z-z_0|<r<d$. 设 $K:|\zeta-z_0|=r$, 则 K 和它的内部包含在 D 中.



泰勒展开的形式

设函数 $f(z)$ 在区域 D 解析, $z_0 \in D$. 设 $|z - z_0|$ 小于 z_0 到 D 边界的距离 d, 则存在 $|z - z_0| < r < d$. 设 $K : |\zeta - z_0| = r$, 则 K 和它的内部包含在 D 中. 由于 $\left|\dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| < 1$, 因此

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}.$$



故

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_K \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta$$

故

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_K \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_K f(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta$$

故

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_K \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_K f(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_K \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right] (z-z_0)^n + R_N(z),
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_K \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_K f(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \,\mathrm{d}\zeta \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_K \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right] (z-z_0)^n + R_N(z), \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n + R_N(z),
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_K \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_K f(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_K \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right] (z - z_0)^n + R_N(z), \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n + R_N(z),
\end{aligned}
$$

其中

$$
R_N(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_K f(\zeta) \left[\sum_{n=N}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right] \mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_K \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \cdot \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^N \mathrm{d}\zeta.
$$

由于 $f(\zeta)$ 在 $D \supseteq K$ 上解析, 从而在 K 上连续且有界.

由于 $f(\zeta)$ 在 $D \supseteq K$ 上解析, 从而在 K 上连续且有界. 设 $|f(\zeta)| \leqslant M, \zeta \in K$,

泰勒展开的形式

由于 $f(\zeta)$ 在 $D \supseteq K$ 上解析, 从而在 K 上连续且有界. 设 $|f(\zeta)| \leqslant M, \zeta \in K$, 那么

$$|R_N(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \oint_K \left| \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \cdot \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^N \right| \mathrm{d}s$$

由于 $f(\zeta)$ 在 $D \supseteq K$ 上解析, 从而在 K 上连续且有界. 设 $|f(\zeta)| \leqslant M, \zeta \in K$, 那么

$$\begin{aligned}|R_N(z)| &\leqslant \frac{1}{2\pi}\oint_K \left|\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\cdot\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^N\right| \mathrm{d}s \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M}{r-|z-z_0|}\cdot\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|^N \cdot 2\pi r \to 0 \quad (N\to\infty).\end{aligned}$$

由于 $f(\zeta)$ 在 $D \supseteq K$ 上解析, 从而在 K 上连续且有界. 设 $|f(\zeta)| \leqslant M, \zeta \in K$, 那么

$$|R_N(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \oint_K \left| \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \cdot \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^N \right| \mathrm{d}s$$
$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{r - |z - z_0|} \cdot \left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right|^N \cdot 2\pi r \to 0 \quad (N \to \infty).$$

故

$$\boldsymbol{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n}, \quad |z - z_0| < d.$$

泰勒展开的成立范围

由于幂级数在收敛半径内的和函数是解析的, 因此上述等式成立的圆域不包含奇点.

由于幂级数在收敛半径内的和函数是解析的，因此上述等式成立的圆域不包含奇点．故解析函数在 z_0 处**泰勒展开成立的最大圆域半径是 z_0 到最近奇点的距离**．

泰勒展开的成立范围

由于幂级数在收敛半径内的和函数是解析的, 因此上述等式成立的圆域不包含奇点. 故解析函数在 z_0 处**泰勒展开成立的最大圆域半径是 z_0 到最近奇点的距离**. 需要注意的是, 泰勒级数的收敛半径是有可能比这个半径更大的:

$$f(z)=\begin{cases}\mathrm{e}^z, & z\neq 1;\\ 0, & z=1,\end{cases}\qquad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\quad |z|<1.$$

泰勒展开的成立范围

由于幂级数在收敛半径内的和函数是解析的, 因此上述等式成立的圆域不包含奇点. 故解析函数在 z_0 处**泰勒展开成立的最大圆域半径是 z_0 到最近奇点的距离**. 需要注意的是, 泰勒级数的收敛半径是有可能比这个半径更大的:

$$f(z)=\begin{cases}\mathrm{e}^z, & z\neq 1;\\ 0, & z=1,\end{cases}\qquad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\quad |z|<1.$$

$$f(z)=\ln(z-1-\mathrm{i}),\qquad f(z)=-\frac{1}{1+\mathrm{i}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n(1+\mathrm{i})^n}z^n,\quad |z|<1.$$

泰勒展开的成立范围

由于幂级数在收敛半径内的和函数是解析的, 因此上述等式成立的圆域不包含奇点. 故解析函数在 z_0 处**泰勒展开成立的最大圆域半径是 z_0 到最近奇点的距离**. 需要注意的是, 泰勒级数的收敛半径是有可能比这个半径更大的:

$$f(z)=\begin{cases}\mathrm{e}^z, & z\neq 1;\\ 0, & z=1,\end{cases}\qquad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\quad |z|<1.$$

$$f(z)=\ln(z-1-\mathrm{i}),\qquad f(z)=-\frac{1}{1+\mathrm{i}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n(1+\mathrm{i})^n}z^n,\quad |z|<1.$$

若并非这两种情形 (奇点 “可去”), 则收敛半径的确就是前述距离.

由于幂级数在收敛半径内的和函数是解析的, 因此上述等式成立的圆域不包含奇点. 故解析函数在 z_0 处**泰勒展开成立的最大圆域半径是 z_0 到最近奇点的距离**. 需要注意的是, 泰勒级数的收敛半径是有可能比这个半径更大的:

$$f(z)=\begin{cases} e^z, & z\neq 1;\\ 0, & z=1,\end{cases}\qquad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\quad |z|<1.$$

$$f(z)=\ln(z-1-i),\qquad f(z)=-\frac{1}{1+i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n(1+i)^n}z^n,\quad |z|<1.$$

若并非这两种情形 (奇点 “可去”), 则收敛半径的确就是前述距离.

对于

$$f(z)=\begin{cases} e^{-z^{-2}}, & z\neq 0,\\ 0, & z=0.\end{cases}$$

由于幂级数在收敛半径内的和函数是解析的, 因此上述等式成立的圆域不包含奇点. 故解析函数在 z_0 处泰勒展开成立的最大圆域半径是 z_0 到最近奇点的距离. 需要注意的是, 泰勒级数的收敛半径是有可能比这个半径更大的:

$$f(z)=\begin{cases}\mathrm{e}^z, & z\neq 1;\\ 0, & z=1,\end{cases}\qquad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\quad |z|<1.$$

$$f(z)=\ln(z-1-\mathrm{i}),\qquad f(z)=-\frac{1}{1+\mathrm{i}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n(1+\mathrm{i})^n}z^n,\quad |z|<1.$$

若并非这两种情形 (奇点 “可去”), 则收敛半径的确就是前述距离.

对于

$$f(z)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-z^{-2}}, & z\neq 0,\\ 0, & z=0.\end{cases}$$

$\lim\limits_{y\to 0} f(\mathrm{i}y)=\infty$, 因此 $f(z)$ 在 0 处不连续, 无法在 0 处进行复的泰勒展开.

幂级数展开的唯一性

对于 $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$,

对于 $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$, 它的奇点为 $\pm\mathrm{i}$, 所以它的麦克劳林展开成立的半径是 1.

幂级数展开的唯一性

对于 $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$, 它的奇点为 $\pm\mathrm{i}$, 所以它的麦克劳林展开成立的半径是 1. 这就解释了为什么函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 的麦克劳林展开成立的开区间是 $(-1,1)$.

对于 $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$, 它的奇点为 $\pm\mathrm{i}$, 所以它的麦克劳林展开成立的半径是 1. 这就解释了为什么函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 的麦克劳林展开成立的开区间是 $(-1,1)$.

若 $f(z)$ 在 z_0 附近展开为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$,

幂级数展开的唯一性

对于 $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$, 它的奇点为 $\pm\mathrm{i}$, 所以它的麦克劳林展开成立的半径是 1. 这就解释了为什么函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 的麦克劳林展开成立的开区间是 $(-1,1)$.

若 $f(z)$ 在 z_0 附近展开为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$, 则由幂级数的逐项求导性质可知

$$f^{(n)}(z_0)=\sum_{k=n}^{\infty}c_k k(k-1)\cdots(k-n+1)(z-z_0)^{k-n}\Big|_{z=z_0}=n!c_n.$$

对于 $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$, 它的奇点为 $\pm\mathrm{i}$, 所以它的麦克劳林展开成立的半径是 1. 这就解释了为什么函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 的麦克劳林展开成立的开区间是 $(-1,1)$.

若 $f(z)$ 在 z_0 附近展开为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, 则由幂级数的逐项求导性质可知

$$f^{(n)}(z_0)=\sum_{k=n}^{\infty} c_k k(k-1)\cdots(k-n+1)(z-z_0)^{k-n}\Big|_{z=z_0}=n!c_n.$$

所以解析函数的幂级数展开是唯一的.

幂级数展开的唯一性

对于 $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$, 它的奇点为 $\pm\mathrm{i}$, 所以它的麦克劳林展开成立的半径是 1. 这就解释了为什么函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 的麦克劳林展开成立的开区间是 $(-1,1)$.

若 $f(z)$ 在 z_0 附近展开为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, 则由幂级数的逐项求导性质可知

$$f^{(n)}(z_0)=\sum_{k=n}^{\infty} c_k k(k-1)\cdots(k-n+1)(z-z_0)^{k-n}\Big|_{z=z_0}=n!c_n.$$

所以解析函数的幂级数展开是唯一的. 由此, 解析函数的泰勒展开不仅可以直接求出各阶导数得到, 也可以利用幂级数的运算法则得到.

幂级数展开的唯一性

对于 $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$，它的奇点为 $\pm\mathrm{i}$，所以它的麦克劳林展开成立的半径是 1. 这就解释了为什么函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 的麦克劳林展开成立的开区间是 $(-1,1)$.

若 $f(z)$ 在 z_0 附近展开为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$，则由幂级数的逐项求导性质可知

$$f^{(n)}(z_0)=\sum_{k=n}^{\infty} c_k k(k-1)\cdots(k-n+1)(z-z_0)^{k-n}\Big|_{z=z_0}=n!c_n.$$

所以**解析函数的幂级数展开是唯一的**. 由此，解析函数的泰勒展开不仅可以**直接求出各阶导数得到**，也可以**利用幂级数的运算法则得到**.

解析函数的泰勒展开还说明了幂级数的和函数无论怎样扩充定义域，它在**收敛圆周上一定有奇点**.

幂级数展开的唯一性

对于 $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$, 它的奇点为 $\pm\mathrm{i}$, 所以它的麦克劳林展开成立的半径是 1. 这就解释了为什么函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 的麦克劳林展开成立的开区间是 $(-1,1)$.

若 $f(z)$ 在 z_0 附近展开为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$, 则由幂级数的逐项求导性质可知

$$f^{(n)}(z_0)=\sum_{k=n}^{\infty}c_k k(k-1)\cdots(k-n+1)(z-z_0)^{k-n}\Big|_{z=z_0}=n!c_n.$$

所以解析函数的幂级数展开是唯一的. 由此, 解析函数的泰勒展开不仅可以直接求出各阶导数得到, 也可以利用幂级数的运算法则得到.

解析函数的泰勒展开还说明了幂级数的和函数无论怎样扩充定义域, 它在收敛圆周上一定有奇点. 否则它就可以在一个半径更大的圆域上泰勒展开成该幂级数.

典型例题：泰勒展开的计算

例. 由于 $(\mathrm{e}^z)^{(n)}(0) = \mathrm{e}^z\big|_{z=0} = 1,$

例. 由于 $(\mathrm{e}^z)^{(n)}(0) = \mathrm{e}^z\big|_{z=0} = 1$，因此

$$\mathrm{e}^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \forall z.$$

典型例题：泰勒展开的计算

例. 由于 $(\mathrm{e}^z)^{(n)}(0) = \mathrm{e}^z\big|_{z=0} = 1$，因此

$$\mathrm{e}^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \forall z.$$

例. 由于 $(\cos z)^{(n)} = \cos\Big(z + \dfrac{n\pi}{2}\Big)$，

典型例题：泰勒展开的计算

例. 由于 $(\mathrm{e}^z)^{(n)}(0) = \mathrm{e}^z|_{z=0} = 1$，因此

$$\mathrm{e}^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \forall z.$$

例. 由于 $(\cos z)^{(n)} = \cos\left(z + \dfrac{n\pi}{2}\right)$，

$$(\cos z)^{(2n+1)}(0) = 0, \quad (\cos z)^{(2n)}(0) = (-1)^n,$$

例. 由于 $(\mathrm{e}^z)^{(n)}(0) = \mathrm{e}^z\big|_{z=0} = 1$, 因此

$$\mathrm{e}^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \forall z.$$

例. 由于 $(\cos z)^{(n)} = \cos\Big(z + \dfrac{n\pi}{2}\Big)$,

$$(\cos z)^{(2n+1)}(0) = 0, \quad (\cos z)^{(2n)}(0) = (-1)^n,$$

因此

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall z.$$

典型例题: 泰勒展开的计算

例. 由 e^z 的泰勒展开可得

$$\sin z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}$$

典型例题：泰勒展开的计算

例. 由 e^z 的泰勒展开可得

$$\sin z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}z)^n - (-\mathrm{i}z)^n}{2\mathrm{i} \cdot n!}$$

例. 由 e^z 的泰勒展开可得

$$\sin z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}z)^n - (-\mathrm{i}z)^n}{2\mathrm{i} \cdot n!}$$

$$= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall z.$$

例. 由 e^z 的泰勒展开可得

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n-(-iz)^n}{2i\cdot n!}$$

$$=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad \forall z.$$

这里，因为 $\sin z$ 是奇函数，所以它的麦克劳林展开只有奇数幂次项，没有偶数幂次项.

典型例题：泰勒展开的计算

例. 求对数函数的主值 $\ln(1+z)$ 的麦克劳林展开.

例. 求对数函数的主值 $\ln(1+z)$ 的麦克劳林展开.

解答. 由于 $\ln(1+z)$ 在去掉射线 $z=x\leqslant -1$ 的区域内解析,

例. 求对数函数的主值 $\ln(1+z)$ 的麦克劳林展开.

解答. 由于 $\ln(1+z)$ 在去掉射线 $z=x\leqslant -1$ 的区域内解析，因此它在 $|z|<1$ 内解析，

例. 求对数函数的主值 $\ln(1+z)$ 的麦克劳林展开.

解答. 由于 $\ln(1+z)$ 在去掉射线 $z=x\leqslant -1$ 的区域内解析, 因此它在 $|z|<1$ 内解析, 且

$$\big[\ln(1+z)\big]'=\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n,\quad |z|<1.$$

典型例题：泰勒展开的计算

例. 求对数函数的主值 $\ln(1+z)$ 的麦克劳林展开.

解答. 由于 $\ln(1+z)$ 在去掉射线 $z=x\leqslant -1$ 的区域内解析，因此它在 $|z|<1$ 内解析，且

$$\big[\ln(1+z)\big]' = \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n, \quad |z|<1.$$

逐项积分得到

$$\ln(1+z) = \int_0^z \frac{1}{1+\zeta}\,\mathrm{d}\zeta$$

例. 求对数函数的主值 $\ln(1+z)$ 的麦克劳林展开.

解答. 由于 $\ln(1+z)$ 在去掉射线 $z = x \leqslant -1$ 的区域内解析，因此它在 $|z| < 1$ 内解析，且

$$[\ln(1+z)]' = \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n, \quad |z| < 1.$$

逐项积分得到

$$\ln(1+z) = \int_0^z \frac{1}{1+\zeta}\,\mathrm{d}\zeta = \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \zeta^n\,\mathrm{d}\zeta$$

例. 求对数函数的主值 $\ln(1+z)$ 的麦克劳林展开.

解答. 由于 $\ln(1+z)$ 在去掉射线 $z=x\leqslant -1$ 的区域内解析, 因此它在 $|z|<1$ 内解析, 且

$$[\ln(1+z)]'=\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n,\quad |z|<1.$$

逐项积分得到

$$\begin{aligned}\ln(1+z)&=\int_0^z\frac{1}{1+\zeta}\,\mathrm{d}\zeta=\int_0^z\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\zeta^n\,\mathrm{d}\zeta\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1}\end{aligned}$$

例. 求对数函数的主值 $\ln(1+z)$ 的麦克劳林展开.

解答. 由于 $\ln(1+z)$ 在去掉射线 $z = x \leqslant -1$ 的区域内解析，因此它在 $|z| < 1$ 内解析，且

$$[\ln(1+z)]' = \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad |z| < 1.$$

逐项积分得到

$$\begin{aligned} \ln(1+z) &= \int_0^z \frac{1}{1+\zeta}\,\mathrm{d}\zeta = \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \zeta^n\,\mathrm{d}\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n}, \quad |z| < 1. \end{aligned}$$

典型例题：泰勒展开的计算

例. 本例中幂函数均取主值.

例. 本例中幂函数均取主值. $f(z)=(1+z)^{\alpha}$ 在去掉射线 $z=x\leqslant -1$ 的区域内解析.

典型例题: 泰勒展开的计算

例. 本例中幂函数均取主值. $f(z)=(1+z)^\alpha$ 在去掉射线 $z=x\leqslant -1$ 的区域内解析. 由于

$$f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+z)^{\alpha-n}\Big|_{z=0}$$

例. 本例中幂函数均取主值. $f(z)=(1+z)^\alpha$ 在去掉射线 $z=x\leqslant -1$ 的区域内解析. 由于

$$\begin{aligned} f^{(n)}(0) &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+z)^{\alpha-n}\Big|_{z=0} \\ &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1). \end{aligned}$$

例. 本例中幂函数均取主值. $f(z)=(1+z)^\alpha$ 在去掉射线 $z=x\leqslant -1$ 的区域内解析. 由于

$$\begin{aligned} f^{(n)}(0) &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+z)^{\alpha-n}\Big|_{z=0} \\ &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1). \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} (1+z)^\alpha &= 1+\alpha z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}z^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}z^3+\cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}z^n, \quad |z|<1. \end{aligned}$$

典型例题: 泰勒展开的计算

当 $\alpha = n$ 是正整数时, 上述麦克劳林展开的 $> n$ 幂次项系数为零,

典型例题：泰勒展开的计算

当 $\alpha = n$ 是正整数时，上述麦克劳林展开的 $> n$ 幂次项系数为零，从而

$$(1+z)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k z^k,$$

此即牛顿二项式展开.

当 $\alpha = n$ 是正整数时，上述麦克劳林展开的 $> n$ 幂次项系数为零，从而

$$(1+z)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k z^k,$$

此即牛顿二项式展开.

例. 将 $\dfrac{1}{(1+z)^2}$ 展开成 z 的幂级数.

典型例题：泰勒展开的计算

当 $\alpha = n$ 是正整数时，上述麦克劳林展开的 $> n$ 幂次项系数为零，从而

$$(1+z)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k z^k,$$

此即牛顿二项式展开.

例. 将 $\dfrac{1}{(1+z)^2}$ 展开成 z 的幂级数.

解答. 由幂函数展开可知当 $|z| < 1$ 时，

$$(1+z)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)(-3)\cdots(-1-n)}{n!} z^n$$

当 $\alpha = n$ 是正整数时，上述麦克劳林展开的 $> n$ 幂次项系数为零，从而

$$(1+z)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k z^k,$$

此即牛顿二项式展开.

例. 将 $\dfrac{1}{(1+z)^2}$ 展开成 z 的幂级数.

解答. 由幂函数展开可知当 $|z| < 1$ 时,

$$(1+z)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)(-3)\cdots(-1-n)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) z^n.$$

另解. 由于 $\dfrac{1}{(1+z)^2}$ 的奇点为 $z=-1$, 因此它在 $|z|<1$ 内解析.

典型例题：泰勒展开的计算

另解. 由于 $\dfrac{1}{(1+z)^2}$ 的奇点为 $z=-1$，因此它在 $|z|<1$ 内解析. 由于

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n,$$

另解. 由于 $\dfrac{1}{(1+z)^2}$ 的奇点为 $z=-1$, 因此它在 $|z|<1$ 内解析. 由于

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n,$$

因此

$$\frac{1}{(1+z)^2}=-\Big(\frac{1}{1+z}\Big)'$$

典型例题：泰勒展开的计算

另解. 由于 $\dfrac{1}{(1+z)^2}$ 的奇点为 $z=-1$，因此它在 $|z|<1$ 内解析. 由于

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n,$$

因此

$$\frac{1}{(1+z)^2} = -\Big(\frac{1}{1+z}\Big)' = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n z^{n-1}$$

另解. 由于 $\dfrac{1}{(1+z)^2}$ 的奇点为 $z=-1$, 因此它在 $|z|<1$ 内解析. 由于

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n,$$

因此

$$\frac{1}{(1+z)^2}=-\Big(\frac{1}{1+z}\Big)'=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n nz^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)z^n,\quad |z|<1.$$

另解. 由于 $\dfrac{1}{(1+z)^2}$ 的奇点为 $z=-1$, 因此它在 $|z|<1$ 内解析. 由于

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n,$$

因此

$$\frac{1}{(1+z)^2}=-\Big(\frac{1}{1+z}\Big)'=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n z^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)z^n,\quad |z|<1.$$

一般地, 我们有

$$\frac{1}{(\lambda-z)^k}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+k-1)\cdots(n+2)(n+1)}{(k-1)!}\lambda^{-(n+k)}z^n, |z|<|\lambda|.$$

例. 求 $\dfrac{1}{3z-2}$ 的麦克劳林展开.

典型例题：泰勒展开的计算

例. 求 $\dfrac{1}{3z-2}$ 的麦克劳林展开.

解答. 由于 $\dfrac{1}{3z-2}$ 的奇点为 $z=\dfrac{2}{3}$, 因此它在 $|z|<\dfrac{2}{3}$ 内解析.

例. 求 $\dfrac{1}{3z-2}$ 的麦克劳林展开.

解答. 由于 $\dfrac{1}{3z-2}$ 的奇点为 $z=\dfrac{2}{3}$，因此它在 $|z|<\dfrac{2}{3}$ 内解析. 此时

$$\frac{1}{3z-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{3z}{2}}$$

典型例题：泰勒展开的计算

例. 求 $\dfrac{1}{3z-2}$ 的麦克劳林展开.

解答. 由于 $\dfrac{1}{3z-2}$ 的奇点为 $z=\dfrac{2}{3}$, 因此它在 $|z|<\dfrac{2}{3}$ 内解析. 此时

$$\frac{1}{3z-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{3z}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{3z}{2}\Big)^n$$

例. 求 $\dfrac{1}{3z-2}$ 的麦克劳林展开.

解答. 由于 $\dfrac{1}{3z-2}$ 的奇点为 $z=\dfrac{2}{3}$, 因此它在 $|z|<\dfrac{2}{3}$ 内解析. 此时

$$\frac{1}{3z-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{3z}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{3z}{2}\Big)^{n}$$
$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n}}{2^{n+1}}z^{n},\quad |z|<\frac{2}{3}.$$

典型例题：泰勒展开的计算

练习. 求 $\dfrac{1}{1-3z+2z^2}$ 的麦克劳林展开.

练习. 求 $\dfrac{1}{1-3z+2z^2}$ 的麦克劳林展开.

答案.

$$\frac{1}{1-3z+2z^2}=\frac{2}{1-2z}-\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}(2^{n+1}-1)z^n,\quad |z|<\frac{1}{2}.$$

第四节　洛朗级数

- 双边幂级数
- 洛朗展开的形式
- 洛朗展开的计算方法

双边幂级数

若解析函数 $f(z)$ 在 z_0 处解析, 那么在 z_0 处可以展开成泰勒级数.

若解析函数 $f(z)$ 在 z_0 处解析, 那么在 z_0 处可以展开成泰勒级数. 若 $f(z)$ 在 z_0 处不解析呢?

若解析函数 $f(z)$ 在 z_0 处解析, 那么在 z_0 处可以展开成泰勒级数. 若 $f(z)$ 在 z_0 处不解析呢? 此时 $f(z)$ 一定不能展开成 $z-z_0$ 的幂级数,

若解析函数 $f(z)$ 在 z_0 处解析，那么在 z_0 处可以展开成泰勒级数. 若 $f(z)$ 在 z_0 处不解析呢？此时 $f(z)$ 一定不能展开成 $z-z_0$ 的幂级数，然而它却可能可以展开为**双边幂级数**

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}}_{\text{负幂次部分}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n}_{\text{非负幂次部分}}.$$

若解析函数 $f(z)$ 在 z_0 处解析，那么在 z_0 处可以展开成泰勒级数. 若 $f(z)$ 在 z_0 处不解析呢？此时 $f(z)$ 一定不能展开成 $z-z_0$ 的幂级数，然而它却可能可以展开为双边幂级数

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}}_{\text{负幂次部分}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n}_{\text{非负幂次部分}}.$$

例如

$$\frac{1}{z^2(1-z)} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + \cdots, \quad 0 < |z| < 1.$$

若解析函数 $f(z)$ 在 z_0 处解析, 那么在 z_0 处可以展开成泰勒级数. 若 $f(z)$ 在 z_0 处不解析呢? 此时 $f(z)$ 一定不能展开成 $z-z_0$ 的幂级数, 然而它却可能可以展开为双边幂级数

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}}_{\text{负幂次部分}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n}_{\text{非负幂次部分}}.$$

例如

$$\frac{1}{z^2(1-z)} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + \cdots, \quad 0 < |z| < 1.$$

双边幂级数的非负幂次部分也叫解析部分, 负幂次部分也叫主要部分.

双边幂级数的敛散性

为了保证双边幂级数的收敛范围有一个好的性质以便于我们使用，我们对它的敛散性作如下定义：

双边幂级数的敛散性

为了保证双边幂级数的收敛范围有一个好的性质以便于我们使用, 我们对它的敛散性作如下定义:

定义. 若双边幂级数的非负幂次部分和负幂次部分作为函数项级数都收敛, 则我们称这个双边幂级数**收敛**. 否则我们称之为**发散**.

双边幂级数的敛散性

为了保证双边幂级数的收敛范围有一个好的性质以便于我们使用，我们对它的敛散性作如下定义:

定义. 若双边幂级数的非负幂次部分和负幂次部分作为函数项级数都收敛，则我们称这个双边幂级数**收敛**. 否则我们称之为**发散**.

注意双边幂级数的敛散性不能像幂级数那样通过部分和形成的数列的极限来定义，

双边幂级数的敛散性

为了保证双边幂级数的收敛范围有一个好的性质以便于我们使用，我们对它的敛散性作如下定义：

定义. 若双边幂级数的非负幂次部分和负幂次部分作为函数项级数都收敛，则我们称这个双边幂级数**收敛**．否则我们称之为**发散**．

注意双边幂级数的敛散性不能像幂级数那样通过部分和形成的数列的极限来定义，因为使用不同的部分和选取方式会影响到极限的数值．

双边幂级数的收敛域

设 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ 的收敛半径为 R_2, 则它在 $|z-z_0|<R_2$ 内收敛, 在 $|z-z_0|>R_2$ 内发散.

双边幂级数的收敛域

设 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ 的收敛半径为 R_2, 则它在 $|z - z_0| < R_2$ 内收敛, 在 $|z - z_0| > R_2$ 内发散.

对于负幂次部分, 令 $\zeta = \dfrac{1}{z - z_0}$, 那么负幂次部分是 ζ 的一个幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \zeta^n$.

双边幂级数的收敛域

设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ 的收敛半径为 R_2, 则它在 $|z-z_0|<R_2$ 内收敛, 在 $|z-z_0|>R_2$ 内发散.

对于负幂次部分, 令 $\zeta=\dfrac{1}{z-z_0}$, 那么负幂次部分是 ζ 的一个幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^n$. 设该幂级数的收敛半径为 R, 则它在 $|\zeta|<R$ 内收敛, 在 $|\zeta|>R$ 内发散.

双边幂级数的收敛域

设 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ 的收敛半径为 R_2, 则它在 $|z-z_0|<R_2$ 内收敛, 在 $|z-z_0|>R_2$ 内发散.

对于负幂次部分, 令 $\zeta=\dfrac{1}{z-z_0}$, 那么负幂次部分是 ζ 的一个幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^n$. 设该幂级数的收敛半径为 R, 则它在 $|\zeta|<R$ 内收敛, 在 $|\zeta|>R$ 内发散. 设 $R_1:=\frac{1}{R}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}$ 在 $|z-z_0|>R_1$ 内收敛, 在 $|z-z_0|<R_1$ 内发散.

设 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ 的收敛半径为 R_2, 则它在 $|z-z_0|<R_2$ 内收敛, 在 $|z-z_0|>R_2$ 内发散.

对于负幂次部分, 令 $\zeta=\dfrac{1}{z-z_0}$, 那么负幂次部分是 ζ 的一个幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^n$. 设该幂级数的收敛半径为 R, 则它在 $|\zeta|<R$ 内收敛, 在 $|\zeta|>R$ 内发散. 设 $R_1:=\frac{1}{R}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}$ 在 $|z-z_0|>R_1$ 内收敛, 在 $|z-z_0|<R_1$ 内发散.

(1) 若 $R_1>R_2$, 则该双边幂级数处处不收敛.

设 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ 的收敛半径为 R_2, 则它在 $|z-z_0|<R_2$ 内收敛, 在 $|z-z_0|>R_2$ 内发散.

对于负幂次部分, 令 $\zeta=\dfrac{1}{z-z_0}$, 那么负幂次部分是 ζ 的一个幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^n$. 设该幂级数的收敛半径为 R, 则它在 $|\zeta|<R$ 内收敛, 在 $|\zeta|>R$ 内发散. 设 $R_1:=\frac{1}{R}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}$ 在 $|z-z_0|>R_1$ 内收敛, 在 $|z-z_0|<R_1$ 内发散.

(1) 若 $R_1>R_2$, 则该双边幂级数处处不收敛.

(2) 若 $R_1=R_2$, 则该双边幂级数只在圆周 $|z-z_0|=R_1$ 上可能有收敛的点.

设 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ 的收敛半径为 R_2, 则它在 $|z-z_0|<R_2$ 内收敛, 在 $|z-z_0|>R_2$ 内发散.

对于负幂次部分, 令 $\zeta=\dfrac{1}{z-z_0}$, 那么负幂次部分是 ζ 的一个幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^n$. 设该幂级数的收敛半径为 R, 则它在 $|\zeta|<R$ 内收敛, 在 $|\zeta|>R$ 内发散. 设 $R_1:=\frac{1}{R}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}$ 在 $|z-z_0|>R_1$ 内收敛, 在 $|z-z_0|<R_1$ 内发散.

(1) 若 $R_1>R_2$, 则该双边幂级数处处不收敛.

(2) 若 $R_1=R_2$, 则该双边幂级数只在圆周 $|z-z_0|=R_1$ 上可能有收敛的点.

(3) 若 $R_1<R_2$, 则该双边幂级数在 $R_1<|z-z_0|<R_2$ 内收敛, 在 $|z-z_0|<R_1$ 或 $>R_2$ 内发散, 在圆周 $|z-z_0|=R_1$ 或 R_2 上既可能发散也可能收敛.

当 $R_1 < R_2$ 时, 称圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 为该**双边幂级数的收敛圆环**.

双边幂级数的收敛域

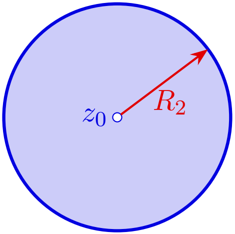
当 $R_1 < R_2$ 时, 称圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 为该**双边幂级数的收敛圆环**.

当 $R_1 = 0$ 或 $R_2 = +\infty$ 时, 圆环域的形状会有所不同.

双边幂级数的收敛域

当 $R_1 < R_2$ 时, 称圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 为该双边幂级数的收敛圆环.

当 $R_1 = 0$ 或 $R_2 = +\infty$ 时, 圆环域的形状会有所不同.

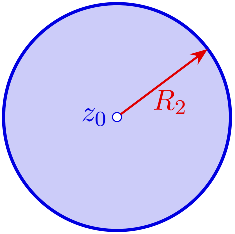


$0 < |z - z_0| < R_2$

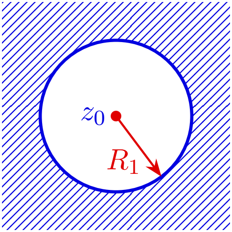
双边幂级数的收敛域

当 $R_1 < R_2$ 时，称圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 为该双边幂级数的收敛圆环.

当 $R_1 = 0$ 或 $R_2 = +\infty$ 时，圆环域的形状会有所不同.



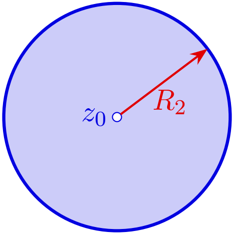
$0 < |z - z_0| < R_2$



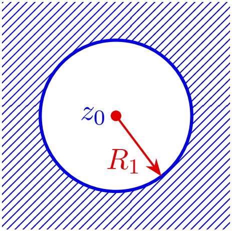
$R_1 < |z - z_0| < +\infty$

当 $R_1 < R_2$ 时, 称圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 为该双边幂级数的收敛圆环.

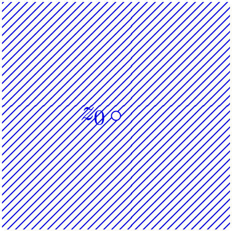
当 $R_1 = 0$ 或 $R_2 = +\infty$ 时, 圆环域的形状会有所不同.



$0 < |z - z_0| < R_2$



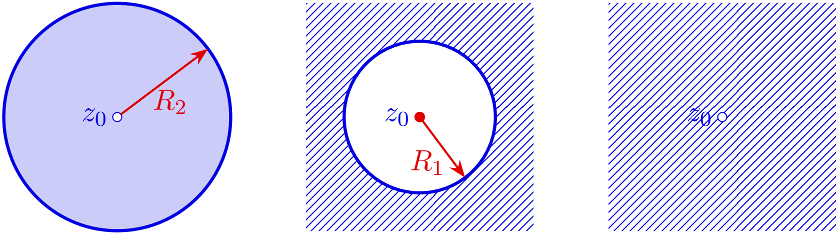
$R_1 < |z - z_0| < +\infty$



$0 < |z - z_0| < +\infty$

当 $R_1 < R_2$ 时，称圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 为该**双边幂级数的收敛圆环**.

当 $R_1 = 0$ 或 $R_2 = +\infty$ 时，圆环域的形状会有所不同.

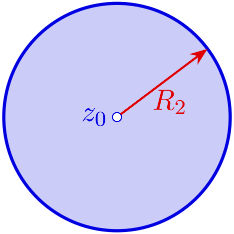


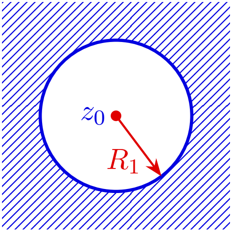
$0 < |z - z_0| < R_2$ $\qquad$ $R_1 < |z - z_0| < +\infty$ $\qquad$ $0 < |z - z_0| < +\infty$

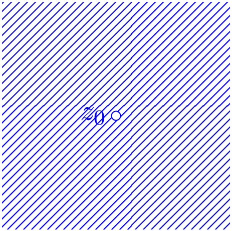
双边幂级数的非负幂次部分和负幂次部分在收敛圆环域内都收敛,

当 $R_1 < R_2$ 时，称圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 为该**双边幂级数的收敛圆环**.

当 $R_1 = 0$ 或 $R_2 = +\infty$ 时，圆环域的形状会有所不同.







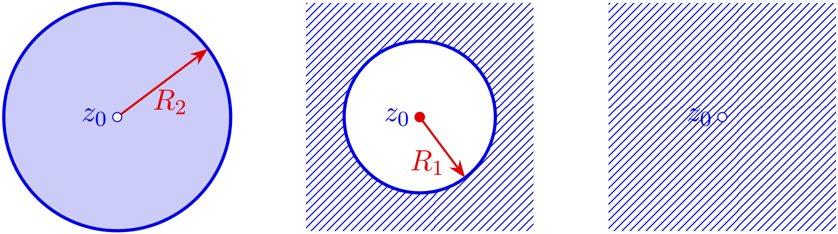
$0 < |z - z_0| < R_2$ $\quad$ $R_1 < |z - z_0| < +\infty$ $\quad$ $0 < |z - z_0| < +\infty$

双边幂级数的非负幂次部分和负幂次部分在收敛圆环域内都收敛，因此它们的和函数都解析 ($\zeta = \dfrac{1}{z - z_0}$ 关于 z 解析)，且可以逐项求导、逐项积分.

双边幂级数的收敛域

当 $R_1 < R_2$ 时, 称圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 为该双边幂级数的收敛圆环.

当 $R_1 = 0$ 或 $R_2 = +\infty$ 时, 圆环域的形状会有所不同.



$0 < |z - z_0| < R_2$ $\quad$ $R_1 < |z - z_0| < +\infty$ $\quad$ $0 < |z - z_0| < +\infty$

双边幂级数的非负幂次部分和负幂次部分在收敛圆环域内都收敛, 因此它们的和函数都解析 ($\zeta = \dfrac{1}{z - z_0}$ 关于 z 解析), 且可以逐项求导、逐项积分. 从而双边幂级数的和函数也是解析的, 且可以逐项求导、逐项积分.

例题：双边幂级数的收敛域

例. 求双边幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(2+\mathrm{i})^n}$ 的收敛域与和函数.

例题：双边幂级数的收敛域

例. 求双边幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(2+\mathrm{i})^n}$ 的收敛域与和函数.

解答. 非负幂次部分收敛圆为 $|z|<|2+\mathrm{i}|=\sqrt{5}$, 负幂次部分收敛圆为 $|z|>|2|=2$.

例题：双边幂级数的收敛域

例. 求双边幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{(2+\mathrm{i})^n}$ 的收敛域与和函数.

解答. 非负幂次部分收敛圆为 $|z| < |2+\mathrm{i}| = \sqrt{5}$, 负幂次部分收敛圆为 $|z| > |2| = 2$. 因此该双边幂级数的收敛圆环为 $2 < |z| < \sqrt{5}$.

例题：双边幂级数的收敛域

例. 求双边幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{z^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{(2+\mathrm{i})^n}$ 的收敛域与和函数.

解答. 非负幂次部分收敛圆为 $|z|<|2+\mathrm{i}|=\sqrt{5}$, 负幂次部分收敛圆为 $|z|>|2|=2$. 因此该双边幂级数的收敛圆环为 $2<|z|<\sqrt{5}$. 此时

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(2+\mathrm{i})^n}=\frac{\frac{2}{z}}{1-\frac{2}{z}}+\frac{1}{1-\frac{z}{2+\mathrm{i}}}=\frac{-\mathrm{i}z}{(z-2)(z-2-\mathrm{i})}.$$

反过来, 在圆环域内解析的函数也一定能展开为双边幂级数, 被称为**洛朗级数**.

反过来, 在圆环域内解析的函数也一定能展开为双边幂级数, 被称为**洛朗级数**.

例如 $f(z) = \dfrac{1}{z(1-z)}$ 在 $z = 0, 1$ 以外解析.

反过来, 在圆环域内解析的函数也一定能展开为双边幂级数, 被称为**洛朗级数**.

例如 $f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)}$ 在 $z=0,1$ 以外解析. 在圆环域 $0<|z|<1$ 内,

$$f(z)=\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}=\frac{1}{z}+1+z+z^2+z^3+\cdots$$

反过来, 在圆环域内解析的函数也一定能展开为双边幂级数, 被称为**洛朗级数**.

例如 $f(z) = \dfrac{1}{z(1-z)}$ 在 $z = 0, 1$ 以外解析. 在圆环域 $0 < |z| < 1$ 内,

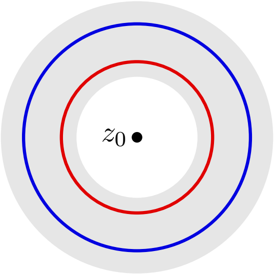
$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$$

在圆环域 $1 < |z| < +\infty$ 内,

$$f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = -\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^4} - \cdots$$

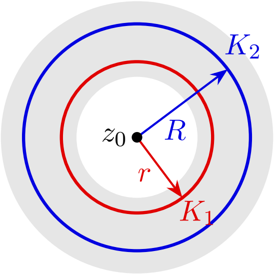
考虑一般情形下的洛朗展开.

考虑一般情形下的洛朗展开. 设 $f(z)$ 在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内解析.



考虑一般情形下的洛朗展开. 设 $f(z)$ 在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内解析. 设

$$K_1 : |z - z_0| = r, \quad K_2 : |z - z_0| = R, \quad R_1 < r < R < R_2.$$



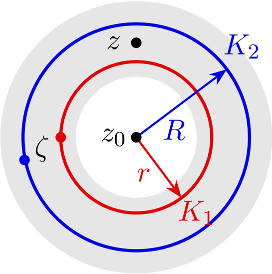
洛朗级数的形式

考虑一般情形下的洛朗展开. 设 $f(z)$ 在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内解析. 设

$$K_1 : |z - z_0| = r, \quad K_2 : |z - z_0| = R, \quad R_1 < r < R < R_2.$$

对于 $r < |z - z_0| < R$, 对复合闭路 $K_2 + K_1^-$ 应用柯西积分公式,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{K_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\oint_{K_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$



和泰勒级数的推导类似,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_2}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\right](z - z_0)^n$$

可以表达为幂级数的形式.

和泰勒级数的推导类似，

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{K_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{K_2}\frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$$

可以表达为幂级数的形式. 对于 $\zeta\in K_1$, 由 $\left|\dfrac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right|<1$ 可得

和泰勒级数的推导类似,

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{K_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{K_2}\frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$$

可以表达为幂级数的形式. 对于 $\zeta\in K_1$, 由 $\left|\dfrac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right|<1$ 可得

$$-\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{\zeta-z_0}{z-z_0}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-z_0)^{-n}}{(\zeta-z_0)^{-n+1}},$$

和泰勒级数的推导类似,

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{K_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{K_2}\frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\right](z - z_0)^n$$

可以表达为幂级数的形式. 对于 $\zeta \in K_1$, 由 $\left|\dfrac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right| < 1$ 可得

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{z - z_0}\cdot\frac{1}{1 - \dfrac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z - z_0)^{-n}}{(\zeta - z_0)^{-n+1}},$$

$$-\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{K_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{K_1} f(\zeta)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z - z_0)^{-n}}{(\zeta - z_0)^{-n+1}}\,\mathrm{d}\zeta.$$

令

$$R_N(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{K_1} f(\zeta) \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(z-z_0)^{-n}}{(\zeta-z_0)^{-n+1}} \,\mathrm{d}\zeta$$
$$= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{K_1} \frac{f(\zeta)}{z-\zeta} \cdot \left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)^{N-1} \mathrm{d}\zeta.$$

令

$$R_N(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{K_1}f(\zeta)\sum_{n=N}^{\infty}\frac{(z-z_0)^{-n}}{(\zeta-z_0)^{-n+1}}\,\mathrm{d}\zeta$$
$$=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{K_1}\frac{f(\zeta)}{z-\zeta}\cdot\left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)^{N-1}\mathrm{d}\zeta.$$

由于 $f(\zeta)$ 在 $D\supseteq K_1$ 上解析, 从而在 K_1 上连续且有界.

洛朗级数的形式

令

$$
\begin{aligned}
R_N(z) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{K_1} f(\zeta) \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(z-z_0)^{-n}}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} \,\mathrm{d}\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{K_1} \frac{f(\zeta)}{z-\zeta} \cdot \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^{N-1} \mathrm{d}\zeta.
\end{aligned}
$$

由于 $f(\zeta)$ 在 $D \supseteq K_1$ 上解析, 从而在 K_1 上连续且有界. 设 $|f(\zeta)| \leqslant M, \zeta \in K_1$,

令

$$R_N(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{K_1} f(\zeta) \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(z-z_0)^{-n}}{(\zeta-z_0)^{-n+1}} \mathrm{d}\zeta$$
$$= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{K_1} \frac{f(\zeta)}{z-\zeta} \cdot \left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)^{N-1} \mathrm{d}\zeta.$$

由于 $f(\zeta)$ 在 $D \supseteq K_1$ 上解析, 从而在 K_1 上连续且有界. 设 $|f(\zeta)| \leqslant M, \zeta \in K_1$, 那么

$$|R_N(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \oint_{K_1} \left| \frac{f(\zeta)}{z-\zeta} \cdot \left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)^{N-1} \right| \mathrm{d}s$$

令

$$R_N(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{K_1}f(\zeta)\sum_{n=N}^{\infty}\frac{(z-z_0)^{-n}}{(\zeta-z_0)^{-n+1}}\mathrm{d}\zeta$$
$$=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{K_1}\frac{f(\zeta)}{z-\zeta}\cdot\left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)^{N-1}\mathrm{d}\zeta.$$

由于 $f(\zeta)$ 在 $D\supseteq K_1$ 上解析, 从而在 K_1 上连续且有界. 设 $|f(\zeta)|\leqslant M,\zeta\in K_1$, 那么

$$|R_N(z)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\oint_{K_1}\left|\frac{f(\zeta)}{z-\zeta}\cdot\left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)^{N-1}\right|\mathrm{d}s$$
$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M}{|z-z_0|-r}\cdot\left|\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right|^{N-1}\cdot 2\pi r\to 0\quad(N\to\infty).$$

故

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{K_2}\frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{K_1}\frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z_0)^{-n+1}}\right](z-z_0)^{-n},$$

其中 $r<|z-z_0|<R$.

故

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{K_2}\frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{K_1}\frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z_0)^{-n+1}}\right](z-z_0)^{-n},$$

其中 $r<|z-z_0|<R$. 由复合闭路定理, K_1, K_2 可以换成任意一条在圆环域内绕 z_0 的闭路 C.

故

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{K_2}\frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{K_1}\frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z_0)^{-n+1}}\right](z-z_0)^{-n},$$

其中 $r<|z-z_0|<R$. 由复合闭路定理, K_1,K_2 可以换成任意一条在圆环域内绕 z_0 的闭路 C. 从而我们得到 **$f(z)$ 在以 z_0 为圆心的圆环域的洛朗展开**

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C}\frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right](z-z_0)^n,$$

其中 $R_1<|z-z_0|<R_2$.

洛朗展开的唯一性

和圆域上解析函数的幂级数展开类似, 圆环域上解析函数的双边幂级数展开也具有唯一性.

和圆域上解析函数的幂级数展开类似，圆环域上解析函数的双边幂级数展开也具有唯一性．设在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内的解析函数 $f(z)$ 可以表达为双边幂级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

和圆域上解析函数的幂级数展开类似, 圆环域上解析函数的双边幂级数展开也具有唯一性. 设在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内的解析函数 $f(z)$ 可以表达为双边幂级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

逐项积分得到

$$\oint_C \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \oint_C (\zeta - z_0)^{k-n-1}\,\mathrm{d}\zeta = 2\pi\mathrm{i}c_n.$$

和圆域上解析函数的幂级数展开类似, 圆环域上解析函数的双边幂级数展开也具有唯一性. 设在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内的解析函数 $f(z)$ 可以表达为双边幂级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

逐项积分得到

$$\oint_C \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \oint_C (\zeta - z_0)^{k-n-1}\,\mathrm{d}\zeta = 2\pi \mathrm{i} c_n.$$

因此 $f(z)$ 在圆环域内的**双边幂级数展开是唯一的, 它就是洛朗级数**.

洛朗展开的唯一性

和圆域上解析函数的幂级数展开类似，圆环域上解析函数的双边幂级数展开也具有唯一性. 设在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内的解析函数 $f(z)$ 可以表达为双边幂级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

逐项积分得到

$$\oint_C \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \oint_C (\zeta - z_0)^{k-n-1}\,\mathrm{d}\zeta = 2\pi \mathrm{i} c_n.$$

因此 $f(z)$ 在圆环域内的双边幂级数展开是唯一的，它就是洛朗级数. 由于计算积分往往较繁琐，因此我们一般不用直接法，而是用双边幂级数的代数、求导、求积分运算来得到洛朗级数.

典型例题：求洛朗展开

例. 将 $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^z-1}{z^2}$ 展开为以 0 为中心的洛朗级数.

例. 将 $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z^2}$ 展开为以 0 为中心的洛朗级数.

由于 $f(z)$ 只有 0 这个奇点, 因此 $f(z)$ 在 $0<|z|<+\infty$ 解析.

典型例题：求洛朗展开

例. 将 $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z^2}$ 展开为以 0 为中心的洛朗级数.

由于 $f(z)$ 只有 0 这个奇点, 因此 $f(z)$ 在 $0<|z|<+\infty$ 解析. 我们先使用直接法解答.

典型例题：求洛朗展开

例. 将 $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^z-1}{z^2}$ 展开为以 0 为中心的洛朗级数.

由于 $f(z)$ 只有 0 这个奇点, 因此 $f(z)$ 在 $0<|z|<+\infty$ 解析. 我们先使用直接法解答.

解答.

$$c_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{\mathrm{e}^z-1}{z^{n+3}}\,\mathrm{d}z=\begin{cases}\dfrac{(\mathrm{e}^z-1)^{(n+2)}}{(n+2)!}\Big|_{z=0}=\dfrac{1}{(n+2)!}, & n\geqslant -3;\\ (\mathrm{e}^z-1)(0)=0, & n=-2;\\ 0, & n\leqslant -1.\end{cases}$$

典型例题：求洛朗展开

例. 将 $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^z-1}{z^2}$ 展开为以 0 为中心的洛朗级数.

由于 $f(z)$ 只有 0 这个奇点, 因此 $f(z)$ 在 $0<|z|<+\infty$ 解析. 我们先使用直接法解答.

解答.

$$c_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{\mathrm{e}^z-1}{z^{n+3}}\,\mathrm{d}z=\begin{cases}\dfrac{(\mathrm{e}^z-1)^{(n+2)}}{(n+2)!}\Big|_{z=0}=\dfrac{1}{(n+2)!}, & n\geqslant -3;\\ (\mathrm{e}^z-1)(0)=0, & n=-2;\\ 0, & n\leqslant -1.\end{cases}$$

故 $f(z)=\dfrac{1}{z}+\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)!}z^n.$

另解.

$$\frac{\mathrm{e}^z-1}{z^2}=\frac{1}{z^2}\left(z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots\right)$$

另解.

$$\frac{\mathrm{e}^z-1}{z^2}=\frac{1}{z^2}\Big(z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots\Big)=\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)!}z^n.$$

典型例题：求洛朗展开

另解.

$$\frac{e^z-1}{z^2}=\frac{1}{z^2}\Big(z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots\Big)=\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)!}z^n.$$

例. 在下列圆环域中把 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 展开为洛朗级数.

另解.

$$\frac{\mathrm{e}^z - 1}{z^2} = \frac{1}{z^2}\Big(z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots\Big) = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} z^n.$$

例. 在下列圆环域中把 $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 展开为洛朗级数.

(1) $0 < |z| < 1$; (2) $1 < |z| < 2$; (3) $2 < |z| < +\infty$.

典型例题：求洛朗展开

另解.

$$\frac{e^z-1}{z^2}=\frac{1}{z^2}\Big(z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots\Big)=\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)!}z^n.$$

例. 在下列圆环域中把 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 展开为洛朗级数.

(1) $0<|z|<1$;　　(2) $1<|z|<2$;　　(3) $2<|z|<+\infty$.

解答. 由于 $f(z)$ 的奇点为 $z=1,2$, 因此在这些圆环域内 $f(z)$ 解析.

另解.

$$\frac{e^z-1}{z^2}=\frac{1}{z^2}\left(z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots\right)=\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)!}z^n.$$

例. 在下列圆环域中把 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 展开为洛朗级数.

(1) $0<|z|<1$;　　(2) $1<|z|<2$;　　(3) $2<|z|<+\infty$.

解答. 由于 $f(z)$ 的奇点为 $z=1,2$, 因此在这些圆环域内 $f(z)$ 解析. 我们有

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}.$$

(1) 由于 $|z| < 1, \left|\dfrac{z}{2}\right| < 1,$

典型例题：求洛朗展开

(1) 由于 $|z|<1, \left|\frac{z}{2}\right|<1$, 因此

$$f(z) = -\frac{1}{2-z} + \frac{1}{1-z}$$

典型例题：求洛朗展开

(1) 由于 $|z| < 1, \left|\frac{z}{2}\right| < 1$，因此

$$f(z) = -\frac{1}{2-z} + \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} + \frac{1}{1-z}$$

典型例题：求洛朗展开

(1) 由于 $|z|<1, \left|\frac{z}{2}\right|<1$, 因此

$$f(z)=-\frac{1}{2-z}+\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}+\frac{1}{1-z}$$
$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^{n}+\sum_{n=0}^{\infty}z^{n}$$

(1) 由于 $|z| < 1, \left|\frac{z}{2}\right| < 1$, 因此

$$f(z) = -\frac{1}{2-z} + \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} + \frac{1}{1-z}$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n$$

典型例题：求洛朗展开

(1) 由于 $|z|<1, \left|\frac{z}{2}\right|<1$, 因此

$$f(z)=-\frac{1}{2-z}+\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z}{2}}+\frac{1}{1-z}$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^{n}+\sum_{n=0}^{\infty}z^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^{n}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}z+\frac{7}{8}z^{2}+\cdots$$

典型例题：求洛朗展开

(2) 由于 $\left|\frac{1}{z}\right| < 1, \left|\frac{z}{2}\right| < 1,$

(2) 由于 $\left|\frac{1}{z}\right| < 1, \left|\frac{z}{2}\right| < 1$, 因此

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z}$$

典型例题：求洛朗展开

(2) 由于 $\left|\frac{1}{z}\right| < 1, \left|\frac{z}{2}\right| < 1$, 因此

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}}$$

(2) 由于 $\left|\frac{1}{z}\right| < 1, \left|\frac{z}{2}\right| < 1$, 因此

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$$

$$= -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

(2) 由于 $\left|\dfrac{1}{z}\right| < 1, \left|\dfrac{z}{2}\right| < 1$，因此

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}}$$

$$= -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}z^n$$

(2) 由于 $\left|\frac{1}{z}\right| < 1, \left|\frac{z}{2}\right| < 1$, 因此

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}}$$

$$= -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n$$

$$= \cdots - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} z - \frac{1}{8} z^2 - \cdots$$

典型例题：求洛朗展开

(3) 由于 $\left|\dfrac{1}{z}\right| < 1, \left|\dfrac{2}{z}\right| < 1,$

(3) 由于 $\left|\frac{1}{z}\right| < 1, \left|\frac{2}{z}\right| < 1$, 因此

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z}$$

典型例题：求洛朗展开

(3) 由于 $\left|\frac{1}{z}\right| < 1, \left|\frac{2}{z}\right| < 1$, 因此

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}}$$

典型例题：求洛朗展开

(3) 由于 $\left|\frac{1}{z}\right| < 1, \left|\frac{2}{z}\right| < 1$, 因此

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}}$$

$$= -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n + \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n$$

典型例题：求洛朗展开

(3) 由于 $\left|\frac{1}{z}\right| < 1, \left|\frac{2}{z}\right| < 1$，因此

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}}$$

$$= -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n + \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n - 1}{z^{n+1}}$$

(3) 由于 $\left|\dfrac{1}{z}\right| < 1, \left|\dfrac{2}{z}\right| < 1$, 因此

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{1}{z}} + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{2}{z}}$$

$$= -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n + \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n-1}{z^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{z^2} + \frac{3}{z^3} + \frac{7}{z^4} + \cdots$$

典型例题：求洛朗展开

例. 将函数 $f(z)=\dfrac{z+1}{(z-1)^2}$ 在圆环域 $0<|z|<1$ 内展开成洛朗级数.

典型例题：求洛朗展开

例. 将函数 $f(z) = \dfrac{z+1}{(z-1)^2}$ 在圆环域 $0 < |z| < 1$ 内展开成洛朗级数.

解答.

$$f(z) = \frac{z-1+2}{(z-1)^2} = \frac{1}{z-1} + \frac{2}{(z-1)^2}.$$

例. 将函数 $f(z)=\dfrac{z+1}{(z-1)^2}$ 在圆环域 $0<|z|<1$ 内展开成洛朗级数.

解答.

$$f(z)=\frac{z-1+2}{(z-1)^2}=\frac{1}{z-1}+\frac{2}{(z-1)^2}.$$

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n,\qquad \frac{1}{(1-z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n,$$

例. 将函数 $f(z)=\dfrac{z+1}{(z-1)^2}$ 在圆环域 $0<|z|<1$ 内展开成洛朗级数.

解答.

$$f(z)=\frac{z-1+2}{(z-1)^2}=\frac{1}{z-1}+\frac{2}{(z-1)^2}.$$

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n,\qquad \frac{1}{(1-z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n,$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}[2(n+1)-1]z^n=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)z^n.$$

求有理函数洛朗展开的步骤

可以看出, 有理函数的洛朗展开通常需要将其分解成部分分式 $\dfrac{1}{(z-a)^m}$ 的线性组合.

可以看出, 有理函数的洛朗展开通常需要将其分解成部分分式 $\dfrac{1}{(z-a)^m}$ 的线性组合. 根据 z 所处的圆环域, 选取 $\dfrac{z-z_0}{a-z_0}$ 和 $\dfrac{a-z_0}{z-z_0}$ 中模小于 1 的数作为公比来求得 $\dfrac{1}{z-a}$ 的洛朗展开.

求有理函数洛朗展开的步骤

可以看出，有理函数的洛朗展开通常需要将其分解成部分分式 $\dfrac{1}{(z-a)^m}$ 的线性组合. 根据 z 所处的圆环域，选取 $\dfrac{z-z_0}{a-z_0}$ 和 $\dfrac{a-z_0}{z-z_0}$ 中模小于 1 的数作为公比来求得 $\dfrac{1}{z-a}$ 的洛朗展开. 然后对其求 $m-1$ 阶导，最后合并相同幂次项的系数.

求有理函数洛朗展开的步骤

可以看出，有理函数的洛朗展开通常需要将其分解成部分分式 $\dfrac{1}{(z-a)^m}$ 的线性组合．根据 z 所处的圆环域，选取 $\dfrac{z-z_0}{a-z_0}$ 和 $\dfrac{a-z_0}{z-z_0}$ 中模小于 1 的数作为公比来求得 $\dfrac{1}{z-a}$ 的洛朗展开．然后对其求 $m-1$ 阶导，最后合并相同幂次项的系数．

洛朗展开的一些特点可以帮助我们检验计算的正确性．

可以看出, 有理函数的洛朗展开通常需要将其分解成部分分式 $\dfrac{1}{(z-a)^m}$ 的线性组合. 根据 z 所处的圆环域, 选取 $\dfrac{z-z_0}{a-z_0}$ 和 $\dfrac{a-z_0}{z-z_0}$ 中模小于 1 的数作为公比来求得 $\dfrac{1}{z-a}$ 的洛朗展开. 然后对其求 $m-1$ 阶导, 最后合并相同幂次项的系数.

洛朗展开的一些特点可以帮助我们检验计算的正确性.

- 若 $f(z)$ 在 $|z-z_0|<R_2$ 内解析,

求有理函数洛朗展开的步骤

可以看出，有理函数的洛朗展开通常需要将其分解成部分分式 $\dfrac{1}{(z-a)^m}$ 的线性组合．根据 z 所处的圆环域，选取 $\dfrac{z-z_0}{a-z_0}$ 和 $\dfrac{a-z_0}{z-z_0}$ 中模小于 1 的数作为公比来求得 $\dfrac{1}{z-a}$ 的洛朗展开．然后对其求 $m-1$ 阶导，最后合并相同幂次项的系数．

洛朗展开的一些特点可以帮助我们检验计算的正确性．

- 若 $f(z)$ 在 $|z-z_0|<R_2$ 内解析，则 $f(z)$ 可以展开为泰勒级数．

求有理函数洛朗展开的步骤

可以看出, 有理函数的洛朗展开通常需要将其分解成部分分式 $\dfrac{1}{(z-a)^m}$ 的线性组合. 根据 z 所处的圆环域, 选取 $\dfrac{z-z_0}{a-z_0}$ 和 $\dfrac{a-z_0}{z-z_0}$ 中模小于 1 的数作为公比来求得 $\dfrac{1}{z-a}$ 的洛朗展开. 然后对其求 $m-1$ 阶导, 最后合并相同幂次项的系数.

洛朗展开的一些特点可以帮助我们检验计算的正确性.

- 若 $f(z)$ 在 $|z-z_0|<R_2$ 内解析, 则 $f(z)$ 可以展开为泰勒级数. 由唯一性可知泰勒级数等于洛朗级数,

求有理函数洛朗展开的步骤

可以看出, 有理函数的洛朗展开通常需要将其分解成部分分式 $\dfrac{1}{(z-a)^m}$ 的线性组合. 根据 z 所处的圆环域, 选取 $\dfrac{z-z_0}{a-z_0}$ 和 $\dfrac{a-z_0}{z-z_0}$ 中模小于 1 的数作为公比来求得 $\dfrac{1}{z-a}$ 的洛朗展开. 然后对其求 $m-1$ 阶导, 最后合并相同幂次项的系数.

洛朗展开的一些特点可以帮助我们检验计算的正确性.

- 若 $f(z)$ 在 $|z-z_0|<R_2$ 内解析, 则 $f(z)$ 可以展开为泰勒级数. 由唯一性可知泰勒级数等于洛朗级数, 因此此处洛朗展开一定没有负幂次项.

求有理函数洛朗展开的步骤

可以看出, 有理函数的洛朗展开通常需要将其分解成部分分式 $\dfrac{1}{(z-a)^m}$ 的线性组合. 根据 z 所处的圆环域, 选取 $\dfrac{z-z_0}{a-z_0}$ 和 $\dfrac{a-z_0}{z-z_0}$ 中模小于 1 的数作为公比来求得 $\dfrac{1}{z-a}$ 的洛朗展开. 然后对其求 $m-1$ 阶导, 最后合并相同幂次项的系数.

洛朗展开的一些特点可以帮助我们检验计算的正确性.

- 若 $f(z)$ 在 $|z-z_0|<R_2$ 内解析, 则 $f(z)$ 可以展开为泰勒级数. 由唯一性可知泰勒级数等于洛朗级数, 因此此处洛朗展开一定没有负幂次项.
- 若有理函数 (分子分母没有公共零点) 在圆周 $|z-z_0|=R_1>0$ 和 $|z-z_0|=R_2>0$ 上都有奇点,

求有理函数洛朗展开的步骤

可以看出，有理函数的洛朗展开通常需要将其分解成部分分式 $\dfrac{1}{(z-a)^m}$ 的线性组合．根据 z 所处的圆环域，选取 $\dfrac{z-z_0}{a-z_0}$ 和 $\dfrac{a-z_0}{z-z_0}$ 中模小于 1 的数作为公比来求得 $\dfrac{1}{z-a}$ 的洛朗展开．然后对其求 $m-1$ 阶导，最后合并相同幂次项的系数．

洛朗展开的一些特点可以帮助我们检验计算的正确性．

- 若 $f(z)$ 在 $|z-z_0|<R_2$ 内解析，则 $f(z)$ 可以展开为泰勒级数．由唯一性可知泰勒级数等于洛朗级数，因此此处洛朗展开一定没有负幂次项．
- 若有理函数 (分子分母没有公共零点) 在圆周 $|z-z_0|=R_1>0$ 和 $|z-z_0|=R_2>0$ 上都有奇点，则在圆环域 $R_1<|z-z_0|<R_2$ 上的洛朗展开一定有无穷多负幂次和无穷多正幂次项．

求有理函数洛朗展开的步骤

可以看出，有理函数的洛朗展开通常需要将其分解成部分分式 $\dfrac{1}{(z-a)^m}$ 的线性组合．根据 z 所处的圆环域，选取 $\dfrac{z-z_0}{a-z_0}$ 和 $\dfrac{a-z_0}{z-z_0}$ 中模小于 1 的数作为公比来求得 $\dfrac{1}{z-a}$ 的洛朗展开．然后对其求 $m-1$ 阶导，最后合并相同幂次项的系数．

洛朗展开的一些特点可以帮助我们检验计算的正确性．

- 若 $f(z)$ 在 $|z-z_0|<R_2$ 内解析，则 $f(z)$ 可以展开为泰勒级数．由唯一性可知泰勒级数等于洛朗级数，因此此处洛朗展开一定没有负幂次项．
- 若有理函数 (分子分母没有公共零点) 在圆周 $|z-z_0|=R_1>0$ 和 $|z-z_0|=R_2>0$ 上都有奇点，则在圆环域 $R_1<|z-z_0|<R_2$ 上的洛朗展开一定有无穷多负幂次和无穷多正幂次项．
- 有理函数在解析区域 $0<|z-z_0|<r$ 的洛朗展开最多只有有限多负幂次项，且最低负幂次是 $z-z_0$ 在分母因式分解中出现的次数;

求有理函数洛朗展开的步骤

可以看出，有理函数的洛朗展开通常需要将其分解成部分分式 $\dfrac{1}{(z-a)^m}$ 的线性组合．根据 z 所处的圆环域，选取 $\dfrac{z-z_0}{a-z_0}$ 和 $\dfrac{a-z_0}{z-z_0}$ 中模小于 1 的数作为公比来求得 $\dfrac{1}{z-a}$ 的洛朗展开．然后对其求 $m-1$ 阶导，最后合并相同幂次项的系数．

洛朗展开的一些特点可以帮助我们检验计算的正确性．

- 若 $f(z)$ 在 $|z-z_0|<R_2$ 内解析，则 $f(z)$ 可以展开为泰勒级数．由唯一性可知泰勒级数等于洛朗级数，因此此处洛朗展开一定没有负幂次项．
- 若有理函数 (分子分母没有公共零点) 在圆周 $|z-z_0|=R_1>0$ 和 $|z-z_0|=R_2>0$ 上都有奇点，则在圆环域 $R_1<|z-z_0|<R_2$ 上的洛朗展开一定有无穷多负幂次和无穷多正幂次项．
- 有理函数在解析区域 $0<|z-z_0|<r$ 的洛朗展开最多只有有限多负幂次项，且最低负幂次是 $z-z_0$ 在分母因式分解中出现的次数；在解析区域 $R<|z-z_0|<+\infty$ 的洛朗展开最多只有有限多正幂次项，且最高正幂次是分子次数减去分母次数．

有理函数 $f(z)$ 在圆环域 $r<|z|<R$ 内的洛朗展开总形如

$$f(z)=P(z)+\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n+\sum_{n<0}b_nz^n,$$

其中 $P(z)$ 只有有限多项,

有理函数 $f(z)$ 在圆环域 $r<|z|<R$ 内的洛朗展开总形如

$$f(z)=P(z)+\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n+\sum_{n<0}b_nz^n,$$

其中 $P(z)$ 只有有限多项, a_n 和 b_n 是形如 $p(n)\lambda^{-n}$ 的线性组合, λ 是奇点, $\deg p+1$ 是 λ 在 $f(z)$ 分母出现的重数,

有理函数 $f(z)$ 在圆环域 $r<|z|<R$ 内的洛朗展开总形如

$$f(z)=P(z)+\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n+\sum_{n<0}b_nz^n,$$

其中 $P(z)$ 只有有限多项, a_n 和 b_n 是形如 $p(n)\lambda^{-n}$ 的线性组合, λ 是奇点, $\deg p+1$ 是 λ 在 $f(z)$ 分母出现的重数, 其中 $|\lambda|\geqslant R$ 的那些项出现在 a_n 中, 而 $|\lambda|\leqslant r$ 的那些项出现在 b_n 中.

洛朗级数的特点

有理函数 $f(z)$ 在圆环域 $r<|z|<R$ 内的洛朗展开总形如

$$f(z)=P(z)+\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n+\sum_{n<0}b_nz^n,$$

其中 $P(z)$ 只有有限多项, a_n 和 b_n 是形如 $p(n)\lambda^{-n}$ 的线性组合, λ 是奇点, $\deg p+1$ 是 λ 在 $f(z)$ 分母出现的重数, 其中 $|\lambda|\geqslant R$ 的那些项出现在 a_n 中, 而 $|\lambda|\leqslant r$ 的那些项出现在 b_n 中. 不仅如此, 从 $f(z)$ 在任一圆环域上的展开可以得到其它圆环域上的展开,

有理函数 $f(z)$ 在圆环域 $r<|z|<R$ 内的洛朗展开总形如

$$f(z)=P(z)+\sum_{n\geqslant 0}a_n z^n+\sum_{n<0}b_n z^n,$$

其中 $P(z)$ 只有有限多项, a_n 和 b_n 是形如 $p(n)\lambda^{-n}$ 的线性组合, λ 是奇点, $\deg p+1$ 是 λ 在 $f(z)$ 分母出现的重数, 其中 $|\lambda|\geqslant R$ 的那些项出现在 a_n 中, 而 $|\lambda|\leqslant r$ 的那些项出现在 b_n 中. 不仅如此, 从 $f(z)$ 在任一圆环域上的展开可以得到其它圆环域上的展开, 只需要将需要变化求和范围的那些项 n 的求和范围变化, 系数变号.

例如在 $0<|z|<1$ 内,

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{120}{(z-1)(z^2-4)(z^2-9)}\\&=\sum_{n\geqslant 0}\Big[-5+\frac{2}{(-2)^{n+1}}+\frac{6}{2^{n+1}}-\frac{1}{(-3)^{n+1}}-\frac{2}{3^{n+1}}\Big]z^n.\end{aligned}$$

例如在 $0 < |z| < 1$ 内,

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{120}{(z-1)(z^2-4)(z^2-9)} \\
&= \sum_{n\geqslant 0}\left[-5 + \frac{2}{(-2)^{n+1}} + \frac{6}{2^{n+1}} - \frac{1}{(-3)^{n+1}} - \frac{2}{3^{n+1}}\right] z^n.
\end{aligned}
$$

那么在 $2 < |z| < 3$ 内洛朗展开需要变动奇点 $1, \pm 2$ 对应的项:

$$
f(z) = \sum_{n\geqslant 0}\left[-\frac{1}{(-3)^{n+1}} - \frac{2}{3^{n+1}}\right] z^n + \sum_{n\leqslant -1}\left[5 - \frac{2}{(-2)^{n+1}} - \frac{6}{2^{n+1}}\right] z^n.
$$

例如在 $0<|z|<1$ 内,

$$f(z)=\frac{120}{(z-1)(z^2-4)(z^2-9)}$$
$$=\sum_{n\geqslant 0}\Big[-5+\frac{2}{(-2)^{n+1}}+\frac{6}{2^{n+1}}-\frac{1}{(-3)^{n+1}}-\frac{2}{3^{n+1}}\Big]z^n.$$

那么在 $2<|z|<3$ 内洛朗展开需要变动奇点 $1,\pm 2$ 对应的项:

$$f(z)=\sum_{n\geqslant 0}\Big[-\frac{1}{(-3)^{n+1}}-\frac{2}{3^{n+1}}\Big]z^n+\sum_{n\leqslant -1}\Big[5-\frac{2}{(-2)^{n+1}}-\frac{6}{2^{n+1}}\Big]z^n.$$

感兴趣的同学可阅读课本相应部分.

典型例题：求洛朗展开

练习. 将函数 $f(z) = \dfrac{z+1}{(z-1)^2}$ 在圆环域 $1 < |z| < +\infty$ 内展开成洛朗级数.

典型例题：求洛朗展开

练习. 将函数 $f(z)=\dfrac{z+1}{(z-1)^2}$ 在圆环域 $1<|z|<+\infty$ 内展开成洛朗级数.

答案.

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n},\qquad -\frac{1}{(z-1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-n}{z^{n+1}}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{z^n},$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(n-1)+1}{z^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{z^n}.$$

典型例题：求洛朗展开

练习. 将函数 $f(z)=\dfrac{z+1}{(z-1)^2}$ 在圆环域 $1<|z|<+\infty$ 内展开成洛朗级数.

答案.

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{z}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n},\qquad -\frac{1}{(z-1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-n}{z^{n+1}}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{z^n},$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(n-1)+1}{z^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{z^n}.$$

此即 $-\sum\limits_{n\leqslant -1}(2n+1)z^n$.

注意到当 $n=-1$ 时，洛朗级数的系数

$$c_{-1}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta,$$

例题：洛朗展开的应用

注意到当 $n=-1$ 时，洛朗级数的系数

$$c_{-1}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta,$$

因此洛朗展开可以用来帮助计算函数的积分，

例题：洛朗展开的应用

注意到当 $n=-1$ 时，洛朗级数的系数

$$c_{-1}=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta,$$

因此洛朗展开可以用来帮助计算函数的积分，这便引出了**留数**的概念.

例题：洛朗展开的应用

例. 求 $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{z}{\sin z^2}\,\mathrm{d}z.$

例. 求 $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{z}{\sin z^2}\,\mathrm{d}z$.

解答. 注意到闭路 $|z|=1$ 落在 $0<|z|<\sqrt{\pi}$ 内.

例. 求 $\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{z}{\sin z^2}\,\mathrm{d}z.$

解答. 注意到闭路 $|z|=1$ 落在 $0<|z|<\sqrt{\pi}$ 内. 我们在这个圆环域内求 $f(z)=\dfrac{z}{\sin z^2}$ 的洛朗展开.

例题：洛朗展开的应用

例. 求 $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{z}{\sin z^2}\,\mathrm{d}z.$

解答. 注意到闭路 $|z|=1$ 落在 $0<|z|<\sqrt{\pi}$ 内. 我们在这个圆环域内求 $f(z)=\dfrac{z}{\sin z^2}$ 的洛朗展开.

$$f(z)=\frac{z}{\sin z^2}=\frac{z}{z^2-\dfrac{z^6}{3!}+\dfrac{z^{10}}{5!}+\cdots}$$

例题：洛朗展开的应用

例. 求 $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{z}{\sin z^2}\,\mathrm{d}z.$

解答. 注意到闭路 $|z|=1$ 落在 $0<|z|<\sqrt{\pi}$ 内. 我们在这个圆环域内求 $f(z)=\dfrac{z}{\sin z^2}$ 的洛朗展开.

$$f(z)=\frac{z}{\sin z^2}=\frac{z}{z^2-\dfrac{z^6}{3!}+\dfrac{z^{10}}{5!}+\cdots}=\frac{1}{z}+\frac{z^3}{6}+\cdots$$

例. 求 $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{z}{\sin z^2}\,\mathrm{d}z.$

解答. 注意到闭路 $|z|=1$ 落在 $0<|z|<\sqrt{\pi}$ 内. 我们在这个圆环域内求 $f(z)=\dfrac{z}{\sin z^2}$ 的洛朗展开.

$$f(z)=\frac{z}{\sin z^2}=\frac{z}{z^2-\dfrac{z^6}{3!}+\dfrac{z^{10}}{5!}+\cdots}=\frac{1}{z}+\frac{z^3}{6}+\cdots$$

故 $\displaystyle\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}c_{-1}=2\pi\mathrm{i}.$

第五节　孤立奇点

- 孤立奇点的类型
- 零点与极点

我们根据奇点附近洛朗展开的形式来对其进行分类，以便后面分类计算留数.

我们根据奇点附近洛朗展开的形式来对其进行分类，以便后面分类计算留数.

例. 考虑函数

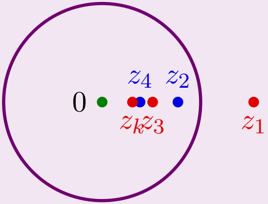
$$f(z) = \frac{1}{\sin(1/z)}.$$

我们根据奇点附近洛朗展开的形式来对其进行分类，以便后面分类计算留数.

例. 考虑函数

$$f(z) = \frac{1}{\sin(1/z)}.$$

显然 $0, z_k = \dfrac{1}{k\pi}$ 是奇点，k 是非零整数.

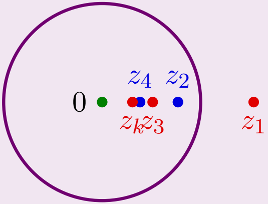


我们根据奇点附近洛朗展开的形式来对其进行分类，以便后面分类计算留数.

例. 考虑函数

$$f(z)=\frac{1}{\sin(1/z)}.$$

显然 $0, z_k=\dfrac{1}{k\pi}$ 是奇点，k 是非零整数. 因为 $\lim\limits_{k\to+\infty} z_k=0$，所以 0 的任何一个去心邻域内都有奇点.



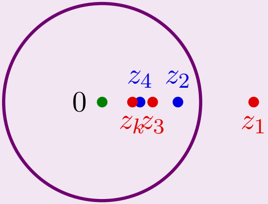
孤立奇点

我们根据奇点附近洛朗展开的形式来对其进行分类, 以便后面分类计算留数.

例. 考虑函数

$$f(z)=\frac{1}{\sin(1/z)}.$$

显然 $0, z_k=\dfrac{1}{k\pi}$ 是奇点, k 是非零整数. 因为 $\lim\limits_{k\to+\infty} z_k=0$, 所以 0 的任何一个去心邻域内都有奇点. 此时无法选取一个圆环域 $0<|z|<\delta$ 作 $f(z)$ 的洛朗展开, 因此我们不考虑这类奇点.



孤立奇点的定义

定义. 若 z_0 是 $f(z)$ 的一个奇点，且 z_0 的某个邻域内没有其它奇点，则称 z_0 是 $f(z)$ 的一个**孤立奇点**.

孤立奇点的定义

定义. 若 z_0 是 $f(z)$ 的一个奇点，且 z_0 的某个邻域内没有其它奇点，则称 z_0 是 $f(z)$ 的一个**孤立奇点**.

例.

孤立奇点的定义

定义. 若 z_0 是 $f(z)$ 的一个奇点，且 z_0 的某个邻域内没有其它奇点，则称 z_0 是 $f(z)$ 的一个**孤立奇点**.

例.

(1) $z=0$ 是 $e^{\frac{1}{z}}, \dfrac{\sin z}{z}$ 的孤立奇点.

孤立奇点的定义

定义. 若 z_0 是 $f(z)$ 的一个奇点，且 z_0 的某个邻域内没有其它奇点，则称 z_0 是 $f(z)$ 的一个**孤立奇点**.

例.

(1) $z=0$ 是 $\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}, \dfrac{\sin z}{z}$ 的孤立奇点.

(2) $z=-1$ 是 $\dfrac{1}{z(z+1)}$ 的孤立奇点.

孤立奇点的定义

定义. 若 z_0 是 $f(z)$ 的一个奇点，且 z_0 的某个邻域内没有其它奇点，则称 z_0 是 $f(z)$ 的一个**孤立奇点**.

例.

(1) $z = 0$ 是 $e^{\frac{1}{z}}, \dfrac{\sin z}{z}$ 的孤立奇点.

(2) $z = -1$ 是 $\dfrac{1}{z(z+1)}$ 的孤立奇点.

(3) $z = 0$ 不是 $\dfrac{1}{\sin(1/z)}$ 的孤立奇点.

定义. 若 z_0 是 $f(z)$ 的一个奇点，且 z_0 的某个邻域内没有其它奇点，则称 z_0 是 $f(z)$ 的一个**孤立奇点**.

例.

(1) $z=0$ 是 $e^{\frac{1}{z}}, \dfrac{\sin z}{z}$ 的孤立奇点.

(2) $z=-1$ 是 $\dfrac{1}{z(z+1)}$ 的孤立奇点.

(3) $z=0$ 不是 $\dfrac{1}{\sin(1/z)}$ 的孤立奇点.

若 $f(z)$ 只有有限多个奇点, 则这些奇点都是孤立奇点.

若 $f(z)$ 在孤立奇点 z_0 的去心邻域 $0 < |z - z_0| < \delta$ 内解析, 则可以作 $f(z)$ 的洛朗展开.

孤立奇点的分类

若 $f(z)$ 在孤立奇点 z_0 的去心邻域 $0 < |z - z_0| < \delta$ 内解析, 则可以作 $f(z)$ 的洛朗展开. 根据该洛朗级数主要部分的项数, 我们可以将孤立奇点分为三种:

若 $f(z)$ 在孤立奇点 z_0 的去心邻域 $0 < |z - z_0| < \delta$ 内解析, 则可以作 $f(z)$ 的洛朗展开. 根据该洛朗级数主要部分的项数, 我们可以将孤立奇点分为三种:

孤立奇点类型	洛朗级数特点	$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$
可去奇点	没有主要部分	存在
m 阶极点	主要部分只有有限项非零 最低次为 $-m$ 次	∞
本性奇点	主要部分有无限项非零	不存在且不为 ∞

可去奇点

定义. 若 $f(z)$ 在孤立奇点 z_0 的去心邻域洛朗级数没有主要部分，即

$$f(z) = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \cdots, \quad 0 < |z-z_0| < \delta,$$

是幂级数，则称 z_0 是 $f(z)$ 的**可去奇点**.

定义. 若 $f(z)$ 在孤立奇点 z_0 的去心邻域洛朗级数没有主要部分，即

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots, \quad 0 < |z - z_0| < \delta,$$

是幂级数，则称 z_0 是 $f(z)$ 的**可去奇点**.

设 $g(z)$ 为右侧幂级数的和函数，则 $g(z)$ 在 $|z - z_0| < \delta$ 上解析，

可去奇点

定义. 若 $f(z)$ 在孤立奇点 z_0 的去心邻域洛朗级数没有主要部分, 即

$$f(z) = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \cdots, \quad 0 < |z-z_0| < \delta,$$

是幂级数, 则称 z_0 是 $f(z)$ 的**可去奇点**.

设 $g(z)$ 为右侧幂级数的和函数, 则 $g(z)$ 在 $|z-z_0| < \delta$ 上解析, 且除 z_0 外 $f(z) = g(z)$.

可去奇点

定义. 若 $f(z)$ 在孤立奇点 z_0 的去心邻域洛朗级数没有主要部分，即

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots, \quad 0 < |z - z_0| < \delta,$$

是幂级数，则称 z_0 是 $f(z)$ 的**可去奇点**.

设 $g(z)$ 为右侧幂级数的和函数，则 $g(z)$ 在 $|z - z_0| < \delta$ 上解析，且除 z_0 外 $f(z) = g(z)$. 通过补充或修改定义 $f(z_0) = g(z_0) = c_0$，可使得 $f(z)$ 也在 z_0 解析.

定义. 若 $f(z)$ 在孤立奇点 z_0 的去心邻域洛朗级数没有主要部分, 即

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots, \quad 0 < |z - z_0| < \delta,$$

是幂级数, 则称 z_0 是 $f(z)$ 的**可去奇点**.

设 $g(z)$ 为右侧幂级数的和函数, 则 $g(z)$ 在 $|z - z_0| < \delta$ 上解析, 且除 z_0 外 $f(z) = g(z)$. 通过补充或修改定义 $f(z_0) = g(z_0) = c_0$, 可使得 $f(z)$ 也在 z_0 解析. 这就是 "可去" 的含义.

可去奇点

定义. 若 $f(z)$ 在孤立奇点 z_0 的去心邻域洛朗级数没有主要部分，即

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots, \quad 0 < |z - z_0| < \delta,$$

是幂级数，则称 z_0 是 $f(z)$ 的**可去奇点**.

设 $g(z)$ 为右侧幂级数的和函数，则 $g(z)$ 在 $|z - z_0| < \delta$ 上解析，且除 z_0 外 $f(z) = g(z)$. 通过补充或修改定义 $f(z_0) = g(z_0) = c_0$，可使得 $f(z)$ 也在 z_0 解析. 这就是 "可去" 的含义.

定理. z_0 是 $f(z)$ 的可去奇点 $\iff \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ 存在 $\iff \lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)f(z) = 0$.

例.

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \cdots$$

没有负幂次项，因此 0 是可去奇点.

例题：可去奇点

例.

$$f(z)=\frac{\sin z}{z}=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots$$

没有负幂次项，因此 0 是可去奇点.

也可以从 $\lim\limits_{z\to 0} zf(z)=\sin 0=0$ 看出.

例题：可去奇点

例.

$$f(z)=\frac{\sin z}{z}=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots$$

没有负幂次项，因此 0 是可去奇点.

也可以从 $\lim\limits_{z\to 0} zf(z)=\sin 0=0$ 看出.

例.

$$f(z)=\frac{\mathrm{e}^z-1}{z}=1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\cdots$$

没有负幂次项，因此 0 是可去奇点.

例.

$$f(z)=\frac{\sin z}{z}=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots$$

没有负幂次项，因此 0 是可去奇点.

也可以从 $\lim_{z\to 0} zf(z)=\sin 0=0$ 看出.

例.

$$f(z)=\frac{\mathrm{e}^z-1}{z}=1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\cdots$$

没有负幂次项，因此 0 是可去奇点.

也可以从 $\lim_{z\to 0} zf(z)=\mathrm{e}^0-1=0$ 看出.

由于可去奇点的性质比较简单，本性奇点的性质较为复杂，我们主要关心的是极点的情形.

极点

由于可去奇点的性质比较简单，本性奇点的性质较为复杂，我们主要关心的是极点的情形.

定义. 若 $f(z)$ 在孤立奇点 z_0 的去心邻域的洛朗级数主要部分只有有限多项非零，即

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \cdots + c_0 + c_1(z-z_0) + \cdots, \quad 0 < |z-z_0| < \delta,$$

其中 $c_{-m} \neq 0, m \geqslant 1$，则称 z_0 是 $f(z)$ 的 m **阶极点**或 m **级极点**.

令

$$g(z)=c_{-m}+c_{-m+1}(z-z_0)+c_{-m+2}(z-z_0)^2+\cdots,$$

则 $g(z)$ 在 z_0 解析且非零,

极点的判定

令

$$g(z)=c_{-m}+c_{-m+1}(z-z_0)+c_{-m+2}(z-z_0)^2+\cdots,$$

则 $g(z)$ 在 z_0 解析且非零, 且

$$f(z)=\frac{g(z)}{(z-z_0)^m}, 0<|z-z_0|<\delta.$$

极点的判定

令

$$g(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z - z_0) + c_{-m+2}(z - z_0)^2 + \cdots ,$$

则 $g(z)$ 在 z_0 解析且非零, 且

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}, 0 < |z - z_0| < \delta.$$

定理.

令

$$g(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z - z_0) + c_{-m+2}(z - z_0)^2 + \cdots,$$

则 $g(z)$ 在 z_0 解析且非零, 且

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}, 0 < |z - z_0| < \delta.$$

定理.

(1) z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶极点 $\iff \lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z)$ 存在且非零.

令

$$g(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z - z_0) + c_{-m+2}(z - z_0)^2 + \cdots ,$$

则 $g(z)$ 在 z_0 解析且非零, 且

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}, 0 < |z - z_0| < \delta.$$

定理.

(1) z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶极点 $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z)$ 存在且非零.

(2) z_0 是 $f(z)$ 的极点 $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

例. $f(z) = \dfrac{3z+2}{z^2(z+2)}$,

典型例题：函数的极点

例. $f(z)=\dfrac{3z+2}{z^2(z+2)}$，由于 $\lim\limits_{z\to 0} z^2 f(z)=1$，因此 0 是二阶极点.

典型例题：函数的极点

例. $f(z)=\dfrac{3z+2}{z^2(z+2)}$，由于 $\lim\limits_{z\to 0} z^2 f(z)=1$，因此 0 是二阶极点. 同理 -2 是一阶极点.

典型例题：函数的极点

例. $f(z) = \dfrac{3z+2}{z^2(z+2)}$, 由于 $\lim\limits_{z\to 0} z^2 f(z) = 1$, 因此 0 是二阶极点. 同理 -2 是一阶极点.

练习. 求 $f(z) = \dfrac{1}{z^3 - z^2 - z + 1}$ 的奇点, 并指出极点的阶.

典型例题：函数的极点

例. $f(z)=\dfrac{3z+2}{z^2(z+2)}$, 由于 $\lim\limits_{z\to 0} z^2 f(z)=1$, 因此 0 是二阶极点. 同理 -2 是一阶极点.

练习. 求 $f(z)=\dfrac{1}{z^3-z^2-z+1}$ 的奇点, 并指出极点的阶.

答案. -1 是一阶极点, 1 是二阶极点.

本性奇点

定义. 若 $f(z)$ 在孤立奇点 z_0 的去心邻域的洛朗级数主要部分有无限多项非零，则称 z_0 是 $f(z)$ 的**本性奇点**.

本性奇点

定义. 若 $f(z)$ 在孤立奇点 z_0 的去心邻域的洛朗级数主要部分有无限多项非零，则称 z_0 是 $f(z)$ 的**本性奇点**.

例. 由于 $\mathrm{e}^{\frac{1}{z}} = 1 + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{2z^2} + \cdots$，因此 0 是本性奇点.

本性奇点

定义. 若 $f(z)$ 在孤立奇点 z_0 的去心邻域的洛朗级数主要部分有无限多项非零，则称 z_0 是 $f(z)$ 的**本性奇点**.

例. 由于 $e^{\frac{1}{z}} = 1 + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{2z^2} + \cdots$，因此 0 是本性奇点.

定理. z_0 是 $f(z)$ 的本性奇点 $\iff \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 不存在也不是 ∞.

本性奇点

定义. 若 $f(z)$ 在孤立奇点 z_0 的去心邻域的洛朗级数主要部分有无限多项非零, 则称 z_0 是 $f(z)$ 的**本性奇点**.

例. 由于 $e^{\frac{1}{z}} = 1 + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{2z^2} + \cdots$, 因此 0 是本性奇点.

定理. z_0 是 $f(z)$ 的本性奇点 $\iff \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 不存在也不是 ∞.

事实上我们有**皮卡大定理**: 对于本性奇点 z_0 的任何一个去心邻域, $f(z)$ 的像取遍所有复数, 至多有一个取不到.

函数的零点

我们来研究极点与零点的联系，并给出极点的阶的计算方法.

我们来研究极点与零点的联系，并给出极点的阶的计算方法.

定义. 若 $f(z)$ 在解析点 z_0 处的泰勒级数最低次项幂次是 $m \geqslant 1$，即

$$f(z) = c_m(z - z_0)^m + c_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \cdots, \quad 0 < |z - z_0| < \delta,$$

其中 $c_m \neq 0$，则称 z_0 是 $f(z)$ 的 m **阶零点**.

我们来研究极点与零点的联系, 并给出极点的阶的计算方法.

定义. 若 $f(z)$ 在解析点 z_0 处的泰勒级数最低次项幂次是 $m \geqslant 1$, 即

$$f(z) = c_m(z-z_0)^m + c_{m+1}(z-z_0)^{m+1} + \cdots, \quad 0 < |z-z_0| < \delta,$$

其中 $c_m \neq 0$, 则称 z_0 是 $f(z)$ 的 m **阶零点**.

此时 $f(z) = (z-z_0)^m g(z)$, $g(z)$ 在 z_0 解析且 $g(z_0) \neq 0$.

我们来研究极点与零点的联系, 并给出极点的阶的计算方法.

定义. 若 $f(z)$ 在解析点 z_0 处的泰勒级数最低次项幂次是 $m \geqslant 1$, 即

$$f(z) = c_m(z-z_0)^m + c_{m+1}(z-z_0)^{m+1} + \cdots, \quad 0 < |z-z_0| < \delta,$$

其中 $c_m \neq 0$, 则称 z_0 是 $f(z)$ 的 m **阶零点**.

此时 $f(z) = (z-z_0)^m g(z)$, $g(z)$ 在 z_0 解析且 $g(z_0) \neq 0$.

定理. 设 $f(z)$ 在 z_0 解析. z_0 是 m 阶零点 $\iff \lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^{-m} f(z)$ 存在

$$\iff f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

例题：函数的零点

例. $f(z) = z(z-1)^3$

例题：函数的零点

例. $f(z) = z(z-1)^3$ 有一阶零点 0 和三阶零点 1.

例题：函数的零点

例. $f(z)=z(z-1)^3$ 有一阶零点 0 和三阶零点 1.

例. $f(z)=\sin z^5-z^5$.

例题：函数的零点

例. $f(z)=z(z-1)^3$ 有一阶零点 0 和三阶零点 1.

例. $f(z)=\sin z^5-z^5$. 由于

$$f(z)=-\frac{z^{15}}{3!}+\frac{z^{25}}{5!}+\cdots$$

因此 0 是 15 阶零点.

定理. 非零的解析函数的零点总是孤立的.

定理. **非零的解析函数的零点总是孤立的.**

证明. 设 $f(z)$ 是区域 D 上的非零解析函数, $z_0 \in D$ 是 $f(z)$ 的一个零点.

定理. 非零的解析函数的零点总是孤立的.

证明. 设 $f(z)$ 是区域 D 上的非零解析函数, $z_0 \in D$ 是 $f(z)$ 的一个零点. 由于 $f(z)$ 不恒为零, 因此存在 $m \geqslant 1$ 使得在 z_0 的一个邻域内 $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$, $g(z)$ 在 z_0 处解析且非零.

定理. 非零的解析函数的零点总是孤立的.

证明. 设 $f(z)$ 是区域 D 上的非零解析函数, $z_0 \in D$ 是 $f(z)$ 的一个零点. 由于 $f(z)$ 不恒为零, 因此存在 $m \geqslant 1$ 使得在 z_0 的一个邻域内 $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$, $g(z)$ 在 z_0 处解析且非零.

对于 $\varepsilon = \frac{1}{2}|g(z_0)|$, 存在 $\delta > 0$ 使得当 $z \in \mathring{U}(z_0, \delta) \subseteq D$ 时, $|g(z) - g(z_0)| < \varepsilon$.

定理. 非零的解析函数的零点总是孤立的.

证明. 设 $f(z)$ 是区域 D 上的非零解析函数, $z_0 \in D$ 是 $f(z)$ 的一个零点. 由于 $f(z)$ 不恒为零, 因此存在 $m \geqslant 1$ 使得在 z_0 的一个邻域内 $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$, $g(z)$ 在 z_0 处解析且非零.

对于 $\varepsilon = \frac{1}{2}|g(z_0)|$, 存在 $\delta > 0$ 使得当 $z \in \mathring{U}(z_0, \delta) \subseteq D$ 时, $|g(z) - g(z_0)| < \varepsilon$. 从而 $g(z) \neq 0$, $f(z) \neq 0$. $\square$

定理. 非零的解析函数的零点总是孤立的.

证明. 设 $f(z)$ 是区域 D 上的非零解析函数, $z_0 \in D$ 是 $f(z)$ 的一个零点. 由于 $f(z)$ 不恒为零, 因此存在 $m \geqslant 1$ 使得在 z_0 的一个邻域内 $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$, $g(z)$ 在 z_0 处解析且非零.

对于 $\varepsilon = \dfrac{1}{2}|g(z_0)|$, 存在 $\delta > 0$ 使得当 $z \in \mathring{U}(z_0, \delta) \subseteq D$ 时, $|g(z) - g(z_0)| < \varepsilon$. 从而 $g(z) \neq 0$, $f(z) \neq 0$. □

若解析函数 $f(z)$ 满足对任意实数 x, $f(x) = \mathrm{e}^x$, 那么所有实数都是解析函数 $f(z) - \mathrm{e}^z$ 的零点, 从而 $f(z) \equiv \mathrm{e}^z$.

下面我们给出分式的奇点和分子分母零点的联系.

下面我们给出分式的奇点和分子分母零点的联系.

命题. 若 z_0 是 f 的 m 阶零点 (若解析且不是零点取 $m=0$), g 的 n 阶零点, 则 z_0 是 fg 的 $m+n$ 阶零点.

下面我们给出分式的奇点和分子分母零点的联系.

命题. 若 z_0 是 f 的 m 阶零点 (若解析且不是零点取 $m=0$), g 的 n 阶零点, 则 z_0 是 fg 的 $m+n$ 阶零点.

命题. 设 z_0 是 f 的 m 阶零点 (若解析且不是零点取 $m=0$), g 的 n 阶零点.

下面我们给出分式的奇点和分子分母零点的联系.

命题. 若 z_0 是 f 的 m 阶零点 (若解析且不是零点取 $m=0$), g 的 n 阶零点, 则 z_0 是 fg 的 $m+n$ 阶零点.

命题. 设 z_0 是 f 的 m 阶零点 (若解析且不是零点取 $m=0$), g 的 n 阶零点.

(1) 若 $m \geqslant n$, 则 z_0 是 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的可去奇点.

下面我们给出分式的奇点和分子分母零点的联系.

命题. 若 z_0 是 f 的 m 阶零点 (若解析且不是零点取 $m=0$), g 的 n 阶零点, 则 z_0 是 fg 的 $m+n$ 阶零点.

命题. 设 z_0 是 f 的 m 阶零点 (若解析且不是零点取 $m=0$), g 的 n 阶零点.

(1) 若 $m \geqslant n$, 则 z_0 是 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的可去奇点.

(2) 若 $m < n$, 则 z_0 是 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的 $n-m$ 阶极点.

典型例题：函数的极点

例. $z=0$ 是函数 $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z^2}$ 的(　　).

(A) 一阶极点　(B) 二阶极点　(C) 三阶极点　(D) 四阶极点

例. $z=0$ 是函数 $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^z-1}{z^2}$ 的(A).

(A) 一阶极点　(B) 二阶极点　(C) 三阶极点　(D) 四阶极点

典型例题：函数的极点

例. $z=0$ 是函数 $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^z-1}{z^2}$ 的(A).

(A) 一阶极点　(B) 二阶极点　(C) 三阶极点　(D) 四阶极点

解答. 由于

$$\mathrm{e}^z-1=z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots,$$

所以 0 是 e^z-1 的一阶零点.

典型例题：函数的极点

例. $z=0$ 是函数 $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z^2}$ 的(A).

(A) 一阶极点　(B) 二阶极点　(C) 三阶极点　(D) 四阶极点

解答. 由于

$$e^z-1=z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots,$$

所以 0 是 e^z-1 的一阶零点. 因此 0 是一阶极点.

典型例题：函数的极点

例. $z=0$ 是 $f(z)=\dfrac{(\mathrm{e}^z-1)^3z^2}{\sin z^7}$ 的几阶极点？

典型例题: 函数的极点

例. $z=0$ 是 $f(z)=\dfrac{(\mathrm{e}^z-1)^3z^2}{\sin z^7}$ 的几阶极点?

解答. 0 是分子的五阶零点, 分母的七阶零点.

典型例题：函数的极点

例. $z=0$ 是 $f(z)=\dfrac{(\mathrm{e}^z-1)^3z^2}{\sin z^7}$ 的几阶极点？

解答. 0 是分子的五阶零点，分母的七阶零点. 因此 0 是二阶极点.

典型例题：函数的极点

例. $z=0$ 是 $f(z)=\dfrac{(\mathrm{e}^z-1)^3z^2}{\sin z^7}$ 的几阶极点？

解答. 0 是分子的五阶零点，分母的七阶零点. 因此 0 是二阶极点.

例. 函数 $f(z)=\dfrac{(z-5)\sin z}{(z-1)^2z^2(z+1)^3}$ 有哪些什么类型的奇点，并指出极点的阶.

典型例题：函数的极点

例. $z=0$ 是 $f(z)=\dfrac{(\mathrm{e}^z-1)^3z^2}{\sin z^7}$ 的几阶极点?

解答. 0 是分子的五阶零点，分母的七阶零点. 因此 0 是二阶极点.

例. 函数 $f(z)=\dfrac{(z-5)\sin z}{(z-1)^2z^2(z+1)^3}$ 有哪些什么类型的奇点，并指出极点的阶.

解答. 1 是二阶极点，0 是一阶极点，-1 是三阶极点.

练习. 函数 $f(z)=\dfrac{z^2+4\pi^2}{z^3(\mathrm{e}^z-1)}$ 有哪些什么类型的奇点, 并指出极点的阶.

练习. 函数 $f(z)=\dfrac{z^2+4\pi^2}{z^3(\mathrm{e}^z-1)}$ 有哪些什么类型的奇点，并指出极点的阶.

答案.

典型例题：奇点的类型

练习. 函数 $f(z) = \dfrac{z^2+4\pi^2}{z^3(\mathrm{e}^z-1)}$ 有哪些什么类型的奇点，并指出极点的阶.

答案.

- $z = 2k\pi\mathrm{i}$ 是一阶极点，$k \neq 0, \pm 1$.

典型例题：奇点的类型

练习. 函数 $f(z)=\dfrac{z^2+4\pi^2}{z^3(\mathrm{e}^z-1)}$ 有哪些什么类型的奇点，并指出极点的阶.

答案.

- $z=2k\pi\mathrm{i}$ 是一阶极点，$k\neq 0,\pm 1$.
- $z=0$ 是四阶极点.

练习. 函数 $f(z)=\dfrac{z^2+4\pi^2}{z^3(\mathrm{e}^z-1)}$ 有哪些什么类型的奇点, 并指出极点的阶.

答案.

- $z=2k\pi\mathrm{i}$ 是一阶极点, $k\neq 0,\pm 1$.
- $z=0$ 是四阶极点.
- $z=\pm 2\pi\mathrm{i}$ 是可去奇点.