

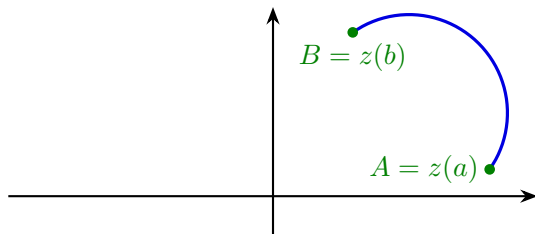
第三章 复变函数的积分

- ① 复变函数积分的概念
- ② 柯西-古萨定理和复合闭路定理
- ③ 柯西积分公式
- ④ 解析函数与调和函数的关系

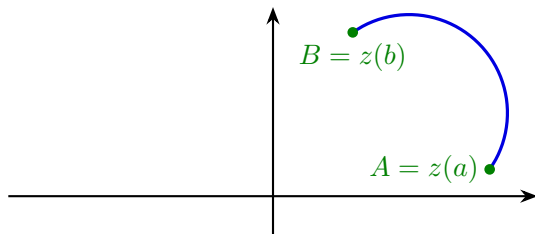
第一节 复变函数积分的概念

- 复变函数积分的定义
- 参变量法计算复变函数积分
- 长大不等式和大小圆弧引理

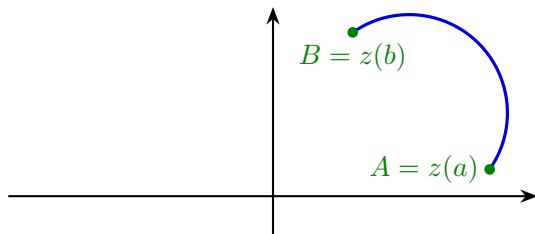
设 C 是平面上一条光滑或逐段光滑的连续曲线,



设 C 是平面上一条光滑或逐段光滑的连续曲线, 也就是说它的参数方程 $z = z(t), a \leq t \leq b$ 除去有限个点之外都有非零导数.

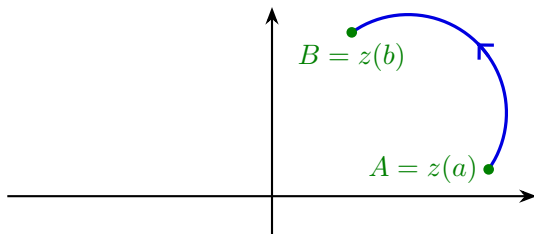


设 C 是平面上一条光滑或逐段光滑的连续曲线, 也就是说它的参数方程 $z = z(t), a \leq t \leq b$ 除去有限个点之外都有非零导数. 这里 $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$.



设 C 是平面上一条光滑或逐段光滑的连续曲线, 也就是说它的参数方程 $z = z(t), a \leq t \leq b$ 除去有限个点之外都有非零导数. 这里 $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$.

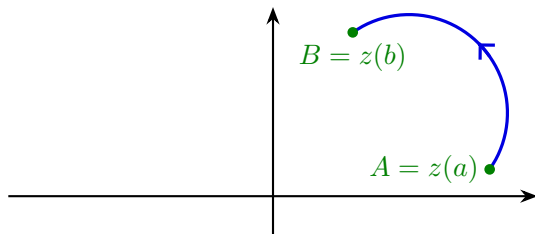
固定它的一个方向, 称为**正方向**, 则我们得到一条**有向曲线**.



有向曲线

设 C 是平面上一条光滑或逐段光滑的连续曲线, 也就是说它的参数方程 $z = z(t), a \leq t \leq b$ 除去有限个点之外都有非零导数. 这里 $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$.

固定它的一个方向, 称为**正方向**, 则我们得到一条**有向曲线**. 和这条曲线方向相反的记作 C^- , 它的方向被称为该曲线**负方向**.

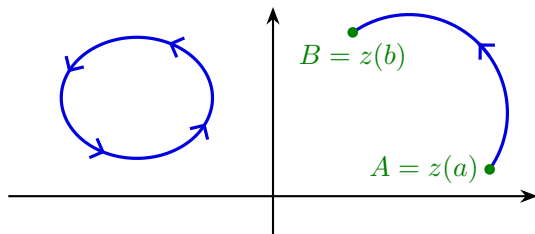


有向曲线

设 C 是平面上一条光滑或逐段光滑的连续曲线, 也就是说它的参数方程 $z = z(t), a \leq t \leq b$ 除去有限个点之外都有非零导数. 这里 $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$.

固定它的一个方向, 称为**正方向**, 则我们得到一条**有向曲线**. 和这条曲线方向相反的记作 C^- , 它的方向被称为该曲线**负方向**.

对于闭路, 它的**正方向总是指逆时针方向**, 负方向总是指顺时针方向.

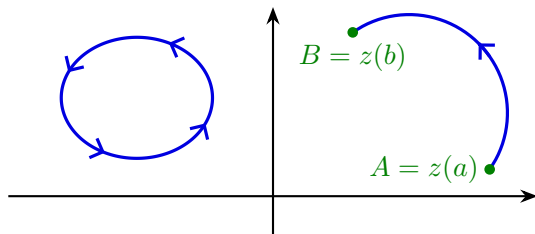


有向曲线

设 C 是平面上一条光滑或逐段光滑的连续曲线, 也就是说它的参数方程 $z = z(t), a \leq t \leq b$ 除去有限个点之外都有非零导数. 这里 $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$.

固定它的一个方向, 称为**正方向**, 则我们得到一条**有向曲线**. 和这条曲线方向相反的记作 C^- , 它的方向被称为该曲线**负方向**.

对于闭路, 它的**正方向总是指逆时针方向**, 负方向总是指顺时针方向. 以后我们不加说明的话**默认是正方向**.



所谓的复变函数积分, 本质上仍然是第二类曲线积分.

所谓的复变函数积分, 本质上仍然是第二类曲线积分. 设复变函数

$$w = f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$$

定义在区域 D 内, 有向曲线 C 包含在 D 中.

所谓的复变函数积分, 本质上仍然是第二类曲线积分. 设复变函数

$$w = f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$$

定义在区域 D 内, 有向曲线 C 包含在 D 中. 形式地展开

$$f(z) dz = (u + i v)(dx + i dy) = (u dx - v dy) + i(u dy + v dx).$$

所谓的复变函数积分, 本质上仍然是第二类曲线积分. 设复变函数

$$w = f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$$

定义在区域 D 内, 有向曲线 C 包含在 D 中. 形式地展开

$$f(z) dz = (u + i v)(dx + i dy) = (u dx - v dy) + i(u dy + v dx).$$

定义. 若下述右侧两个线积分均存在, 则定义

$$\int_C f(z) dz = \int_C (u dx - v dy) + i \int_C (v dx + u dy)$$

为 $f(z)$ 沿曲线 C 的积分.

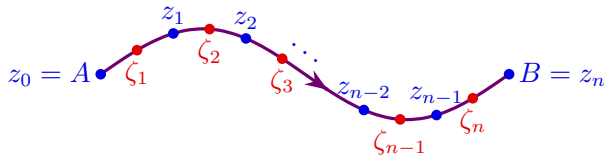
当然, 我们也可以像线积分那样通过分割来定义.



当然, 我们也可以像线积分那样通过分割来定义. 在曲线 C 上依次选择分点 $z_0 = A, z_1, \dots, z_{n-1}, z_n = B$. 然后在每一段弧上任取 $\zeta_k \in \overbrace{z_{k-1} z_k}$ 并作和式

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k, \quad \Delta z_k = z_k - z_{k-1}.$$

然后称 $n \rightarrow \infty$, 分割的最大弧长 $\rightarrow 0$ 时 S_n 的极限为复变函数积分.



若 C 是闭路, 则该积分记为 $\oint_C f(z) dz$.

若 C 是闭路, 则该积分记为 $\oint_C f(z) dz$. 此时该积分不依赖端点的选取.

若 C 是实轴上的区间 $[a, b]$ 且 $f(z) = u(x)$, 则

$$\int_C f(z) \, dz = \int_a^b f(z) \, dz = \int_a^b u(x) \, dx$$

就是黎曼积分.

根据线积分的存在性条件可知:

定理. 若 $f(z)$ 在 D 内连续, C 是光滑曲线, 则 $\int_C f(z) dz$ 总存在.

线积分中诸如变量替换等技巧可以照搬过来使用.

线积分中诸如变量替换等技巧可以照搬过来使用. 设

$$C : z(t) = x(t) + iy(t), \quad a \leq t \leq b$$

是一条光滑有向曲线, 且正方向为 t 增加的方向,

线积分中诸如变量替换等技巧可以照搬过来使用. 设

$$C : z(t) = x(t) + iy(t), \quad a \leq t \leq b$$

是一条光滑有向曲线, 且正方向为 t 增加的方向, 则 $dz = z'(t) dt = [x'(t) + iy'(t)] dt$.

线积分中诸如变量替换等技巧可以照搬过来使用. 设

$$C : z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t), \quad a \leq t \leq b$$

是一条光滑有向曲线, 且正方向为 t 增加的方向, 则 $dz = z'(t) dt = [x'(t) + iy'(t)] dt$.

积分计算方法 I: 参变量法.

$$\int_C f(z) \, dz = \int_a^b f[z(t)] z'(t) \, dt.$$

线积分中诸如变量替换等技巧可以照搬过来使用. 设

$$C: z(t) = x(t) + iy(t), \quad a \leq t \leq b$$

是一条光滑有向曲线, 且正方向为 t 增加的方向, 则 $dz = z'(t) dt = [x'(t) + iy'(t)] dt$.

积分计算方法 I: 参变量法.

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f[z(t)] z'(t) dt.$$

若 C 的正方向是从 $z(b)$ 到 $z(a)$, 则需要交换右侧积分的上下限.

线积分中诸如变量替换等技巧可以照搬过来使用. 设

$$C: z(t) = x(t) + iy(t), \quad a \leq t \leq b$$

是一条光滑有向曲线, 且正方向为 t 增加的方向, 则 $dz = z'(t) dt = [x'(t) + iy'(t)] dt$.

积分计算方法 I: 参变量法.

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f[z(t)] z'(t) dt.$$

若 C 的正方向是从 $z(b)$ 到 $z(a)$, 则需要交换右侧积分的上下限.

若 C 是逐段光滑的, 则相应的积分就是各段的积分之和.

线积分中诸如变量替换等技巧可以照搬过来使用. 设

$$C : z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t), \quad a \leq t \leq b$$

是一条光滑有向曲线, 且正方向为 t 增加的方向, 则 $dz = z'(t) dt = [x'(t) + iy'(t)] dt$.

积分计算方法 I: 参变量法.

$$\int_C f(z) \, dz = \int_a^b f[z(t)] z'(t) \, dt.$$

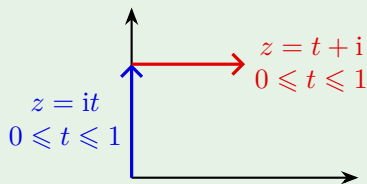
若 C 的正方向是从 $z(b)$ 到 $z(a)$, 则需要交换右侧积分的上下限.

若 C 是逐段光滑的, 则相应的积分就是各段的积分之和. 以后我们只考虑逐段光滑曲线上的连续函数的积分.

典型例题：计算复变函数沿曲线的积分

例. 求 $\int_C \operatorname{Re} z \, dz$, 其中 C 是从原点到点 i 再到 $1+i$ 的折线段.

解. 第一段 $z = it, 0 \leq t \leq 1, \operatorname{Re} z = 0$, 第二段 $z = t + i, 0 \leq t \leq 1, \operatorname{Re} z = t$.

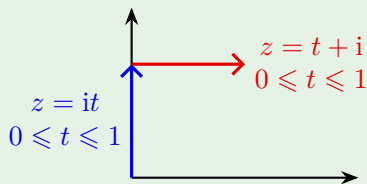


典型例题：计算复变函数沿曲线的积分

例. 求 $\int_C \operatorname{Re} z \, dz$, 其中 C 是从原点到点 i 再到 $1+i$ 的折线段.

解. 第一段 $z = it, 0 \leq t \leq 1, \operatorname{Re} z = 0$, 第二段 $z = t + i, 0 \leq t \leq 1, \operatorname{Re} z = t$. 因此

$$\int_C \operatorname{Re} z \, dz = \int_0^1 t \, dt = \frac{1}{2}.$$

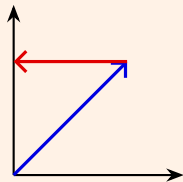


可以看出, 即便起点和终点相同, 沿不同路径 $f(z) = \operatorname{Re} z$ 的积分也可能不同. 而 $f(z) = z$ 的积分则只和起点和终点位置有关, 与路径无关.

典型例题：计算复变函数沿曲线的积分

可以看出, 即便起点和终点相同, 沿不同路径 $f(z) = \operatorname{Re} z$ 的积分也可能不同. 而 $f(z) = z$ 的积分则只和起点和终点位置有关, 与路径无关. 原因在于 $f(z) = z$ 是处处解析的, 我们会在下一节解释为何如此.

练习. 求 $\int_C \operatorname{Im} z \, dz = \underline{-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}}$, 其中 C 是从原点沿 $y = x$ 到点 $1 + i$ 再到 i 的折线段.



例题：计算复变函数沿圆周的积分

例. 求 $\oint_{|z-z_0|=r} \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}}$, 其中 n 为整数.

长大不等式. 设有向曲线 C 的长度为 L , $f(z)$ 在 C 上满足 $|f(z)| \leq M$, 则

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| ds \leq ML.$$

长大不等式. 设有向曲线 C 的长度为 L , $f(z)$ 在 C 上满足 $|f(z)| \leq M$, 则

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| ds \leq ML.$$

证明. 对

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(\zeta_k) \Delta z_k| \leq \sum_{k=1}^n |f(\zeta_k)| \Delta s_k \leq M \sum_{k=1}^n \Delta s_k$$

长大不等式. 设有向曲线 C 的长度为 L , $f(z)$ 在 C 上满足 $|f(z)| \leq M$, 则

$$\left| \int_C f(z) \, dz \right| \leq \int_C |f(z)| \, ds \leq ML.$$

证明. 对

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(\zeta_k) \Delta z_k| \leq \sum_{k=1}^n |f(\zeta_k)| \Delta s_k \leq M \sum_{k=1}^n \Delta s_k$$

取极限即可.



$$\left| \int_C f(z) \, dz \right| \leq \int_C |f(z)| \, ds \leq ML.$$
$$\left| \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(\zeta_k) \Delta z_k| \leq \sum_{k=1}^n |f(\zeta_k)| \Delta s_k \leq M \sum_{k=1}^n \Delta s_k$$


长大不等式. 设有向曲线 C 的长度为 L , $f(z)$ 在 C 上满足 $|f(z)| \leq M$, 则

$$\left| \int_C f(z) \, dz \right| \leq \int_C |f(z)| \, ds \leq ML.$$

证明. 对

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(\zeta_k) \Delta z_k| \leq \sum_{k=1}^n |f(\zeta_k)| \Delta s_k \leq M \sum_{k=1}^n \Delta s_k$$

取极限即可.

长大不等式常常用于证明等式: 估算一个积分和一个具体的数值之差不超过任意给定的 ε , 从而得到二者相等.

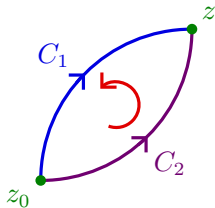
注意到: 若被积函数 $f(z)$ 在 C 上的点都连续, 那么 $|f(z)|$ 是 C 的参变量 $t \in [a, b]$ 的连续函数, 从而有界, 即存在 M 使得 $|f(z)| \leq M, \forall z \in C$.

第二节 柯西-古萨定理和复合闭路定理

- 柯西-古萨定理
- 复合闭路定理和连续变形定理
- 原函数和不定积分

观察下方的两条曲线 C_1, C_2 . 设 $C = C_1^- + C_2$. 可以看出

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz \iff \oint_C f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz - \int_{C_1} f(z) dz = 0.$$

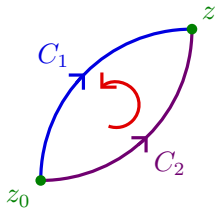


积分路径无关与闭路积分

观察下方的两条曲线 C_1, C_2 . 设 $C = C_1^- + C_2$. 可以看出

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz \iff \oint_C f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz - \int_{C_1} f(z) dz = 0.$$

所以 $f(z)$ 的积分只与起点终点有关 $\iff f(z)$ 绕任意闭路的积分为零.



上一节中我们计算了 $f(z) = z, \operatorname{Re} z, \frac{1}{z - z_0}$ 的积分.

上一节中我们计算了 $f(z) = z, \operatorname{Re} z, \frac{1}{z - z_0}$ 的积分. 其中

上一节中我们计算了 $f(z) = z, \operatorname{Re} z, \frac{1}{z - z_0}$ 的积分. 其中

- $f(z) = z$ 处处解析, 积分只与起点终点有关 (闭路积分为零);

上一节中我们计算了 $f(z) = z, \operatorname{Re} z, \frac{1}{z - z_0}$ 的积分. 其中

- $f(z) = z$ 处处解析, 积分只与起点终点有关 (闭路积分为零);
- $f(z) = \frac{1}{z - z_0}$ 有奇点 z_0 , 沿绕 z_0 闭路的积分非零;
- $f(z) = \operatorname{Re} z$ 处处不解析, 积分与路径有关 (闭路积分可能非零).

上一节中我们计算了 $f(z) = z, \operatorname{Re} z, \frac{1}{z - z_0}$ 的积分. 其中

- $f(z) = z$ 处处解析, 积分只与起点终点有关 (闭路积分为零);
- $f(z) = \frac{1}{z - z_0}$ 有奇点 z_0 , 沿绕 z_0 闭路的积分非零;
- $f(z) = \operatorname{Re} z$ 处处不解析, 积分与路径有关 (闭路积分可能非零).

由此可见函数沿闭路积分为零.

上一节中我们计算了 $f(z) = z, \operatorname{Re} z, \frac{1}{z - z_0}$ 的积分. 其中

- $f(z) = z$ 处处解析, 积分只与起点终点有关 (闭路积分为零);
- $f(z) = \frac{1}{z - z_0}$ 有奇点 z_0 , 沿绕 z_0 闭路的积分非零;
- $f(z) = \operatorname{Re} z$ 处处不解析, 积分与路径有关 (闭路积分可能非零).

由此可见函数沿闭路积分为零, 与函数在闭路内部是否解析有关.

复合闭路定理. 设 $f(z)$ 在复合闭路 $C = C_0 + C_1^- + \cdots + C_n^-$ 及其所围成的多连通区域内解析, 则

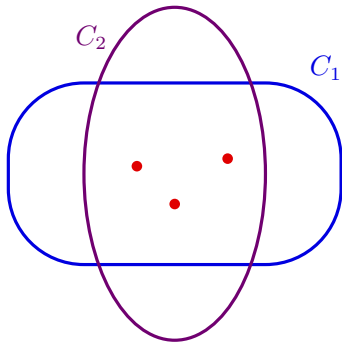
$$\oint_{C_0} f(z) \, dz = \oint_{C_1} f(z) \, dz + \cdots + \oint_{C_n} f(z) \, dz.$$

复合闭路定理. 设 $f(z)$ 在复合闭路 $C = C_0 + C_1^- + \cdots + C_n^-$ 及其所围成的多连通区域内解析, 则

$$\oint_{C_0} f(z) \, dz = \oint_{C_1} f(z) \, dz + \cdots + \oint_{C_n} f(z) \, dz.$$

事实上, 复合闭路定理和柯西-古萨定理可以看成是一个定理的两种情形:

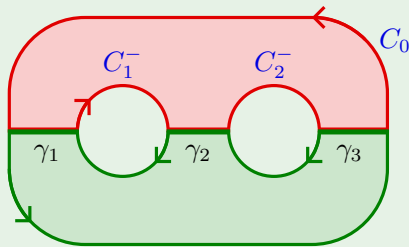
此外, 从复合闭路定理还可以看出, 在计算积分 $\oint_C f(z) dz$ 时, C 的具体形状无关紧要, 只要其内部奇点不变, C 可以任意变形.



复合闭路定理

证明. 以曲线 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n+1}$ 把 $C_0, C_1, \dots, C_n$ 连接起来, 则它们把区域 D 分成了两个单连通区域 D_1, D_2 . 对 D_1 和 D_2 的边界应用柯西-古萨定理并相加, 则 γ_i 对应的部分正好相互抵消, 因此

$$\oint_{C_0} f(z) \, dz - \oint_{C_1} f(z) \, dz - \cdots - \oint_{C_n} f(z) \, dz = 0.$$



例题: 复合闭路定理的应用

例. 证明对于任意闭路 C , $\oint_C (z-a)^n dz = 0$, $n \neq -1$ 为整数.

证明.

(1) 若 a 不在 C 的内部, 则 $(z-a)^n$ 在 C 及其内部解析. 由柯西-古萨定理,

$$\oint_C (z-a)^n dz = 0.$$

例题: 复合闭路定理的应用

例. 证明对于任意闭路 C , $\oint_C (z-a)^n dz = 0$, $n \neq -1$ 为整数.

证明.

(1) 若 a 不在 C 的内部, 则 $(z-a)^n$ 在 C 及其内部解析. 由柯西-古萨定理,

$$\oint_C (z-a)^n dz = 0.$$

(2) 若 a 在 C 的内部, 则在 C 的内部取一个以 a 为圆心的圆周 C_1 . 由复合闭路定理以及上一节的结论

$$\oint_C (z-a)^n dz = \oint_{C_1} (z-a)^n dz = 0.$$

□

例题：复合闭路定理的应用

同理, 由复合闭路定理和上一节的结论可知当 a 在 C 的内部且 $n = -1$ 时积分为 $2\pi i$.

定理. 当 a 在 C 的内部时,

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^{n+1}} = \begin{cases} 2\pi i, & n=0; \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

证明. 设 $C_R: |z| = R$.

注意闭路 C 内部必须包含 $f(z)$ 的所有奇点上述结论方可成立. 若 $m \geq n$, 则我们可将 $f(z)$ 写成一个多项式和上述形式有理函数之和.

练习. $\oint_{|z|=2} \frac{z^2}{(2z+1)(z^2+1)} dz = \underline{\hspace{2cm}}.$

例题: 有理函数绕闭路积分

注意闭路 C 内部必须包含 $f(z)$ 的所有奇点上述结论方可成立. 若 $m \geq n$, 则我们可将 $f(z)$ 写成一个多项式和上述形式有理函数之和.

练习. $\oint_{|z|=2} \frac{z^2}{(2z+1)(z^2+1)} dz = \underline{\pi i}.$

不过, 不同于单变量实函数的情形, 并不是所有的连续函数都有原函数.

设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, C 是 D 内一条起于 z_0 终于 z 的曲线. 由柯西-古萨定理可知, 积分 $\int_C f(\zeta) d\zeta$ 与路径无关, 只与 z_0, z 有关. 因此我们也将记为

$$\int_{z_0}^z f(\zeta) \, d\zeta.$$

定理. 固定 $z_0 \in D$, 则函数

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) \, d\zeta.$$

是 D 内的解析函数, 且 $F'(z) = f(z)$.

不过, 不同于单变量实函数的情形, 并不是所有的连续函数都有原函数.

设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, C 是 D 内一条起于 z_0 终于 z 的曲线. 由柯西-古萨定理可知, 积分 $\int_C f(\zeta) d\zeta$ 与路径无关, 只与 z_0, z 有关. 因此我们也将记为

$$\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta.$$

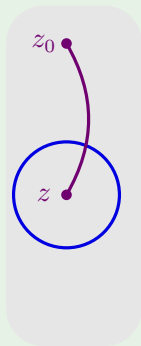
定理. 固定 $z_0 \in D$, 则函数

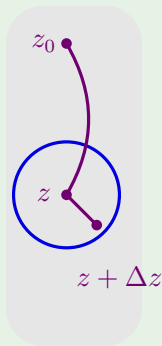
$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) \, d\zeta.$$

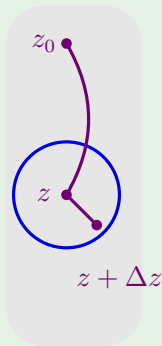
是 D 内的解析函数, 且 $F'(z) = f(z)$.

由此可知, 单连通区域上的解析函数总有原函数.

证明. 以 z 为中心作一包含在 D 内的圆 K ,



$$\begin{aligned} F(z + \Delta z) - F(z) &= \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta) \, d\zeta - \int_{z_0}^z f(\zeta) \, d\zeta \\ &= \int_z^{z+\Delta z} f(\zeta) \, d\zeta. \end{aligned}$$


$$\begin{aligned} F(z + \Delta z) - F(z) &= \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta) \, d\zeta - \int_{z_0}^z f(\zeta) \, d\zeta \\ &= \int_z^{z+\Delta z} f(\zeta) \, d\zeta. \end{aligned}$$
$$\int_z^{z+\Delta z} f(z) \, d\zeta = f(z) \int_z^{z+\Delta z} d\zeta = f(z) \Delta z.$$


积分计算方法 II: 原函数法. 设 $f(z)$ 在单连通区域 D 上解析, z_1 至 z_2 的积分路径落在 D 内, 则

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = F(z) \Big|_{z_1}^{z_2} = F(z_2) - F(z_1),$$

其中 $F(z)$ 是 $f(z)$ 的一个原函数.

积分计算方法 II: 原函数法. 设 $f(z)$ 在单连通区域 D 上解析, z_1 至 z_2 的积分路径落在 D 内, 则

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = F(z) \Big|_{z_1}^{z_2} = F(z_2) - F(z_1),$$

其中 $F(z)$ 是 $f(z)$ 的一个原函数.

由于导函数为 0 的函数只能是常值函数, 因此

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(z) dz + C.$$

积分计算方法 II: 原函数法. 设 $f(z)$ 在单连通区域 D 上解析, z_1 至 z_2 的积分路径落在 D 内, 则

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = F(z) \Big|_{z_1}^{z_2} = F(z_2) - F(z_1),$$

其中 $F(z)$ 是 $f(z)$ 的一个原函数.

由于导函数为 0 的函数只能是常值函数, 因此

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(z) dz + C.$$

我们称之为 $f(z)$ 的**不定积分**, 记为 $\int f(z) dz$.

典型例题: 利用原函数求积分

例. 求 $\int_{z_0}^{z_1} z \, dz$.

解. 由于 $f(z) = z$ 处处解析, 且 $\int z \, dz = \frac{1}{2}z^2 + C$,

典型例题: 利用原函数求积分

例. 求 $\int_{z_0}^{z_1} z \, dz$.

解. 由于 $f(z) = z$ 处处解析, 且 $\int z \, dz = \frac{1}{2}z^2 + C$, 因此

$$\int_{z_0}^{z_1} z \, dz = \frac{1}{2}z^2 \Big|_{z_0}^{z_1} = \frac{1}{2}(z_1^2 - z_0^2).$$

典型例题: 利用原函数求积分

例. 求 $\int_{z_0}^{z_1} z \, dz$.

解. 由于 $f(z) = z$ 处处解析, 且 $\int z \, dz = \frac{1}{2}z^2 + C$, 因此

$$\int_{z_0}^{z_1} z \, dz = \frac{1}{2}z^2 \Big|_{z_0}^{z_1} = \frac{1}{2}(z_1^2 - z_0^2).$$

因此之前的例子中 $\int_0^{3+4i} z \, dz = -\frac{7}{2} + 12i$, 无论从 0 到 $3 + 4i$ 的路径如何.

典型例题：利用原函数求积分

例. 求 $\int_0^i z \cos z \, dz$.

第三节 柯西积分公式

- 柯西积分公式
- 高阶导数的柯西积分公式

柯西-古萨定理是解析函数理论的基础,但在很多情形下它由柯西积分公式表现.

柯西-古萨定理是解析函数理论的基础,但在很多情形下它由柯西积分公式表现.

柯西积分公式. 设

- 函数 $f(z)$ 在闭路 C 及其内部 D 解析,
- $z_0 \in D$,

柯西-古萨定理是解析函数理论的基础,但在很多情形下它由柯西积分公式表现.

柯西积分公式. 设

- 函数 $f(z)$ 在闭路 C 及其内部 D 解析,
- $z_0 \in D$,

则

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

柯西-古萨定理是解析函数理论的基础,但在很多情形下它由柯西积分公式表现.

柯西积分公式. 设

- 函数 $f(z)$ 在闭路 C 及其内部 D 解析,
- $z_0 \in D$,

则

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

若 $z_0 \notin \overline{D}$, 由柯西-古萨定理, 右侧的积分是 0.

解析函数可以用一个积分

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in D$$

来表示, 这是研究解析函数理论的强有力工具.

解析函数可以用一个积分

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in D$$

来表示, 这是研究解析函数理论的强有力工具.

解析函数在闭路 C 内部的取值完全由它在 C 上的值所确定. 这也是解析函数的特征之一.

解析函数可以用一个积分

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in D$$

来表示, 这是研究解析函数理论的强有力工具.

解析函数在闭路 C 内部的取值完全由它在 C 上的值所确定. 这也是解析函数的特征之一. 特别地, 解析函数在圆心处的值等于它在圆周上的平均值.

解析函数可以用一个积分

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in D$$

来表示, 这是研究解析函数理论的强有力工具.

解析函数在闭路 C 内部的取值完全由它在 C 上的值所确定. 这也是解析函数的特征之一. 特别地, 解析函数在圆心处的值等于它在圆周上的平均值. 设 $z = z_0 + Re^{i\theta}$, 则 $dz = iRe^{i\theta} d\theta$,

解析函数可以用一个积分

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in D$$

来表示, 这是研究解析函数理论的强有力工具.

解析函数在闭路 C 内部的取值完全由它在 C 上的值所确定. 这也是解析函数的特征之一. 特别地, 解析函数在圆心处的值等于它在圆周上的平均值. 设 $z = z_0 + Re^{i\theta}$, 则 $dz = iRe^{i\theta} d\theta$,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta}) d\theta.$$

可以看出, 当被积函数分子解析而分母形如 $z - z_0$ 时, 绕闭路的积分可以使用柯西积分公式计算.

可以看出, 当被积函数分子解析而分母形如 $z - z_0$ 时, 绕闭路的积分可以使用柯西积分公式计算.

例. 求 $\oint_{|z|=4} \frac{\sin z}{z} dz$.

典型例题: 柯西积分公式的应用

可以看出, 当被积函数分子解析而分母形如 $z - z_0$ 时, 绕闭路的积分可以使用柯西积分公式计算.

例. 求 $\oint_{|z|=4} \frac{\sin z}{z} dz$.

解. 函数 $\sin z$ 处处解析.

典型例题: 柯西积分公式的应用

可以看出, 当被积函数分子解析而分母形如 $z - z_0$ 时, 绕闭路的积分可以使用柯西积分公式计算.

例. 求 $\oint_{|z|=4} \frac{\sin z}{z} dz$.

解. 函数 $\sin z$ 处处解析. 取 $f(z) = \sin z, z_0 = 0$ 并应用柯西积分公式得

$$\oint_{|z|=4} \frac{\sin z}{z} dz = 2\pi i \sin z|_{z=0} = 0.$$

典型例题：柯西积分公式的应用

例. 求 $\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z-1} dz$.

典型例题：柯西积分公式的应用

例. 求 $\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z-1} dz$.

解. 由于函数 e^z 处处解析, 取 $f(z) = e^z, z_0 = 1$ 并应用柯西积分公式得

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z-1} dz = 2\pi i e^z|_{z=1} = 2\pi e i.$$

典型例题: 柯西积分公式的应用

例. 求 $\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z-1} dz$.

解. 由于函数 e^z 处处解析, 取 $f(z) = e^z, z_0 = 1$ 并应用柯西积分公式得

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z-1} dz = 2\pi i e^z|_{z=1} = 2\pi e i.$$

练习. 求 $\oint_{|z|=2\pi} \frac{\cos z}{z-\pi} dz = \underline{\hspace{2cm}}$.

典型例题: 柯西积分公式的应用

例. 求 $\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z-1} dz$.

解. 由于函数 e^z 处处解析, 取 $f(z) = e^z, z_0 = 1$ 并应用柯西积分公式得

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z-1} dz = 2\pi i e^z|_{z=1} = 2\pi i.$$

练习. 求 $\oint_{|z|=2\pi} \frac{\cos z}{z-\pi} dz = \underline{-2\pi i}$.

典型例题：柯西积分公式的应用

例. 设 $f(z) = \oint_{|\zeta|=\sqrt{3}} \frac{3\zeta^2 + 7\zeta + 1}{\zeta - z} d\zeta$, 求 $f'(1+i)$.

典型例题: 柯西积分公式的应用

例. 设 $f(z) = \oint_{|\zeta|=\sqrt{3}} \frac{3\zeta^2 + 7\zeta + 1}{\zeta - z} d\zeta$, 求 $f'(1+i)$.

解. 当 $|z| < \sqrt{3}$ 时, 由柯西积分公式得

$$f(z) = \oint_{|\zeta|=\sqrt{3}} \frac{3\zeta^2 + 7\zeta + 1}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i(3\zeta^2 + 7\zeta + 1)|_{\zeta=z} = 2\pi i(3z^2 + 7z + 1).$$

因此 $f'(z) = 2\pi i(6z + 7)$,

$$f'(1+i) = 2\pi i(13 + 6i) = -12\pi + 26\pi i.$$

典型例题: 柯西积分公式的应用

例. 设 $f(z) = \oint_{|\zeta|=\sqrt{3}} \frac{3\zeta^2 + 7\zeta + 1}{\zeta - z} d\zeta$, 求 $f'(1+i)$.

解. 当 $|z| < \sqrt{3}$ 时, 由柯西积分公式得

$$f(z) = \oint_{|\zeta|=\sqrt{3}} \frac{3\zeta^2 + 7\zeta + 1}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i(3\zeta^2 + 7\zeta + 1)|_{\zeta=z} = 2\pi i(3z^2 + 7z + 1).$$

因此 $f'(z) = 2\pi i(6z + 7)$,

$$f'(1+i) = 2\pi i(13 + 6i) = -12\pi + 26\pi i.$$

注意当 $|z| > \sqrt{3}$ 时, $f(z) \equiv 0$.

典型例题: 柯西积分公式的应用

例. 求 $\oint_{|z|=3} \frac{e^z}{z(z^2 - 1)} dz$.

解析函数可以由它的积分所表示.

解析函数可以由它的积分所表示. 不仅如此, 通过积分表示, 还可以说明解析函数是任意阶可导的.

解析函数可以由它的积分所表示. 不仅如此, 通过积分表示, 还可以说明解析函数是任意阶可导的.

柯西积分公式. 设函数 $f(z)$ 在闭路 C 及其内部 D 解析, 则对任意 $z_0 \in D$,

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

解析函数可以由它的积分所表示. 不仅如此, 通过积分表示, 还可以说明解析函数是任意阶可导的.

柯西积分公式. 设函数 $f(z)$ 在闭路 C 及其内部 D 解析, 则对任意 $z_0 \in D$,

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

假如 $f(z)$ 有泰勒展开

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \cdots$$

解析函数可以由它的积分所表示. 不仅如此, 通过积分表示, 还可以说明解析函数是任意阶可导的.

柯西积分公式. 设函数 $f(z)$ 在闭路 C 及其内部 D 解析, 则对任意 $z_0 \in D$,

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

假如 $f(z)$ 有泰勒展开

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \cdots$$

那么由 $\oint_C \frac{dz}{(z - z_0)^n}$ 的性质可知上述公式右侧应当为 $f^{(n)}(z_0)$.

证明. 先证明 $n = 1$ 的情形.

证明. 先证明 $n = 1$ 的情形. 不妨设 $C : |z - z_0| = \delta$.

证明. 先证明 $n = 1$ 的情形. 不妨设 $C : |z - z_0| = \delta$. 由柯西积分公式,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \quad f(z_0 + h) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0 - h} dz.$$

两式相减得到

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)(z - z_0 - h)} dz.$$

柯西积分公式不是用来计算高阶导数的，而是用高阶导数来计算积分的.

典型例题：使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

柯西积分公式不是用来计算高阶导数的，而是用高阶导数来计算积分的.

例. 求 $\oint_{|z|=2} \frac{\cos(\pi z)}{(z-1)^5} dz$.

典型例题：使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

柯西积分公式不是用来计算高阶导数的，而是用高阶导数来计算积分的.

例. 求 $\oint_{|z|=2} \frac{\cos(\pi z)}{(z-1)^5} dz$.

解. 由于 $\cos(\pi z)$ 处处解析, 因此由柯西积分公式,

$$\oint_{|z|=2} \frac{\cos(\pi z)}{(z-1)^5} dz = \frac{2\pi i}{4!} \cos(\pi z)^{(4)} \Big|_{z=1}$$

典型例题: 使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

柯西积分公式不是用来计算高阶导数的, 而是用高阶导数来计算积分的.

例. 求 $\oint_{|z|=2} \frac{\cos(\pi z)}{(z-1)^5} dz$.

解. 由于 $\cos(\pi z)$ 处处解析, 因此由柯西积分公式,

$$\oint_{|z|=2} \frac{\cos(\pi z)}{(z-1)^5} dz = \frac{2\pi i}{4!} \cos(\pi z)^{(4)} \Big|_{z=1} = \frac{2\pi i}{24} \cdot \pi^4 \cos \pi = -\frac{\pi^5 i}{12}.$$

典型例题：使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

例. 求 $\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz$.

典型例题：使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

例. 求 $\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz$.

解. 被积函数在 $|z| < 2$ 的奇点为 $z = \pm i$.

典型例题: 使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

例. 求 $\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz$.

解. 被积函数在 $|z| < 2$ 的奇点为 $z = \pm i$. 取 C_1, C_2 为以 $i, -i$ 为圆心的分离圆周.

$$\oint_{C_1} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz = \frac{2\pi i}{1} \left[\frac{e^z}{(z+i)^2} \right]' \Big|_{z=i}$$

典型例题：使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

例. 求 $\oint_{|z|=1} z^n e^z dz$, 其中 n 是整数.

典型例题：使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

例. 求 $\oint_{|z|=1} z^n e^z dz$, 其中 n 是整数.

解.

典型例题: 使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

例. 求 $\oint_{|z|=1} z^n e^z dz$, 其中 n 是整数.

解.

(1) 当 $n \geq 0$ 时, $z^n e^z$ 处处解析. 由柯西-古萨定理,

$$\oint_{|z|=1} z^n e^z dz = 0.$$

(2) 当 $n \leq -1$ 时, e^z 处处解析.

典型例题：使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

例. 求 $\oint_{|z-3|=2} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} dz$ 和 $\oint_{|z-1|=3} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} dz$.

典型例题：使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

例. 求 $\oint_{|z-3|=2} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} dz$ 和 $\oint_{|z-1|=3} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} dz$.

解.

典型例题：使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

例. 求 $\oint_{|z-3|=2} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} dz$ 和 $\oint_{|z-1|=3} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} dz$.

解.

(1) $\frac{1}{(z-2)^2 z^3}$ 在 $|z-3| < 2$ 的奇点为 $z=2$.

典型例题: 使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

例. 求 $\oint_{|z-3|=2} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} dz$ 和 $\oint_{|z-1|=3} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} dz$.

解.

(1) $\frac{1}{(z-2)^2 z^3}$ 在 $|z-3| < 2$ 的奇点为 $z=2$. 由柯西积分公式,

$$\oint_{|z-3|=2} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} dz = \frac{2\pi i}{1!} \left(\frac{1}{z^3} \right)' \Big|_{z=2} = -\frac{3\pi i}{8}.$$

典型例题: 使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

例. 求 $\oint_{|z-3|=2} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} dz$ 和 $\oint_{|z-1|=3} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} dz$.

解.

(1) $\frac{1}{(z-2)^2 z^3}$ 在 $|z-3| < 2$ 的奇点为 $z=2$. 由柯西积分公式,

$$\oint_{|z-3|=2} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} dz = \frac{2\pi i}{1!} \left(\frac{1}{z^3} \right)' \Big|_{z=2} = -\frac{3\pi i}{8}.$$

(2) $\frac{1}{(z-2)^2 z^3}$ 在 $|z-1| < 3$ 的奇点为 $z=0, 2$.

典型例题: 使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

例. 求 $\oint_{|z-3|=2} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} dz$ 和 $\oint_{|z-1|=3} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} dz$.

解.

(1) $\frac{1}{(z-2)^2 z^3}$ 在 $|z-3| < 2$ 的奇点为 $z=2$. 由柯西积分公式,

$$\oint_{|z-3|=2} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} dz = \frac{2\pi i}{1!} \left(\frac{1}{z^3} \right)' \Big|_{z=2} = -\frac{3\pi i}{8}.$$

(2) $\frac{1}{(z-2)^2 z^3}$ 在 $|z-1| < 3$ 的奇点为 $z=0, 2$. 取 C_1, C_2 为以 $0, 2$ 为圆心的分离圆周.

典型例题: 使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

例. 求 $\oint_{|z-3|=2} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} dz$ 和 $\oint_{|z-1|=3} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} dz$.

解.

(1) $\frac{1}{(z-2)^2 z^3}$ 在 $|z-3| < 2$ 的奇点为 $z=2$. 由柯西积分公式,

$$\oint_{|z-3|=2} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} dz = \frac{2\pi i}{1!} \left(\frac{1}{z^3} \right)' \Big|_{z=2} = -\frac{3\pi i}{8}.$$

(2) $\frac{1}{(z-2)^2 z^3}$ 在 $|z-1| < 3$ 的奇点为 $z=0, 2$. 取 C_1, C_2 为以 $0, 2$ 为圆心的分离圆周.

$$\oint_{|z-1|=3} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} dz = \oint_{C_1} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} dz + \oint_{C_2} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} dz$$

典型例题: 使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

例. 求 $\oint_{|z-3|=2} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} dz$ 和 $\oint_{|z-1|=3} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} dz$.

解.

(1) $\frac{1}{(z-2)^2 z^3}$ 在 $|z-3| < 2$ 的奇点为 $z=2$. 由柯西积分公式,

$$\oint_{|z-3|=2} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} dz = \frac{2\pi i}{1!} \left(\frac{1}{z^3} \right)' \Big|_{z=2} = -\frac{3\pi i}{8}.$$

(2) $\frac{1}{(z-2)^2 z^3}$ 在 $|z-1| < 3$ 的奇点为 $z=0, 2$. 取 C_1, C_2 为以 $0, 2$ 为圆心的分离圆周.

$$\begin{aligned} \oint_{|z-1|=3} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} dz &= \oint_{C_1} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} dz + \oint_{C_2} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} dz \\ &= \frac{2\pi i}{2!} \left[\frac{1}{(z-2)^2} \right]'' \Big|_{z=0} + \frac{2\pi i}{1!} \left(\frac{1}{z^3} \right)' \Big|_{z=2} = 0. \end{aligned}$$

练习. $\oint_{|z-2i|=3} \frac{1}{z^2(z-i)} dz = \underline{0}.$

例 (莫累拉定理). 设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内连续, 且对于 D 中任意闭路 C 都有 $\oint_C f(z) dz = 0$, 则 $f(z)$ 在 D 内解析.

练习. $\oint_{|z-2i|=3} \frac{1}{z^2(z-i)} dz = \underline{0}.$

例 (莫累拉定理). 设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内连续, 且对于 D 中任意闭路 C 都有 $\oint_C f(z) dz = 0$, 则 $f(z)$ 在 D 内解析.

证明. 由题设可知 $f(z)$ 的积分与路径无关.

第四节 解析函数与调和函数的关系

- 调和函数
- 共轭调和函数

调和函数是一类重要的二元实变函数, 它和解析函数有着紧密的联系.

调和函数是一类重要的二元实变函数, 它和解析函数有着紧密的联系. 为了简便, 我们用 u_{xx}, u_{yy} 来表示二阶偏导数.

调和函数是一类重要的二元实变函数, 它和解析函数有着紧密的联系. 为了简便, 我们用 u_{xx}, u_{yy} 来表示二阶偏导数.

定义. 若二元实变函数 $u(x, y)$ 在区域 D 内有二阶连续偏导数, 且满足拉普拉斯方程

$$\Delta u := u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

则称 $u(x, y)$ 是 D 内的调和函数.

定理. 区域 D 内解析函数 $f(z)$ 的实部和虚部都是调和函数.

定理. 区域 D 内解析函数 $f(z)$ 的实部和虚部都是调和函数.

证明. 设 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, 则 u, v 存在偏导数且

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y.$$

定理. 区域 D 内解析函数 $f(z)$ 的实部和虚部都是调和函数.

证明. 设 $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$, 则 u, v 存在偏导数且

$$f'(z) = u_x + \mathrm{i}v_x = v_y - \mathrm{i}u_y.$$

由于 $f(z)$ 任意阶可导, 因此 u, v 存在任意阶偏导数.

定理. 区域 D 内解析函数 $f(z)$ 的实部和虚部都是调和函数.

证明. 设 $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$, 则 u, v 存在偏导数且

$$f'(z) = u_x + \mathrm{i}v_x = v_y - \mathrm{i}u_y.$$

由于 $f(z)$ 任意阶可导, 因此 u, v 存在任意阶偏导数. 由 $C-R$ 方程 $u_x = v_y, u_y = -v_x$

定理. 区域 D 内解析函数 $f(z)$ 的实部和虚部都是调和函数.

证明. 设 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, 则 u, v 存在偏导数且

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y.$$

由于 $f(z)$ 任意阶可导, 因此 u, v 存在任意阶偏导数. 由 $C-R$ 方程 $u_x = v_y, u_y = -v_x$ 可知

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0,$$

定理. 区域 D 内解析函数 $f(z)$ 的实部和虚部都是调和函数.

证明. 设 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, 则 u, v 存在偏导数且

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y.$$

由于 $f(z)$ 任意阶可导, 因此 u, v 存在任意阶偏导数. 由 $C-R$ 方程 $u_x = v_y, u_y = -v_x$ 可知

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0,$$

$$\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = -u_{yx} + u_{xy} = 0.$$



反过来, 调和函数是否一定是某个解析函数的实部或虚部呢?

反过来, 调和函数是否一定是某个解析函数的实部或虚部呢? 对于单连通的情形, 答案是肯定的.

反过来, 调和函数是否一定是某个解析函数的实部或虚部呢? 对于单连通的情形, 答案是肯定的.

若 $u + iv$ 是区域 D 内的解析函数, 则我们称 v 是 u 的共轭调和函数.

反过来, 调和函数是否一定是某个解析函数的实部或虚部呢? 对于单连通的情形, 答案是肯定的.

若 $u + iv$ 是区域 D 内的解析函数, 则我们称 v 是 u 的**共轭调和函数**. 换言之
 $u_x = v_y, u_y = -v_x$.

反过来, 调和函数是否一定是某个解析函数的实部或虚部呢? 对于单连通的情形, 答案是肯定的.

若 $u + iv$ 是区域 D 内的解析函数, 则我们称 v 是 u 的**共轭调和函数**. 换言之 $u_x = v_y, u_y = -v_x$. 显然 $-u$ 是 v 的共轭调和函数.

反过来, 调和函数是否一定是某个解析函数的实部或虚部呢? 对于单连通的情形, 答案是肯定的.

若 $u + iv$ 是区域 D 内的解析函数, 则我们称 v 是 u 的**共轭调和函数**. 换言之 $u_x = v_y, u_y = -v_x$. 显然 $-u$ 是 v 的共轭调和函数.

定理. 设 $u(x, y)$ 是单连通区域 D 内的调和函数, 则线积分

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -u_y dx + u_x dy + C$$

是 u 的共轭调和函数.

反过来, 调和函数是否一定是某个解析函数的实部或虚部呢? 对于单连通的情形, 答案是肯定的.

若 $u + iv$ 是区域 D 内的解析函数, 则我们称 v 是 u 的**共轭调和函数**. 换言之 $u_x = v_y, u_y = -v_x$. 显然 $-u$ 是 v 的共轭调和函数.

定理. 设 $u(x, y)$ 是单连通区域 D 内的调和函数, 则线积分

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -u_y dx + u_x dy + C$$

是 u 的共轭调和函数.

由此可知, 区域 D 上的调和函数在 $z \in D$ 的一个邻域内是一解析函数的实部, 从而在该邻域内具有任意阶连续偏导数.

反过来, 调和函数是否一定是某个解析函数的实部或虚部呢? 对于单连通的情形, 答案是肯定的.

若 $u + iv$ 是区域 D 内的解析函数, 则我们称 v 是 u 的**共轭调和函数**. 换言之 $u_x = v_y, u_y = -v_x$. 显然 $-u$ 是 v 的共轭调和函数.

定理. 设 $u(x, y)$ 是单连通区域 D 内的调和函数, 则线积分

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -u_y dx + u_x dy + C$$

是 u 的共轭调和函数.

由此可知, 区域 D 上的调和函数在 $z \in D$ 的一个邻域内是一解析函数的实部, 从而在该邻域内具有任意阶连续偏导数. 而 z 的任取的, 因此**调和函数总具有任意阶连续偏导数**.

若 D 是多连通区域, 则未必存在共轭调和函数. 例如 $\ln(x^2 + y^2)$ 是复平面去掉原点上的调和函数, 但它并不是某个解析函数的实部. 事实上, 它是 $2 \operatorname{Ln} z$ 的实部.

在实际计算中, 我们**一般不用线积分**来得到共轭调和函数, 而是采用下述两种办法:

偏积分法. 通过 $v_y = u_x$ 解得 $v = \varphi(x, y) + \psi(x)$, 其中 $\psi(x)$ 待定.

典型例题：求共轭调和函数和相应的解析函数

例. 证明 $u(x, y) = y^3 - 3x^2y$ 是调和函数, 并求其共轭调和函数以及由它们构成的解析函数.

典型例题: 求共轭调和函数和相应的解析函数

例. 证明 $u(x, y) = y^3 - 3x^2y$ 是调和函数, 并求其共轭调和函数以及由它们构成的解析函数.

解. 由 $u_x = -6xy, u_y = 3y^2 - 3x^2$ 可知

$$u_{xx} + u_{yy} = -6y + 6y = 0,$$

典型例题: 求共轭调和函数和相应的解析函数

例. 证明 $u(x, y) = y^3 - 3x^2y$ 是调和函数, 并求其共轭调和函数以及由它们构成的解析函数.

解. 由 $u_x = -6xy, u_y = 3y^2 - 3x^2$ 可知

$$u_{xx} + u_{yy} = -6y + 6y = 0,$$

故 u 是调和函数.

典型例题: 求共轭调和函数和相应的解析函数

例. 证明 $u(x, y) = y^3 - 3x^2y$ 是调和函数, 并求其共轭调和函数以及由它们构成的解析函数.

解. 由 $u_x = -6xy, u_y = 3y^2 - 3x^2$ 可知

$$u_{xx} + u_{yy} = -6y + 6y = 0,$$

故 u 是调和函数.

由 $v_y = u_x = -6xy$ 得 $v = -3xy^2 + \psi(x)$.

典型例题: 求共轭调和函数和相应的解析函数

例. 证明 $u(x, y) = y^3 - 3x^2y$ 是调和函数, 并求其共轭调和函数以及由它们构成的解析函数.

解. 由 $u_x = -6xy, u_y = 3y^2 - 3x^2$ 可知

$$u_{xx} + u_{yy} = -6y + 6y = 0,$$

故 u 是调和函数.

由 $v_y = u_x = -6xy$ 得 $v = -3xy^2 + \psi(x)$.

由 $v_x = -u_y = 3x^2 - 3y^2$ 得 $\psi'(x) = 3x^2$,

典型例题: 求共轭调和函数和相应的解析函数

例. 证明 $u(x, y) = y^3 - 3x^2y$ 是调和函数, 并求其共轭调和函数以及由它们构成的解析函数.

解. 由 $u_x = -6xy, u_y = 3y^2 - 3x^2$ 可知

$$u_{xx} + u_{yy} = -6y + 6y = 0,$$

故 u 是调和函数.

由 $v_y = u_x = -6xy$ 得 $v = -3xy^2 + \psi(x)$.

由 $v_x = -u_y = 3x^2 - 3y^2$ 得 $\psi'(x) = 3x^2, \psi(x) = x^3 + C$.

典型例题: 求共轭调和函数和相应的解析函数

例. 证明 $u(x, y) = y^3 - 3x^2y$ 是调和函数, 并求其共轭调和函数以及由它们构成的解析函数.

解. 由 $u_x = -6xy, u_y = 3y^2 - 3x^2$ 可知

$$u_{xx} + u_{yy} = -6y + 6y = 0,$$

故 u 是调和函数.

由 $v_y = u_x = -6xy$ 得 $v = -3xy^2 + \psi(x)$.

由 $v_x = -u_y = 3x^2 - 3y^2$ 得 $\psi'(x) = 3x^2, \psi(x) = x^3 + C$.

故 $v(x, y) = -3xy^2 + x^3 + C$,

典型例题: 求共轭调和函数和相应的解析函数

例. 证明 $u(x, y) = y^3 - 3x^2y$ 是调和函数, 并求其共轭调和函数以及由它们构成的解析函数.

解. 由 $u_x = -6xy, u_y = 3y^2 - 3x^2$ 可知

$$u_{xx} + u_{yy} = -6y + 6y = 0,$$

故 u 是调和函数.

由 $v_y = u_x = -6xy$ 得 $v = -3xy^2 + \psi(x)$.

由 $v_x = -u_y = 3x^2 - 3y^2$ 得 $\psi'(x) = 3x^2, \psi(x) = x^3 + C$.

故 $v(x, y) = -3xy^2 + x^3 + C$,

$$f(z) = u + iv = y^3 - 3x^2y + i(-3xy^2 + x^3 + C)$$

典型例题: 求共轭调和函数和相应的解析函数

例. 证明 $u(x, y) = y^3 - 3x^2y$ 是调和函数, 并求其共轭调和函数以及由它们构成的解析函数.

解. 由 $u_x = -6xy, u_y = 3y^2 - 3x^2$ 可知

$$u_{xx} + u_{yy} = -6y + 6y = 0,$$

故 u 是调和函数.

由 $v_y = u_x = -6xy$ 得 $v = -3xy^2 + \psi(x)$.

由 $v_x = -u_y = 3x^2 - 3y^2$ 得 $\psi'(x) = 3x^2, \psi(x) = x^3 + C$.

故 $v(x, y) = -3xy^2 + x^3 + C$,

$$\begin{aligned} f(z) &= u + iv = y^3 - 3x^2y + i(-3xy^2 + x^3 + C) \\ &= i(x + iy)^3 + iC = i(z^3 + C), C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

当解析函数 $f(z)$ 是 x, y 的多项式形式时, $f(z)$ 本身一定是 z 的多项式.

典型例题：求共轭调和函数和相应的解析函数

当解析函数 $f(z)$ 是 x, y 的多项式形式时, $f(z)$ 本身一定是 z 的多项式. 于是将 x 全部换成 z , y 全部换成 0 就是 $f(z)$.

典型例题：求共轭调和函数和相应的解析函数

当解析函数 $f(z)$ 是 x, y 的多项式形式时, $f(z)$ 本身一定是 z 的多项式. 于是将 x 全部换成 z , y 全部换成 0 就是 $f(z)$. 即使 $f(z)$ 不是 x, y 的多项式形式, 这种替换方式很多时候也奏效.

典型例题：求共轭调和函数和相应的解析函数

当解析函数 $f(z)$ 是 x, y 的多项式形式时, $f(z)$ 本身一定是 z 的多项式. 于是将 x 全部换成 z , y 全部换成 0 就是 $f(z)$. 即使 $f(z)$ 不是 x, y 的多项式形式, 这种替换方式很多时候也奏效.

在上例中我们也可由另一种方法计算得到:

$$f'(z) = u_x - iu_y = -6xy - i(3y^2 - 3x^2) = 3iz^2.$$

典型例题：求共轭调和函数和相应的解析函数

当解析函数 $f(z)$ 是 x, y 的多项式形式时, $f(z)$ 本身一定是 z 的多项式. 于是将 x 全部换成 z , y 全部换成 0 就是 $f(z)$. 即使 $f(z)$ 不是 x, y 的多项式形式, 这种替换方式很多时候也奏效.

在上例中我们也可由另一种方法计算得到:

$$f'(z) = u_x - iu_y = -6xy - i(3y^2 - 3x^2) = 3iz^2.$$

因此 $f(z) = iz^3 + C$.

典型例题：求共轭调和函数和相应的解析函数

例. 求解析函数 $f(z)$ 使得它的虚部为

$$v(x, y) = e^x(y \cos y + x \sin y) + x + y.$$

典型例题: 求共轭调和函数和相应的解析函数

例. 求解析函数 $f(z)$ 使得它的虚部为

$$v(x, y) = e^x(y \cos y + x \sin y) + x + y.$$

解. 由 $u_x = v_y = e^x(\cos y - y \sin y + x \cos y) + 1$ 得

$$u = e^x(x \cos y - y \sin y) + x + \psi(y).$$

典型例题: 求共轭调和函数和相应的解析函数

例. 求解析函数 $f(z)$ 使得它的虚部为

$$v(x, y) = e^x(y \cos y + x \sin y) + x + y.$$

解. 由 $u_x = v_y = e^x(\cos y - y \sin y + x \cos y) + 1$ 得

$$u = e^x(x \cos y - y \sin y) + x + \psi(y).$$

由 $u_y = -v_x = -e^x(y \cos y + x \sin y + \sin y) - 1$ 得

$$\psi'(y) = -1, \quad \psi(y) = -y + C.$$

典型例题: 求共轭调和函数和相应的解析函数

例. 求解析函数 $f(z)$ 使得它的虚部为

$$v(x, y) = e^x(y \cos y + x \sin y) + x + y.$$

解. 由 $u_x = v_y = e^x(\cos y - y \sin y + x \cos y) + 1$ 得

$$u = e^x(x \cos y - y \sin y) + x + \psi(y).$$

由 $u_y = -v_x = -e^x(y \cos y + x \sin y + \sin y) - 1$ 得

$$\psi'(y) = -1, \quad \psi(y) = -y + C.$$

故

$$\begin{aligned} f(z) &= u + iv \\ &= e^x(x \cos y - y \sin y) + x - y + C + i[e^x(y \cos y + x \sin y) + x + y] \end{aligned}$$

典型例题: 求共轭调和函数和相应的解析函数

例. 求解析函数 $f(z)$ 使得它的虚部为

$$v(x, y) = e^x(y \cos y + x \sin y) + x + y.$$

解. 由 $u_x = v_y = e^x(\cos y - y \sin y + x \cos y) + 1$ 得

$$u = e^x(x \cos y - y \sin y) + x + \psi(y).$$

由 $u_y = -v_x = -e^x(y \cos y + x \sin y + \sin y) - 1$ 得

$$\psi'(y) = -1, \quad \psi(y) = -y + C.$$

故

$$\begin{aligned} f(z) &= u + iv \\ &= e^x(x \cos y - y \sin y) + x - y + C + i[e^x(y \cos y + x \sin y) + x + y] \\ &= ze^z + (1 + i)z + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

也可由

$$\begin{aligned}f'(z) &= v_y + \mathrm{i}v_x \\&= \mathrm{e}^x(\cos y - y \sin y + x \cos y) + 1 + \mathrm{i}[e^x(y \cos y + x \sin y + \sin y) + 1]\end{aligned}$$

也可由

$$\begin{aligned}f'(z) &= v_y + \mathrm{i}v_x \\&= \mathrm{e}^x(\cos y - y \sin y + x \cos y) + 1 + \mathrm{i}[e^x(y \cos y + x \sin y + \sin y) + 1] \\&= (z + 1)\mathrm{e}^z + 1 + \mathrm{i}.\end{aligned}$$

也可由

$$\begin{aligned}f'(z) &= v_y + \mathrm{i}v_x \\&= \mathrm{e}^x(\cos y - y \sin y + x \cos y) + 1 + \mathrm{i}[\mathrm{e}^x(y \cos y + x \sin y + \sin y) + 1] \\&= (z + 1)\mathrm{e}^z + 1 + \mathrm{i}.\end{aligned}$$

得 $f(z) = z\mathrm{e}^z + (1 + \mathrm{i})z + C$.

典型例题: 求共轭调和函数和相应的解析函数

也可由

$$\begin{aligned}f'(z) &= v_y + \mathrm{i}v_x \\&= \mathrm{e}^x(\cos y - y \sin y + x \cos y) + 1 + \mathrm{i}[e^x(y \cos y + x \sin y + \sin y) + 1] \\&= (z + 1)\mathrm{e}^z + 1 + \mathrm{i}.\end{aligned}$$

得 $f(z) = ze^z + (1 + \mathrm{i})z + C$.

练习. 证明 $u(x, y) = x^3 - 6x^2y - 3xy^2 + 2y^3$ 是调和函数并求它的共轭调和函数.

典型例题: 求共轭调和函数和相应的解析函数

也可由

$$\begin{aligned}f'(z) &= v_y + \mathrm{i}v_x \\&= \mathrm{e}^x(\cos y - y \sin y + x \cos y) + 1 + \mathrm{i}[\mathrm{e}^x(y \cos y + x \sin y + \sin y) + 1] \\&= (z + 1)\mathrm{e}^z + 1 + \mathrm{i}.\end{aligned}$$

得 $f(z) = ze^z + (1 + \mathrm{i})z + C$.

练习. 证明 $u(x, y) = x^3 - 6x^2y - 3xy^2 + 2y^3$ 是调和函数并求它的共轭调和函数.

答案. $v(x, y) = 2x^3 + 3x^2y - 6xy^2 - y^3 + C$.

