

## 第二章 解析函数

- ① 解析函数的概念
- ② 函数解析的充要条件
- ③ 初等函数

## 第一节 解析函数的概念

- 可导函数
- 可微函数
- 解析函数

由于  $\mathbb{C}$  和  $\mathbb{R}$  一样是域, 因此我们可以像一元实变函数一样去定义复变函数的导数和微分.



由于  $\mathbb{C}$  和  $\mathbb{R}$  一样是域, 因此我们可以像一元实变函数一样去定义复变函数的导数和微分.

**定义.** 设  $w = f(z)$  的定义域是区域  $D$ ,  $z_0 \in D$ . 若极限

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

存在, 则称  $f(z)$  在  $z_0$  可导.

由于  $\mathbb{C}$  和  $\mathbb{R}$  一样是域, 因此我们可以像一元实变函数一样去定义复变函数的导数和微分.

**定义.** 设  $w = f(z)$  的定义域是区域  $D$ ,  $z_0 \in D$ . 若极限

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

存在, 则称  $f(z)$  在  $z_0$  可导. 这个极限值称为  $f(z)$  在  $z_0$  的导数, 记作  $f'(z_0)$ .

由于  $\mathbb{C}$  和  $\mathbb{R}$  一样是域, 因此我们可以像一元实变函数一样去定义复变函数的导数和微分.

**定义.** 设  $w = f(z)$  的定义域是区域  $D$ ,  $z_0 \in D$ . 若极限

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

存在, 则称  $f(z)$  在  $z_0$  可导. 这个极限值称为  $f(z)$  在  $z_0$  的导数, 记作  $f'(z_0)$ . 若  $f(z)$  在区域  $D$  内处处可导, 称  $f(z)$  在  $D$  内可导.

## 例题：线性函数的不可导性

例. 函数  $f(z) = x + 2yi$  在哪些点处可导？

## 例题：线性函数的不可导性

例. 函数  $f(z) = x + 2yi$  在哪些点处可导？

解. 由定义可知

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

## 例题：线性函数的不可导性

例. 函数  $f(z) = x + 2yi$  在哪些点处可导？

解. 由定义可知

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x) + 2(y + \Delta y)i - (x + 2yi)}{\Delta z} \end{aligned}$$

## 例题：线性函数的不可导性

例. 函数  $f(z) = x + 2yi$  在哪些点处可导？

解. 由定义可知

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x) + 2(y + \Delta y)i - (x + 2yi)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta x + 2\Delta yi}{\Delta x + \Delta yi}. \end{aligned}$$

### 例题：线性函数的不可导性

**例.** 函数  $f(z) = x + 2yi$  在哪些点处可导?

**解.** 由定义可知

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x) + 2(y + \Delta y)\mathbf{i} - (x + 2y\mathbf{i})}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta x + 2\Delta y\mathbf{i}}{\Delta x + \Delta y\mathbf{i}}. \end{aligned}$$

当  $\Delta x = 0, \Delta y \rightarrow 0$  时, 上式  $\rightarrow 2$ ;

### 例题：线性函数的不可导性

**例.** 函数  $f(z) = x + 2yi$  在哪些点处可导?

**解.** 由定义可知

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x) + 2(y + \Delta y)\mathbf{i} - (x + 2y\mathbf{i})}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta x + 2\Delta y\mathbf{i}}{\Delta x + \Delta y\mathbf{i}}. \end{aligned}$$

当  $\Delta x = 0, \Delta y \rightarrow 0$  时, 上式  $\rightarrow 2$ ; 当  $\Delta y = 0, \Delta x \rightarrow 0$  时, 上式  $\rightarrow 1$ .

### 例题：线性函数的不可导性

**例.** 函数  $f(z) = x + 2yi$  在哪些点处可导?

**解.** 由定义可知

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x) + 2(y + \Delta y)\mathbf{i} - (x + 2y\mathbf{i})}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta x + 2\Delta y\mathbf{i}}{\Delta x + \Delta y\mathbf{i}}. \end{aligned}$$

当  $\Delta x = 0, \Delta y \rightarrow 0$  时, 上式  $\rightarrow 2$ ; 当  $\Delta y = 0, \Delta x \rightarrow 0$  时, 上式  $\rightarrow 1$ . 因此该极限不存在,  $f(z)$  处处不可导.

## 例题: 复变函数的导数

**练习.** 函数  $f(z) = \bar{z} = x - yi$  在哪些点处可导?





### 例题：复变函数的导数

**练习.** 函数  $f(z) = \bar{z} = x - yi$  在哪些点处可导?

**答案.** 处处不可导.

**例.** 求  $f(z) = z^2$  的导数.

解.

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$





事实上, 和单变量实函数情形类似, 复变函数也有如下求导法则.

事实上, 和单变量实函数情形类似, 复变函数也有如下求导法则.

定理.

事实上, 和单变量实函数情形类似, 复变函数也有如下求导法则.

定理.

(1)  $(c)' = 0$ , 其中  $c$  为复常数;

事实上, 和单变量实函数情形类似, 复变函数也有如下求导法则.

定理.

- (1)  $(c)' = 0$ , 其中  $c$  为复常数;
- (2)  $(z^n)' = nz^{n-1}$ , 其中  $n$  为整数;

事实上, 和单变量实函数情形类似, 复变函数也有如下求导法则.

定理.

- (1)  $(c)' = 0$ , 其中  $c$  为复常数;
- (2)  $(z^n)' = nz^{n-1}$ , 其中  $n$  为整数;
- (3)  $(f \pm g)' = f' \pm g'$ ,  $(cf)' = cf'$ ;

线性性质















由上述求导法则, 不难知道:

### 定理.

- (1) 在  $z_0$  处可导的两个函数  $f(z)$ ,  $g(z)$  之和、差、积、商 ( $g(z_0) \neq 0$ ) 仍然在  $z_0$  处可导.  
(2) 若函数  $g(z)$  在  $z_0$  处可导, 函数  $f(w)$  在  $g(z_0)$  处可导, 则  $f[g(z)]$  在  $z_0$  处可导.

由此可知, 多项式函数处处可导, 有理函数在其定义域内处处可导, 且二者导数形式和单变量实函数情形类似.

## 例题：利用求导运算法则计算导数

例. 求  $f(z) = \frac{z^2 + 3}{z + 1}$  的导数.



## 例题：利用求导运算法则计算导数

例. 求  $f(z) = \frac{z^2 + 3}{z + 1}$  的导数.

解. 由于

$$f(z) = z - 1 + \frac{4}{z + 1},$$

因此

$$f'(z) = 1 - \frac{4}{(z + 1)^2}.$$

**定理.** 若  $f(z)$  在  $z_0$  可导, 则  $f(z)$  在  $z_0$  连续.















复变函数的微分也和单变量实函数情形类似.

**定义.** 若存在常数  $A$  使得函数  $w = f(z)$  满足

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A \Delta z + o(\Delta z),$$

其中  $o(\Delta z)$  表示  $\Delta z$  的高阶无穷小量,

复变函数的微分也和单变量实函数情形类似.

**定义.** 若存在常数  $A$  使得函数  $w = f(z)$  满足

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A \Delta z + o(\Delta z),$$

其中  $o(\Delta z)$  表示  $\Delta z$  的高阶无穷小量, 则称  $f(z)$  在  $z_0$  处可微,

复变函数的微分也和单变量实函数情形类似.

**定义.** 若存在常数  $A$  使得函数  $w = f(z)$  满足

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A \Delta z + o(\Delta z),$$

其中  $o(\Delta z)$  表示  $\Delta z$  的高阶无穷小量, 则称  $f(z)$  在  $z_0$  处可微, 称  $A \Delta z$  为  $f(z)$  在  $z_0$  的微分, 记作  $dw = A \Delta z$ .







定义.

(1) 若函数  $f(z)$  在  $z_0$  的一个邻域内处处可导, 则称  $f(z)$  在  $z_0$  解析.

定义.

- (1) 若函数  $f(z)$  在  $z_0$  的一个邻域内处处可导, 则称  $f(z)$  在  $z_0$  解析.
- (2) 若  $f(z)$  在区域  $D$  内处处解析, 则称  $f(z)$  在  $D$  内解析, 或称  $f(z)$  是  $D$  内的一个解析函数.

定义.

- (1) 若函数  $f(z)$  在  $z_0$  的一个邻域内处处可导, 则称  $f(z)$  在  $z_0$  解析.
- (2) 若  $f(z)$  在区域  $D$  内处处解析, 则称  $f(z)$  在  $D$  内解析, 或称  $f(z)$  是  $D$  内的一个解析函数.
- (3) 若  $f(z)$  在  $z_0$  不解析, 则称  $z_0$  为  $f(z)$  的一个奇点.

定义.

- (1) 若函数  $f(z)$  在  $z_0$  的一个邻域内处处可导, 则称  $f(z)$  在  $z_0$  解析.
- (2) 若  $f(z)$  在区域  $D$  内处处解析, 则称  $f(z)$  在  $D$  内解析, 或称  $f(z)$  是  $D$  内的一个解析函数.
- (3) 若  $f(z)$  在  $z_0$  不解析, 则称  $z_0$  为  $f(z)$  的一个奇点.

在一点解析蕴含在这点可导, 反之未必.

定义.

- (1) 若函数  $f(z)$  在  $z_0$  的一个邻域内处处可导, 则称  $f(z)$  在  $z_0$  解析.
- (2) 若  $f(z)$  在区域  $D$  内处处解析, 则称  $f(z)$  在  $D$  内解析, 或称  $f(z)$  是  $D$  内的一个解析函数.
- (3) 若  $f(z)$  在  $z_0$  不解析, 则称  $z_0$  为  $f(z)$  的一个奇点.

在一点解析蕴含在这点可导, 反之未必. 无定义、不连续、不可导、可导但不解析, 都会导致奇点的产生.

定义.

- (1) 若函数  $f(z)$  在  $z_0$  的一个邻域内处处可导, 则称  $f(z)$  在  $z_0$  解析.
- (2) 若  $f(z)$  在区域  $D$  内处处解析, 则称  $f(z)$  在  $D$  内解析, 或称  $f(z)$  是  $D$  内的一个解析函数.
- (3) 若  $f(z)$  在  $z_0$  不解析, 则称  $z_0$  为  $f(z)$  的一个奇点.

在一点解析蕴含在这点可导, 反之未必. 无定义、不连续、不可导、可导但不解析, 都会导致奇点的产生. 不过, 若  $z_0$  是  $f(z)$  定义域的外点, 即存在  $z_0$  的邻域与  $f(z)$  定义域交集为空集, 这种情形不甚有趣, 因此我们不考虑这类奇点.

定义.

- (1) 若函数  $f(z)$  在  $z_0$  的一个邻域内处处可导, 则称  $f(z)$  在  $z_0$  解析.
- (2) 若  $f(z)$  在区域  $D$  内处处解析, 则称  $f(z)$  在  $D$  内解析, 或称  $f(z)$  是  $D$  内的一个解析函数.
- (3) 若  $f(z)$  在  $z_0$  不解析, 则称  $z_0$  为  $f(z)$  的一个奇点.

在一点解析蕴含在这点可导, 反之未必. 无定义、不连续、不可导、可导但不解析, 都会导致奇点的产生. 不过, 若  $z_0$  是  $f(z)$  定义域的外点, 即存在  $z_0$  的邻域与  $f(z)$  定义域交集为空集, 这种情形不甚有趣, 因此我们不考虑这类奇点.

在区域  $D$  内解析和在  $D$  内可导是等价的.

定义.

- (1) 若函数  $f(z)$  在  $z_0$  的一个邻域内处处可导, 则称  $f(z)$  在  $z_0$  解析.
- (2) 若  $f(z)$  在区域  $D$  内处处解析, 则称  $f(z)$  在  $D$  内解析, 或称  $f(z)$  是  $D$  内的一个解析函数.
- (3) 若  $f(z)$  在  $z_0$  不解析, 则称  $z_0$  为  $f(z)$  的一个奇点.

在一点解析蕴含在这点可导, 反之未必. 无定义、不连续、不可导、可导但不解析, 都会导致奇点的产生. 不过, 若  $z_0$  是  $f(z)$  定义域的外点, 即存在  $z_0$  的邻域与  $f(z)$  定义域交集为空集, 这种情形不甚有趣, 因此我们不考虑这类奇点.

在区域  $D$  内解析和在  $D$  内可导是等价的. 这是因为任意  $z_0 \in D$  均存在一个包含在  $D$  内的邻域.



## 例题：解析与可导的关系

由于一个点的邻域也是一个开集, 因此若  $f(z)$  在  $z_0$  处解析, 则  $f(z)$  在  $z_0$  的一个邻域内处处可导, 从而在该邻域内解析. 因此  $f(z)$  解析点全体是一个开集, 它是可导点集合的内点构成的集合.

### 例题：解析与可导的关系

由于一个点的邻域也是一个开集, 因此若  $f(z)$  在  $z_0$  处解析, 则  $f(z)$  在  $z_0$  的一个邻域内处处可导, 从而在该邻域内解析. 因此  $f(z)$  解析点全体是一个开集, 它是可导点集合的内点构成的集合.

**练习.** 函数  $f(z)$  在点  $z_0$  处解析是  $f(z)$  在该点可导的( ).

- (A) 充分非必要条件 (B) 必要非充分条件  
(C) 充要条件 (D) 既非充分也非必要条件

### 例题：解析与可导的关系

由于一个点的邻域也是一个开集, 因此若  $f(z)$  在  $z_0$  处解析, 则  $f(z)$  在  $z_0$  的一个邻域内处处可导, 从而在该邻域内解析. 因此  $f(z)$  解析点全体是一个开集, 它是可导点集合的内点构成的集合.

**练习.** 函数  $f(z)$  在点  $z_0$  处解析是  $f(z)$  在该点可导的( A ).

- (A) 充分非必要条件 (B) 必要非充分条件  
(C) 充要条件 (D) 既非充分也非必要条件

### 例题：解析与可导的关系

由于一个点的邻域也是一个开集, 因此若  $f(z)$  在  $z_0$  处解析, 则  $f(z)$  在  $z_0$  的一个邻域内处处可导, 从而在该邻域内解析. 因此  $f(z)$  解析点全体是一个开集, 它是可导点集合的内点构成的集合.

**练习.** 函数  $f(z)$  在点  $z_0$  处解析是  $f(z)$  在该点可导的( A ).

- (A) 充分非必要条件 (B) 必要非充分条件  
(C) 充要条件 (D) 既非充分也非必要条件

**答案.** 解析要求在  $z_0$  的一个邻域内都可导才行.

## 例题：函数的解析性

例. 研究函数  $f(z) = |z|^2$  的解析性.











### 例题：函数的解析性

**例.** 研究函数  $f(z) = |z|^2$  的解析性.

**解.** 注意到

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{(z + \Delta z)(\bar{z} + \overline{\Delta z}) - z\bar{z}}{\Delta z} = \bar{z} + \overline{\Delta z} + z \frac{\Delta x - \Delta y i}{\Delta x + \Delta y i}.$$

- 若  $z = 0$ , 则当  $\Delta z \rightarrow 0$  时该式极限为 0.
- 若  $z \neq 0$ , 则当  $\Delta y = 0, \Delta x \rightarrow 0$  时该式极限为  $\bar{z} + z$ ;

当  $\Delta x = 0, \Delta y \rightarrow 0$  时该式极限为  $\bar{z} - z$ . 因此此时极限不存在. 故  $f(z)$  仅在  $z = 0$  处可导, 从而处处不解析.

定理.













## 第二节 函数解析的充要条件

- 柯西-黎曼方程
- 柯西-黎曼方程的应用

通过对一些简单函数的分析, 我们发现可导的函数往往可以直接表达为  $z$  的函数的形式, 而不解析的往往包含  $x, y, \bar{z}$  等内容.

通过对一些简单函数的分析, 我们发现可导的函数往往可以直接表达为  $z$  的函数的形式, 而不解析的往往包含  $x, y, \bar{z}$  等内容.

这种现象并不是偶然的.

通过对一些简单函数的分析, 我们发现可导的函数往往可以直接表达为  $z$  的函数的形式, 而不解析的往往包含  $x, y, \bar{z}$  等内容.

这种现象并不是偶然的. 我们来研究二元实变量函数的可微性与复变函数可导的关系.

通过对一些简单函数的分析, 我们发现可导的函数往往可以直接表达为  $z$  的函数的形式, 而不解析的往往包含  $x, y, \bar{z}$  等内容.

这种现象并不是偶然的. 我们来研究二元实变量函数的可微性与复变函数可导的关系.

为了简便我们用  $u_x, u_y, v_x, v_y$  等记号表示偏导数.

设  $f = u + iv$  在  $z$  处可导,  $f'(z) = a + bi$ ,

设  $f = u + iv$  在  $z$  处可导,  $f'(z) = a + bi$ , 则

$$\Delta u + i \Delta v = \Delta f = (a + bi)(\Delta x + i \Delta y) + o(\Delta z).$$

设  $f = u + iv$  在  $z$  处可导,  $f'(z) = a + bi$ , 则

$$\Delta u + i \Delta v = \Delta f = (a + bi)(\Delta x + i \Delta y) + o(\Delta z).$$

展开可知

$$\Delta u = a \Delta x - b \Delta y + o(\Delta z),$$

$$\Delta v = b \Delta x + a \Delta y + o(\Delta z).$$

设  $f = u + iv$  在  $z$  处可导,  $f'(z) = a + bi$ , 则

$$\Delta u + i \Delta v = \Delta f = (a + bi)(\Delta x + i \Delta y) + o(\Delta z).$$

展开可知

$$\Delta u = a \Delta x - b \Delta y + o(\Delta z),$$

$$\Delta v = b \Delta x + a \Delta y + o(\Delta z).$$

由于  $o(\Delta z) = o(|\Delta z|) = o(\sqrt{x^2 + y^2})$ ,

设  $f = u + iv$  在  $z$  处可导,  $f'(z) = a + bi$ , 则

$$\Delta u + i \Delta v = \Delta f = (a + bi)(\Delta x + i \Delta y) + o(\Delta z).$$

展开可知

$$\Delta u = a \Delta x - b \Delta y + o(\Delta z),$$

$$\Delta v = b \Delta x + a \Delta y + o(\Delta z).$$

由于  $o(\Delta z) = o(|\Delta z|) = o(\sqrt{x^2 + y^2})$ , 因此  $u, v$  可微且  $u_x = v_y = a, v_x = -u_y = b$ .

















由此得到

**柯西-黎曼定理.**  $f(z)$  在  $z$  可导当且仅当在  $z$  点  $u, v$  可微且满足柯西-黎曼方程 (简称为 C-R 方程):

$$u_x = v_y, \quad v_x = -u_y.$$

此时

$$f'(z) = u_x + \mathrm{i}v_x = v_y - \mathrm{i}u_y.$$

由此得到

**柯西-黎曼定理.**  $f(z)$  在  $z$  可导当且仅当在  $z$  点  $u, v$  可微且满足柯西-黎曼方程 (简称为 C-R 方程):

$$u_x = v_y, \quad v_x = -u_y.$$

此时

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y.$$

需要注意的是: 柯西-黎曼定理中的可微性和 C-R 方程缺一不可.















注意到  $x = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\bar{z}, y = -\frac{i}{2}z + \frac{i}{2}\bar{z}$ . 仿照着二元实函数偏导数在变量替换下的变换规则, 定义  $f$  对  $z$  和  $\bar{z}$  的偏导数为

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y}, \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y}. \end{cases}$$

若把  $z, \bar{z}$  看成独立变量, 那么

- 当  $f$  在  $z$  处可导时,  $df = f' dz$ .
- 当  $f$  关于  $z, \bar{z}$  可微时 (即  $u, v$  可微),  $df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$ .

所以  $f$  在  $z$  处可导当且仅当  $u, v$  可微且  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ , 此时  $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}$ . 这也解释了为何含有  $x, y, \bar{z}$  形式的函数往往不可导, 而可导的函数往往可以直接表达为  $z$  的形式.







由于二元函数的偏导数均连续蕴含可微, 因此我们有:

**定理.**

- (1) 若  $u_x, u_y, v_x, v_y$  在  $z$  处连续, 且满足 C-R 方程, 则  $f(z)$  在  $z$  可导.
- (2) 若  $u_x, u_y, v_x, v_y$  在区域  $D$  上处处连续, 且满足 C-R 方程, 则  $f(z)$  在  $D$  上可导 (从而解析).



## 典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

例. 函数  $f(z) = \bar{z}$  在何处可导, 在何处解析?

## 典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

例. 函数  $f(z) = \bar{z}$  在何处可导, 在何处解析?

解. 由  $u = x, v = -y$  可知

$$u_x = 1,$$

$$v_x = 0,$$

$$u_y = 0,$$

$$v_y = -1.$$

## 典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

例. 函数  $f(z) = \bar{z}$  在何处可导, 在何处解析?

解. 由  $u = x, v = -y$  可知

$$u_x = 1,$$

$$u_y = 0,$$

$$v_x = 0,$$

$$v_y = -1.$$

因为  $u_x = 1 \neq v_y = -1$ , 所以该函数处处不可导, 处处不解析.

## 典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

例. 函数  $f(z) = \bar{z}$  在何处可导, 在何处解析?

解. 由  $u = x, v = -y$  可知

$$u_x = 1,$$

$$u_y = 0,$$

$$v_x = 0,$$

$$v_y = -1.$$

因为  $u_x = 1 \neq v_y = -1$ , 所以该函数处处不可导, 处处不解析.

也可由  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 1 \neq 0$  看出.

## 典型例题：利用 C-R 方程判断可导和解析

例. 函数  $f(z) = z \operatorname{Re} z$  在何处可导, 在何处解析?

## 典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

例. 函数  $f(z) = z \operatorname{Re} z$  在何处可导, 在何处解析?

解. 由  $f(z) = x^2 + ixy, u = x^2, v = xy$  可知

## 典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

例. 函数  $f(z) = z \operatorname{Re} z$  在何处可导, 在何处解析?

解. 由  $f(z) = x^2 + ixy, u = x^2, v = xy$  可知

$$u_x = 2x,$$

$$u_y = 0,$$

$$v_x = y,$$

$$v_y = x.$$

## 典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

例. 函数  $f(z) = z \operatorname{Re} z$  在何处可导, 在何处解析?

解. 由  $f(z) = x^2 + ixy, u = x^2, v = xy$  可知

$$u_x = 2x,$$

$$u_y = 0,$$

$$v_x = y,$$

$$v_y = x.$$

由  $2x = x, 0 = -y$  可知只有  $x = y = 0, z = 0$  满足 C-R 方程.

## 典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

例. 函数  $f(z) = z \operatorname{Re} z$  在何处可导, 在何处解析?

解. 由  $f(z) = x^2 + ixy, u = x^2, v = xy$  可知

$$u_x = 2x,$$

$$u_y = 0,$$

$$v_x = y,$$

$$v_y = x.$$

由  $2x = x, 0 = -y$  可知只有  $x = y = 0, z = 0$  满足 C-R 方程. 因此该函数只在 0 可导, 处处不解析且  $f'(0) = u_x(0, 0) + iv_x(0, 0) = 0$ .

## 典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

例. 函数  $f(z) = z \operatorname{Re} z$  在何处可导, 在何处解析?

解. 由  $f(z) = x^2 + ixy, u = x^2, v = xy$  可知

$$u_x = 2x,$$

$$u_y = 0,$$

$$v_x = y,$$

$$v_y = x.$$

由  $2x = x, 0 = -y$  可知只有  $x = y = 0, z = 0$  满足 C-R 方程. 因此该函数只在 0 可导, 处处不解析且  $f'(0) = u_x(0, 0) + iv_x(0, 0) = 0$ .

也可由

$$f = \frac{1}{2}z(z + \bar{z}), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}z$$

看出,

## 典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

例. 函数  $f(z) = z \operatorname{Re} z$  在何处可导, 在何处解析?

解. 由  $f(z) = x^2 + ixy, u = x^2, v = xy$  可知

$$u_x = 2x,$$

$$u_y = 0,$$

$$v_x = y,$$

$$v_y = x.$$

由  $2x = x, 0 = -y$  可知只有  $x = y = 0, z = 0$  满足 C-R 方程. 因此该函数只在 0 可导, 处处不解析且  $f'(0) = u_x(0, 0) + iv_x(0, 0) = 0$ .

也可由

$$f = \frac{1}{2}z(z + \bar{z}), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}z$$

$$\text{看出, } f'(0) = \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{z=0} = \left( z + \frac{1}{2}\bar{z} \right) \Big|_{z=0} = 0.$$

## 典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

例. 函数  $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$  在何处可导, 在何处解析?

## 典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

例. 函数  $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$  在何处可导, 在何处解析?

解. 由  $u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$  可知

















## 例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

**例.** 设函数  $f(z) = (x^2 + axy + by^2) + i(cx^2 + dxy + y^2)$  在复平面内处处解析. 求实常数  $a, b, c, d$  以及  $f'(z)$ .



## 例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

**例.** 设函数  $f(z) = (x^2 + axy + by^2) + i(cx^2 + dxy + y^2)$  在复平面内处处解析. 求实常数  $a, b, c, d$  以及  $f'(z)$ .

**解.** 由于

$$\begin{aligned}u_x &= 2x + ay, & u_y &= ax + 2by, \\v_x &= 2cx + dy, & v_y &= dx + 2y,\end{aligned}$$

因此

$$2x + ay = dx + 2y, \quad ax + 2by = -(2cx + dy),$$











## 例题: 利用 C-R 方程证明解析函数结论

**例.** 若  $f'(z)$  在区域  $D$  内处处为零, 则  $f(z)$  在  $D$  内是一常数.

**证明.** 由于

$$f'(z) = u_x + \mathrm{i}v_x = v_y - \mathrm{i}u_y = 0,$$

因此  $u_x = v_x = u_y = v_y = 0$ ,  $u, v$  均为常数, 从而  $f(z) = u + \mathrm{i}v$  是常数. □



## 例题: 利用 C-R 方程证明解析函数结论

例. 若  $f'(z)$  在区域  $D$  内处处为零, 则  $f(z)$  在  $D$  内是一常数.

证明. 由于

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y = 0,$$

因此  $u_x = v_x = u_y = v_y = 0$ ,  $u, v$  均为常数, 从而  $f(z) = u + iv$  是常数. □

类似地可以证明, 若  $f(z)$  在  $D$  内解析, 则下述条件均可推出  $f(z)$  是常数:

- $\arg f(z)$  是一常数,
- $\operatorname{Re} f(z)$  是一常数,
- $v = u^2$ ,
- $|f(z)|$  是一常数,
- $\operatorname{Im} f(z)$  是一常数,
- $u = v^2$ .









**例.** 若  $f(z)$  解析且  $f'(z)$  处处非零, 则曲线族  $u(x, y) = c_1$  和曲线族  $v(x, y) = c_2$  互相正交.

**证明.** 由于  $f'(z) = u_x - iu_y$ , 因此  $u_x, u_y$  不全为零. 对  $u(x, y) = c_1$  使用隐函数求导法则得

$$u_x dx + u_y dy = 0,$$

从而  $\mathbf{u} = (u_y, -u_x)$  是该曲线在  $z$  处的非零切向量. 同理  $\mathbf{v} = (v_y, -v_x)$  是  $v(x, y) = c_2$  在  $z$  处的非零切向量.

**例.** 若  $f(z)$  解析且  $f'(z)$  处处非零, 则曲线族  $u(x, y) = c_1$  和曲线族  $v(x, y) = c_2$  互相正交.

**证明.** 由于  $f'(z) = u_x - iu_y$ , 因此  $u_x, u_y$  不全为零. 对  $u(x, y) = c_1$  使用隐函数求导法则得

$$u_x dx + u_y dy = 0,$$

从而  $\mathbf{u} = (u_y, -u_x)$  是该曲线在  $z$  处的非零切向量. 同理  $\mathbf{v} = (v_y, -v_x)$  是  $v(x, y) = c_2$  在  $z$  处的非零切向量. 由于

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_y v_y + u_x v_x = u_y u_x - u_x u_y = 0,$$

**例.** 若  $f(z)$  解析且  $f'(z)$  处处非零, 则曲线族  $u(x, y) = c_1$  和曲线族  $v(x, y) = c_2$  互相正交.

**证明.** 由于  $f'(z) = u_x - iu_y$ , 因此  $u_x, u_y$  不全为零. 对  $u(x, y) = c_1$  使用隐函数求导法则得

$$u_x dx + u_y dy = 0,$$

从而  $\mathbf{u} = (u_y, -u_x)$  是该曲线在  $z$  处的非零切向量. 同理  $\mathbf{v} = (v_y, -v_x)$  是  $v(x, y) = c_2$  在  $z$  处的非零切向量. 由于

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_y v_y + u_x v_x = u_y u_x - u_x u_y = 0,$$

因此这两个切向量  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  正交, 从而曲线正交. □













### 第三节 初等函数

- 指数函数
- 对数函数
- 幂函数
- 三角函数和反三角函数
- 在有理函数的应用









我们将实变函数中的初等函数推广到复变函数. 多项式函数和有理函数的解析性质已经介绍过, 这里不再重复. 现在我们来定义指数函数.

指数函数有多种等价的定义方式:

(1)  $\exp z = e^x(\cos y + i \sin y)$  (欧拉恒等式);

我们将实变函数中的初等函数推广到复变函数. 多项式函数和有理函数的解析性质已经介绍过, 这里不再重复. 现在我们来定义指数函数.

指数函数有多种等价的定义方式:

- (1)  $\exp z = e^x(\cos y + i \sin y)$  (欧拉恒等式);
- (2)  $\exp z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$  (极限定义);

我们将实变函数中的初等函数推广到复变函数. 多项式函数和有理函数的解析性质已经介绍过, 这里不再重复. 现在我们来定义指数函数.

指数函数有多种等价的定义方式:

(1)  $\exp z = e^x(\cos y + i \sin y)$  (欧拉恒等式);

(2)  $\exp z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$  (极限定义);

(3)  $\exp z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}$  (级数定义);

我们将实变函数中的初等函数推广到复变函数. 多项式函数和有理函数的解析性质已经介绍过, 这里不再重复. 现在我们来定义指数函数.

指数函数有多种等价的定义方式:

- (1)  $\exp z = e^x (\cos y + i \sin y)$  (欧拉恒等式);
- (2)  $\exp z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$  (极限定义);
- (3)  $\exp z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}$  (级数定义);
- (4)  $\exp z$  是唯一的一个处处解析的函数, 使得当  $z = x \in \mathbb{R}$  时,  $\exp z = e^x$  (解析延拓).

有些人会从  $e^x, \cos x, \sin x$  的泰勒展开

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots$$

形式地代入得到欧拉恒等式  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ .

有些人会从  $e^x, \cos x, \sin x$  的泰勒展开

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots$$

形式地带入得到欧拉恒等式  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ . 事实上我们可以把它当做复指数函数的定义, 而不是欧拉恒等式的证明.

有些人会从  $e^x, \cos x, \sin x$  的泰勒展开

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots$$

形式地代入得到欧拉恒等式  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ . 事实上我们可以把它当做复指数函数的定义, 而不是欧拉恒等式的证明. 我们将在第四章说明(1)、(3)和(4)是等价的.

































































定义.

(1) 定义对数函数

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z.$$

它是一个多值函数.

定义.

(1) 定义对数函数

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z.$$

它是一个多值函数.

(2) 定义对数函数主值

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z.$$













### 典型例题：对数函数的计算

**例.** 求  $\operatorname{Ln} 2, \operatorname{Ln}(-1)$  以及它们的主值.

解.

(1)

$$\operatorname{Ln} 2 = \ln 2 + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z},$$

主值为  $\ln 2$ .

(2)

$$\text{Ln}(-1) = \ln 1 + i \text{Arg}(-1) = (2k + 1)\pi i, k \in \mathbb{Z},$$

### 典型例题：对数函数的计算

**例.** 求  $\operatorname{Ln} 2, \operatorname{Ln}(-1)$  以及它们的主值.

解.

(1)

$$\operatorname{Ln} 2 = \ln 2 + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z},$$

主值为  $\ln 2$ .

(2)

$$\text{Ln}(-1) = \ln 1 + i \text{Arg}(-1) = (2k + 1)\pi i, k \in \mathbb{Z},$$

主值为  $\pi i$ .













例. 解方程  $e^z - 1 - \sqrt{3}i = 0$ .







### 典型例题：对数函数的计算

**例.** 解方程  $e^z - 1 - \sqrt{3}i = 0$ .

**解.** 由于  $1 + \sqrt{3}i = 2e^{\frac{\pi i}{3}}$ , 因此

$$z = \text{Ln}(1 + \sqrt{3}\text{i}) = \ln 2 + \left(2k + \frac{1}{3}\right)\pi\text{i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

练习. 求  $\ln(-1 - \sqrt{3}i) = \underline{\ln 2 - \frac{2\pi i}{3}}$ .





对数函数与其主值的关系是

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + \operatorname{Ln} 1 = \ln z + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

根据辐角以及辐角主值的相应等式, 我们有

$$\text{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \text{Ln } z_1 + \text{Ln } z_2, \quad \text{Ln } \frac{z_1}{z_2} = \text{Ln } z_1 - \text{Ln } z_2,$$

$$\text{Ln } \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \text{Ln } z.$$

而当  $|n| \geq 2$  时,  $\text{Ln } z^n = n \text{Ln } z$  不成立.





























定义.

(1) 设  $a \neq 0, z \neq 0$ , 定义幂函数

$$w = z^a = e^{a \operatorname{Ln} z} = \exp(a \ln|z| + ia \operatorname{Arg} z), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(2) 幂函数的主值为

$$w = e^{a \ln z} = \exp(a \ln|z| + ia \arg z).$$

根据  $a$  的不同, 这个函数有着不同的性质.

当  $a$  为整数时, 辐角的选取不影响幂函数的取值, 所以  $w = z^a$  是单值的. 此时  $z^a$  就是我们之前定义的乘幂.

当  $a$  是非负整数时,  $z^a$  在复平面上解析;

























































































这些三角函数的奇偶性, 周期性和导数与实变情形类似,

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z,$$

且在定义域范围内是处处解析的.

三角函数的各种恒等式在复数情形也仍然成立, 例如

- $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2,$
- $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2,$
- $\sin^2 z + \cos^2 z = 1.$















设  $z = \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$ , 则

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0,$$



















例. 解方程  $\sin z = 2$ .

## 典型例题：解三角函数方程

例. 解方程  $\sin z = 2$ .

解. 由于  $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2$ ,



## 典型例题：解三角函数方程

例. 解方程  $\sin z = 2$ .

解. 由于  $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2$ , 我们有

$$e^{2iz} - 4ie^{iz} - 1 = 0.$$

于是  $e^{iz} = (2 \pm \sqrt{3})i$ ,

### 典型例题：解三角函数方程

**例.** 解方程  $\sin z = 2$ .

**解.** 由于  $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2$ , 我们有

$$e^{2iz} - 4ie^{iz} - 1 = 0.$$

于是  $e^{iz} = (2 \pm \sqrt{3})i$ ,

$$z = -i \operatorname{Ln}[(2 \pm \sqrt{3})i] = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi \pm i \ln(2 + \sqrt{3}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

另解. 由  $\sin z = 2$  可知

$$\cos z = \sqrt{1 - \sin^2 z} = \pm\sqrt{3}i.$$

另解. 由  $\sin z = 2$  可知

$$\cos z = \sqrt{1 - \sin^2 z} = \pm \sqrt{3}i.$$

于是  $e^{iz} = \cos z + i \sin z = (2 \pm \sqrt{3})i,$



另解. 由  $\sin z = 2$  可知

$$\cos z = \sqrt{1 - \sin^2 z} = \pm \sqrt{3}i.$$

于是  $e^{iz} = \cos z + i \sin z = (2 \pm \sqrt{3})i$ ,

$$z = -i \operatorname{Ln}[(2 \pm \sqrt{3})i] = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi \pm i \ln(2 + \sqrt{3}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

对于任意  $z$ , 总存在  $\theta$  使得

$$\operatorname{Arcsin} z = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi \pm \theta,$$

$$\operatorname{Arccos} z = 2k\pi \pm \theta,$$

$$\operatorname{Arctan} z = k\pi + \theta, \quad (z \neq \pm i).$$



















































续解. 当  $z = x > 1$  时,

$$\begin{aligned}
 g(x) &= \frac{1}{3} \ln(x-1) + \frac{2}{3} \operatorname{Re}[\zeta \ln(x-\zeta)] \\
 &= \frac{1}{3} \ln(x-1) + \frac{2}{3} \operatorname{Re}\left[\frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \ln\left(x - \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\right] \\
 &= \frac{1}{3} \ln(x-1) + \frac{2}{3} \operatorname{Re}\left[\frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \left(\ln \sqrt{x^2+x+1} - i \operatorname{arccot} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right] \\
 &= \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln(x^2+x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arccot} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}.
 \end{aligned}$$

续解. 当  $z = x > 1$  时,

$$\begin{aligned}
 g(x) &= \frac{1}{3} \ln(x-1) + \frac{2}{3} \operatorname{Re}[\zeta \ln(x-\zeta)] \\
 &= \frac{1}{3} \ln(x-1) + \frac{2}{3} \operatorname{Re}\left[\frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \ln\left(x - \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\right] \\
 &= \frac{1}{3} \ln(x-1) + \frac{2}{3} \operatorname{Re}\left[\frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \left(\ln \sqrt{x^2+x+1} - i \operatorname{arccot} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right] \\
 &= \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln(x^2+x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arccot} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}.
 \end{aligned}$$

对于实数  $x < 1$ , 可以验证上式的导数也等于  $f(x)$ , 从而  $f(x)$  的不定积分为  $g(x) + C$ ,  $C \in \mathbb{R}$ .

## **Temporary page!**

$\text{\LaTeX}$  was unable to guess the total number of pages correctly. As there was some unprocessed data that should have been added to the final page this extra page has been added to receive it.

If you rerun the document (without altering it) this surplus page will go away,  $\text{\LaTeX}$  now knows how many pages to expect for this document.