



合肥工业大学
HEFEI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

复变函数与积分变换

张神星 (合肥工业大学)

翡翠科教楼 B1810 东

zhangshenxing@hfut.edu.cn

<https://faculty.hfut.edu.cn/zhangshenxing>

002 班 (机器人、自动化) 课程信息

- 课时: 共 10 周 40 课时, 从 2026-09-09 到 2026-11-13
- 期末考试在课程结束后两周左右



复变函数 002 班 (机器人、自动化)

群号: 1036723606

入群答案 1400261B



教材: 《复变函数与积分变换》
机械工业出版社

004 班 (电气) 课程信息

- 课时: 共 10 周 40 课时, 从 2026-09-09 到 2026-11-13
- 期末考试在课程结束后两周左右



复变函数 004 班 (电气)

群号: 1036737671

入群答案 1400261B



教材: 《复变函数与积分变换》
机械工业出版社

成绩构成

期末考试 60 分

期末卷面需要达到 50 分才计算总评分数, 50 分以下直接不及格. **电子匿名阅卷, 请务必重视!**

课堂测试 20 分

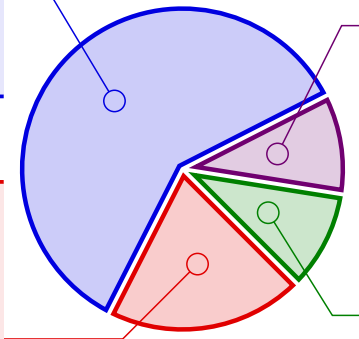
课堂测试共两次取平均, 测试时间会提前通知. **测试时在教室内作答, 否则按未考处理.**

课后作业 10 分

作业通过超星发布, 扫描后在线提交. **作业必须按时提交, 不允许补交.**

智慧课程 10 分

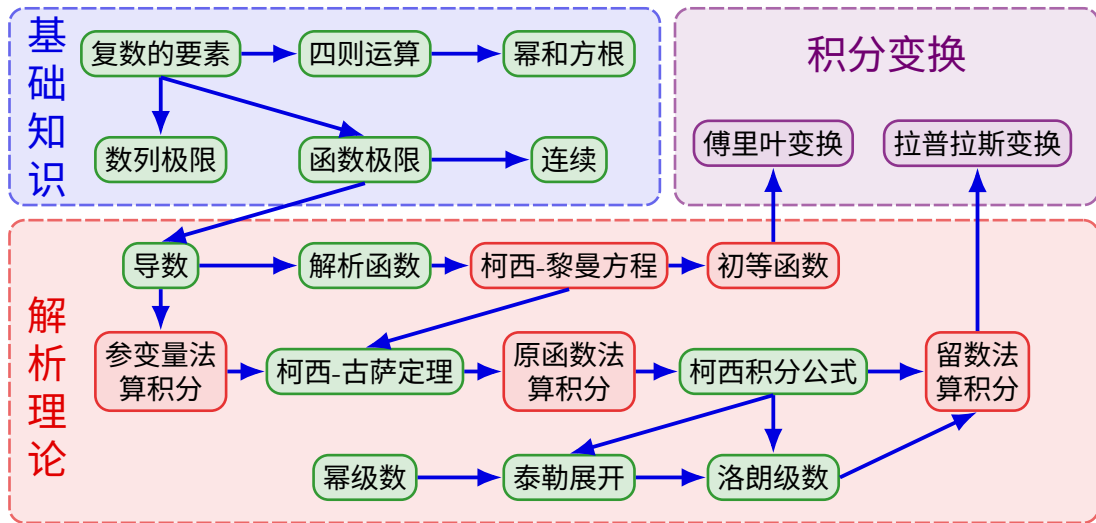
在学习通内完成.
章节 → 章节测试 (提交后无法修改或打回, 5 分);
讨论 (回答讨论题, 5 分).

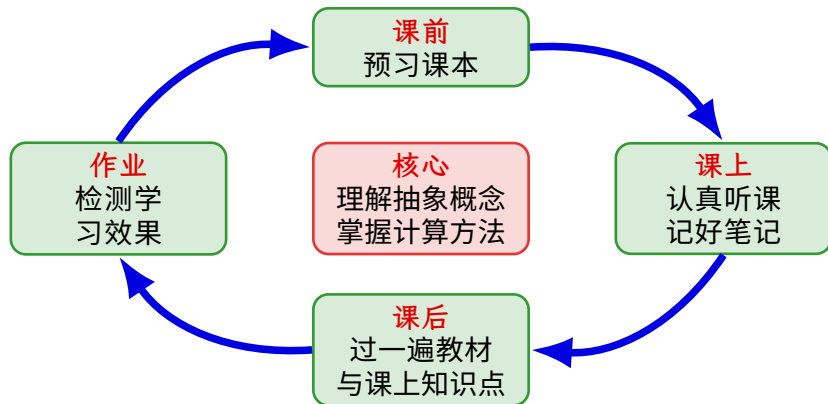


复变函数的应用非常广泛, 它包括:

- **数学**中的代数、数论、几何、分析、动力系统……
- **物理学**中流体力学、材料力学、电磁学、光学、量子力学……
- **信息学、电子学、电气工程**……

可以说复变函数应用之广, 在大学数学课程中仅次于高等数学和线性代数.





第一章 复数与复变函数

- ① 复数及其代数运算
- ② 复数的三角形式与指数形式
- ③ 三角和指数形式在计算中的运用
- ④ 曲线和区域
- ⑤ 复变函数
- ⑥ 极限和连续性

第一节 复数及其代数运算

- 复数的产生
- 复数的概念
- 复数的代数运算
- 共轭复数

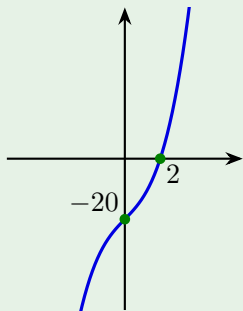
复数起源于多项式的求根问题. 考虑一元二次方程 $x^2 + bx + c = 0$. 配方可得

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2 - 4c}{4}.$$

于是得到求根公式 $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2}$, 其中 $\Delta = b^2 - 4c$.

- (1) 当 $\Delta > 0$ 时, 有两个不同的实根;
- (2) 当 $\Delta = 0$ 时, 有一个二重的实根;
- (3) 当 $\Delta < 0$ 时, 无实根.

可以看出, 在一元二次方程中, 我们可以舍去包含**负数开方**的解. 然而在一元三次方程中, 即便只考虑实数根也会不可避免地引入负数开方.



例题：判断实数和纯虚数

例. 实数 x 取何值时, $z = (x^2 + 3x - 4) + (x^2 + 5x - 6)i$ 是:

- (1) 实数; (2) 纯虚数.

解.

(1) $\operatorname{Im} z = x^2 + 5x - 6 = 0$, 即 $x = 1$ 或 -6 .

(2) $\operatorname{Re} z = x^2 + 3x - 4 = 0$, 即 $x = 1$ 或 -4 . 但同时要求 $\operatorname{Im} z = x^2 + 5x - 6 \neq 0$, 因此 $x \neq 1$. 故 $x = -4$.

练习. 若 $(x^2 - 5x + 4) + (x^2 - 4x + 3)i$ 是纯虚数, 则实数 $x = \underline{4}$.

设 $z_1 = x_1 + y_1i$, $z_2 = x_2 + y_2i$. 定义复数的**加法**和**减法**:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i, \quad z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i.$$

复数的加减法与其对应的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的加减法是一致的.

规定 $i \cdot i = -1$. 定义复数的乘法:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot y_2 i + y_1 i \cdot x_2 + y_1 i \cdot y_2 i \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i. \end{aligned}$$

此时加法/乘法交换律, 结合律以及乘法分配律均成立.

待定系数可得复数的除法:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i.$$

对于正整数 n , 定义 z 的 n 次幂为 n 个 z 相乘. 当 $z \neq 0$ 时, 还可以定义

$$z^0 = 1, z^{-n} = \frac{1}{z^n}.$$

例题: 复数的乘幂

例.

(1) $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$. 一般地, 对于整数 n ,

$$i^{4n} = 1, \quad i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i.$$

(2) 令 $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$, 则 $\omega^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}, \omega^3 = 1$.

(3) 令 $z = 1 + i$, 则

$$z^2 = 2i, \quad z^3 = -2 + 2i, \quad z^4 = -4, \quad z^8 = 16 = 2^4.$$

将满足 $z^n = 1$ 的复数 z 称为 n 次单位根. 那么 $1, i, -1, -i$ 是 4 次单位根, $1, \omega, \omega^2$ 是 3 次单位根, $-\omega$ 是 6 次单位根.

例题：共轭复数判断实数

例. 设 $z = x + yi$ 是虚数. 证明: $x^2 + y^2 = 1$ 当且仅当 $z + \frac{1}{z}$ 是实数.

证明. $z + \frac{1}{z}$ 是实数等价于

$$z + \frac{1}{z} = \overline{\left(z + \frac{1}{z}\right)} = \bar{z} + \frac{1}{\bar{z}},$$

等价于

$$z - \bar{z} = \frac{1}{\bar{z}} - \frac{1}{z} = \frac{z - \bar{z}}{z\bar{z}}, \quad (z - \bar{z})(z\bar{z} - 1) = 0.$$

由 z 是虚数可知 $z \neq \bar{z}$. 故上述等式等价于 $z\bar{z} = 1$, 即 $x^2 + y^2 = 1$. □

例题：复数的代数计算

例. 设 $z_1 = 5 - 5i, z_2 = -3 + 4i$, 求 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$.

解.

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{5 - 5i}{-3 + 4i} = \frac{(5 - 5i)(-3 - 4i)}{(-3)^2 + 4^2} \\ &= \frac{(-15 - 20) + (-20 + 15)i}{25} = -\frac{7}{5} - \frac{1}{5}i,\end{aligned}$$

因此 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = -\frac{7}{5} + \frac{1}{5}i$.

第二节 复数的三角形式与指数形式

- 复数的模和辐角
- 复数的三角和指数形式

复数的极坐标形式

由平面的极坐标表示, 我们可以得到复数的另一种表示方式. 以 0 为极点, 正实轴为极轴, 逆时针为极角方向可以定义出复平面上的极坐标系.

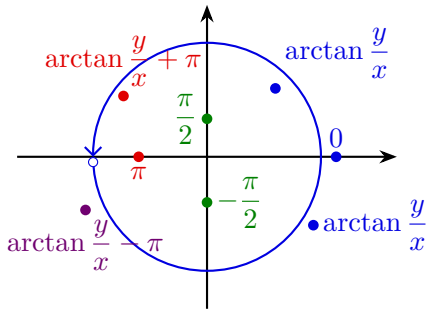
定义.

- (1) 称 r 为 z 的模, 记为 $|z| = r$.
- (2) 称 θ 为 z 的辐角, 记为 $\operatorname{Arg} z = \theta$. 约定 0 的辐角没有定义.

任意非零复数 z 都有无穷多个辐角. 称其中位于 $(-\pi, \pi]$ 的那个辐角为**辐角主值**或**主辐角**, 记作 $\arg z$. 那么

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

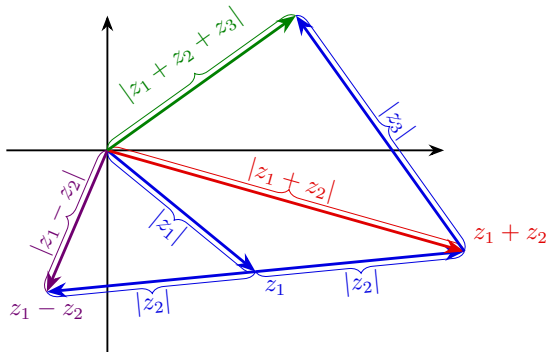
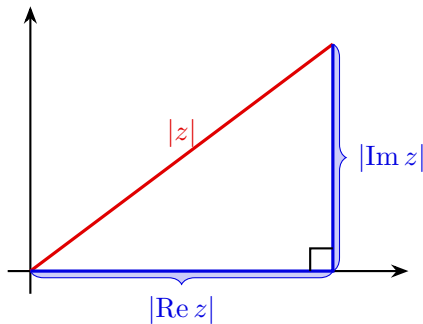
$$\arg z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & x > 0; \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & x < 0, y \geq 0; \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi, & x < 0, y < 0; \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0. \end{cases}$$



复数模的性质

复数的模满足如下性质

- (1) $z\bar{z} = |z|^2 = |\bar{z}|^2$;
- (2) $|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z| \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$;
- (3) $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$; 一般地, $|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$.



例题：共轭复数解决模的等式

例. 证明

$$(1) |z_1 z_2| = |z_1 \overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|;$$

$$(2) |z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}).$$

证明.

(1) 因为

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \cdot \overline{z_1 z_2} = z_1 \overline{z_1} \cdot z_2 \overline{z_2} = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2,$$

所以 $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$. 因此 $|z_1 \overline{z_2}| = |z_1| \cdot |\overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|$.

(2) 因为

$$\text{左边} = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = z_1 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2} + z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2,$$

$$\text{右边} = z_1 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2} + z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1 z_2},$$

而 $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} z_2$, 所以两侧相等.



复数的三角和指数形式

由 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ 可得

复数的三角形式.

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

定义 $e^{i\theta} = \exp(i\theta) := \cos \theta + i \sin \theta$ (欧拉恒等式). 那么我们得到

复数的指数形式.

$$z = r e^{i\theta} = r \exp(i\theta).$$

这两种形式的等价的, 指数形式可以认为是三角形式的一种缩写方式. 求复数的三角和指数形式的**关键在于计算模和辐角**.

例题：求复数的三角和指数形式

例. 将 $z = \sin \frac{\pi}{5} + i \cos \frac{\pi}{5}$ 化成三角形式和指数形式.

解. $r = |z| = 1$. 由于 z 在第一象限, 因此

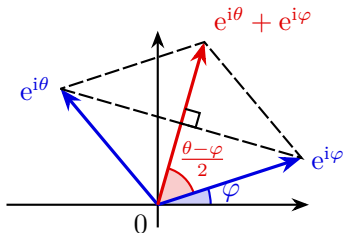
$$\arg z = \arctan \frac{\cos(\pi/5)}{\sin(\pi/5)} = \arctan \cot \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{10},$$

$$z = \cos \frac{3\pi}{10} + i \sin \frac{3\pi}{10} = e^{\frac{3\pi i}{10}}.$$

求复数的三角或指数形式时, 只需取一个辐角就可以了, 不要求必须是辐角主值.

两个模相等的复数之和的三角和指数形式形式较为简单.

$$e^{i\theta} + e^{i\varphi} = 2 \cos \frac{\theta - \varphi}{2} e^{\frac{\theta + \varphi}{2} i}.$$



例. 若 $|z| = 1, \arg z = \theta$, 则 $z + 1 = 2 \cos \frac{\theta}{2} e^{\frac{\theta i}{2}}$.

第三节 三角和指数形式在计算中的运用

- 复数的乘除
- 复数乘法的几何意义
- 复数的乘幂
- 复数的方根

三角和指数形式在复数的乘法、除法、乘幂以及方根等计算中非常有用.

定理. 设

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) = r_1 e^{i\theta_1},$$

$$z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = r_2 e^{i\theta_2} \neq 0,$$

则

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)] = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

换言之,

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2, \quad \text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \text{Arg } z_1 - \text{Arg } z_2.$$

多值函数相等是指两边所能取到的值构成的集合相等. 注意上述等式中 Arg 不能换成 arg , 也就是说

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2, \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$$

未必成立. 这是因为 $\arg z_1 \pm \arg z_2$ 有可能不落在区间 $(-\pi, \pi]$ 上. 当且仅当等式右侧落在区间 $(-\pi, \pi]$ 内时才成立, 否则等式两侧会相差 $\pm 2\pi$.

现在来看三次方程 $x^3 + px + q = 0$ 的根, $p \neq 0$. 回顾求根公式:

$$x = u + v, \quad u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}, \quad uv = -\frac{p}{3}, \quad \Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}.$$

(1) 若 $\Delta > 0$, 设 $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, 设实数 α 满足 $\alpha^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}$, 则

$$u = \alpha, \alpha\omega, \alpha\omega^2, \quad x = \alpha - \frac{p}{3\alpha}, \quad \alpha\omega - \frac{p}{3\alpha}\omega^2, \quad \alpha\omega^2 - \frac{p}{3\alpha}\omega.$$

容易证明后两个根都是虚数.

(2) 若 $\Delta \leq 0$, 则 $p < 0$, $|u|^2 = -\frac{p}{3} > 0$. 从而 $v = \bar{u}$. 设 $\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} = u_1, u_2, u_3$, 则我们得到 3 个实根

$$x = u_1 + \overline{u_1}, \quad u_2 + \overline{u_2}, \quad u_3 + \overline{u_3}.$$

不难验证, 若有重根则 $\Delta = 0$.

第四节 曲线和区域

- 复数表平面曲线
- 区域和闭区域
- 区域的特性

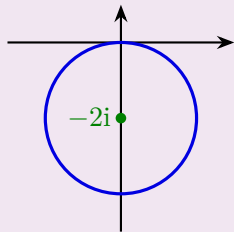
例题：复数方程表圆

很多的平面图形能用复数形式的方程来表示. 这种表示方程有些时候会显得更加直观和易于理解.

例. $|z + 2i| = 2$.

该方程表示与 $-2i$ 的距离为 2 的点全体, 即圆心为 $-2i$ 半径为 2 的圆.

一般的圆方程为 $|z - z_0| = R$, 其中 z_0 是圆心, R 是半径.

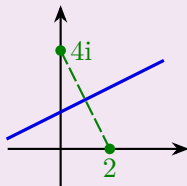


例题：复数方程表直线

例. $|z - 4i| = |z - 2|$.

该方程表示与 $4i$ 和 2 的距离相等的点, 即二者连线的垂直平分线. 两边同时平方化简可得 $x - 2y + 3 = 0$. 该方程也可以表达为

$$(1 + 2i)z + (1 - 2i)\bar{z} + 6 = 0.$$



例题：复数方程表平面图形

练习. $z^2 + \bar{z}^2 = 1$ 和 $z^2 - \bar{z}^2 = i$ 分别表示什么图形？

答案. 双曲线 $x^2 - y^2 = \frac{1}{2}$ 和双曲线 $xy = \frac{1}{4}$.

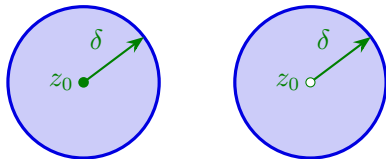
为了引入极限的概念, 我们需要考虑点的邻域. 类比于高等数学中的邻域和去心邻域, 我们在复变函数中, 称开圆盘

$$U(z_0, \delta) = \{z : |z - z_0| < \delta\}$$

为 z_0 的一个 δ -邻域. 称去心开圆盘

$$\overset{\circ}{U}(z_0, \delta) = \{z : 0 < |z - z_0| < \delta\}$$

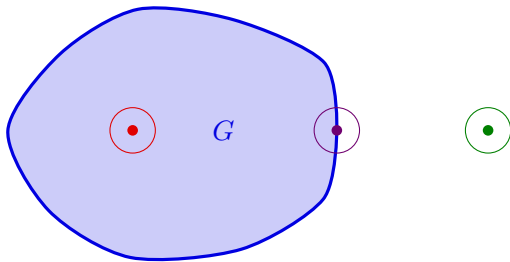
为 z_0 的一个去心 δ -邻域.



设 G 是复平面的一个子集, $z_0 \in \mathbb{C}$. 它们的位置关系有三种可能:

- (1) 若存在 z_0 的一个邻域 U 完全包含在 G 中, 则称 z_0 是 G 的一个内点.
- (2) 若存在 z_0 的一个邻域 U 完全不包含在 G 中, 则称 z_0 是 G 的一个外点.
- (3) 若 z_0 既不是内点也不是外点, 则称 z_0 是 G 的一个边界点.

内点都属于 G , 外点都不属于 G , 而边界点则都有可能. 这类比于区间的端点和区间的关系.



第五节 复变函数

- 复变函数的定义
- 复平面的变换

所谓的**映射**, 就是两个集合之间的一种对应 $f: A \rightarrow B$, 使得对于每一个 $a \in A$, 有一个唯一确定的 $b = f(a)$ 与之对应.

- (1) 当 A 和 B 都是实数集合的子集时, 它就是一个实变函数.
- (2) 当 A 和 B 都是复数集合的子集时, 它就是一个**复变函数**.

例. $f(z) = \operatorname{Re} z, \arg z, |z|, z^n$ (n 为整数), $\frac{z+1}{z^2+1}$ 都是复变函数.

定义. 称 A 为函数 f 的**定义域**, 称 $\{w = f(z) \mid z \in A\}$ 为它的**值域**.

上述函数的定义域和值域分别是什么?

在复变函数理论中, 我们常常会遇到**多值的复变函数**, 也就是说一个 $z \in A$ 可能有多
个 w 与之对应. 例如 $\operatorname{Arg} z$, $\sqrt[n]{z}$ 等.

为了方便研究, 我们常常需要对每一个 z , 选取固定的一个 $f(z)$ 的值. 这样我们得到了
这个多值函数的一个**单值分支**.

例. $\arg z$ 是无穷多值函数 $\operatorname{Arg} z$ 的一个单值分支.

在考虑多值的情况下, 复变函数总有反函数. 若 f 和 f^{-1} 都是单值的, 则称 f 是**一一对应**.

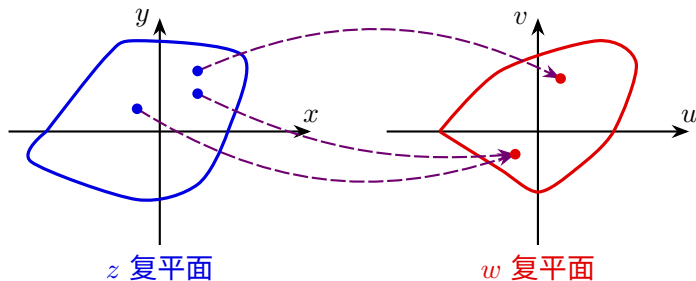
例. $f(z) = z^n$ 的反函数就是 $f^{-1}(w) = \sqrt[n]{w}$. 当 $n = \pm 1$ 时, f 是一一对应.

若无特别声明, 本课程中**复变函数总是指单值的复变函数**.

大部分复变函数的图像无法在三维空间中表示出来. 为了直观理解和研究, 我们用两个复平面 (z 复平面和 w 复平面) 之间的**变换**(也叫**映射**、**映照**) 来表示这种对应关系. 注意到 w 的实部和虚部可以看作 z 的实部和虚部的函数, 即

$$w = u + iv = u(x, y) + iv(x, y)$$

的实部和虚部是两个二元实变函数.



例题: 平方变换

例. 函数 $w = z^2$. 这个变换把 z 的辐角增大一倍, 因此它会把角形区域变换为角形区域, 并将夹角放大一倍.

例题: 变换的像

例. 求扇形区域 $0 < \arg z < \frac{\pi}{3}, 0 < |z| < 2$ 在变换 $w = z^2$ 下的像.

解. 设 $z = re^{i\theta}$, 则 $w = r^2 e^{2i\theta}$. 因此它的像是扇形区域

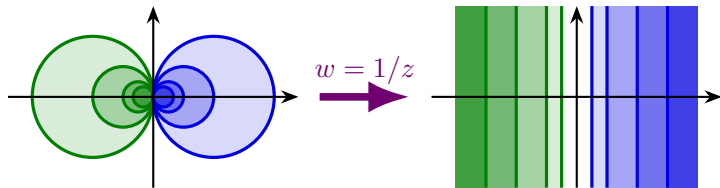
$$0 < \arg w < \frac{2\pi}{3}, \quad 0 < |w| < 4.$$

例题：变换的像

形如

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

的映射叫作**分式线性映射**, 其中 $ad \neq bc$. 它总把直线和圆映成直线或圆 (至多相差一点).



练习. 分式线性映射 $w = \frac{az + b}{cz + d}$ 的像不包含复数 a/c .

第六节 极限和连续性

- 数列的极限
- 无穷远点和复球面
- 函数的极限
- 函数的连续性

类似于实数的情形, 我们可以定义复数列和复变函数的极限.

我们先来看数列极限的定义.

定义. 设 $\{z_n\}_{n \geq 1}$ 是一个复数列. 若存在复数 z 满足对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N 使得当 $n \geq N$ 时, $|z_n - z| < \varepsilon$, 则称 z 是**数列 $\{z_n\}$ 的极限**, 记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$.

此时称**极限存在或数列收敛**. 若不存在这样的 z , 则称**极限不存在或数列发散**.

可以看出, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ 等价于实极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - z| = 0$.

由于复数列极限的定义和实数列极限的定义在形式上完全相同, 因此类似地, 极限的四则运算法则对于复数列也是成立的.

定理. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z, \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = w$, 则

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n \pm w_n) = z \pm w;$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n w_n = zw;$

(3) 当 $w \neq 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{z}{w}.$

例题: 判断函数极限是否存在

例. 证明: 当 $z \rightarrow 0$ 时, 函数 $f(z) = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}$ 的极限不存在.

证明. 令 $z = x + yi$, 则 $f(z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. 因此

$$u(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad v(x, y) = 0.$$

当 z 在实轴原点两侧分别趋向于 0 时, $u(x, y) \rightarrow \pm 1$. 因此 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} u(x, y)$ 不存在, 从而

$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ 不存在. □

例题: 函数连续性的判定

例. 证明: 若 $f(z)$ 在 z_0 连续, 则 $\overline{f(z)}$ 在 z_0 也连续.

证明. 设

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z_0 = x_0 + iy_0.$$

那么 $u(x, y), v(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 连续. 从而 $-v(x, y)$ 也在 (x_0, y_0) 连续. 所以

$$\overline{f(z)} = u(x, y) - iv(x, y)$$

在 (x_0, y_0) 连续. □

另证. 函数 $g(z) = \bar{z} = x - iy$ 处处连续, 从而 $g[f(z)] = \overline{f(z)}$ 在 z_0 处连续. □

