



合肥工业大学
HEFEI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

大学生数学竞赛（非数）

张神星 (合肥工业大学)

翡翠科教楼 B1810 东

zhangshenxing@hfut.edu.cn

<https://faculty.hfut.edu.cn/zhangshenxing>

第二章 导数与微分及其应用

- ① 导数与微分的定义
- ② 导数的计算
- ③ 导数的应用
- ④ 中值定理
- ⑤ 不等式的证明

第一节 导数与微分的定义

- 导数的定义
- 微分的定义

例. 设 $f(0) = 0$, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导的充要条件是().

(A) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(1 - \cos h)$ 存在

(B) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} f(1 - e^h)$ 存在

(C) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(h - \sin h)$ 存在

(D) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(2h) - f(h))$ 存在

解. $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$. 设 $\lim_{h \rightarrow 0} g(h) = 0$. 如果 $f'(0)$ 存在, 那么 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(h))}{g(h)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0)$. 反过来则要求 $g(h)$ 能在任意 $U(0, \delta)$ 的值域覆盖某个 $U(0, \delta_1)$, 这样就能保证

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(h))}{g(h)} \text{ 存在} \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \text{ 存在}.$$

例. 设 $f(0) = 0$, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导的充要条件是(B).

(A) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(1 - \cos h)$ 存在

(B) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} f(1 - e^h)$ 存在

(C) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(h - \sin h)$ 存在

(D) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(2h) - f(h))$ 存在

续解. 如果 $g(h)$ 在 $U(0, \delta)$ 的值域只能覆盖 $(0, \delta_1)$, 则只能保证 $f'_+(0)$ 存在.

(A) $g(h) = 1 - \cos h \geq 0$, 所以它只能保证 $f'_+(0)$ 存在.

(B) $g(h) = 1 - e^h$ 存在反函数 $h = \ln(1 - x)$, 所以 (B) 正确.

(C) $g(h) = h - \sin h \sim \frac{h^3}{6}$, 所以分母应该换成 h^3 , 这样再加上 g 在 0 附近单调递增就对了 ((C) 是必要条件, 如果分母是 h^4 是充分条件).

(D) 可以选择 $f(x) = 1, x \neq 0$ 来说明它错误.

例. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = A$, 求证: $f'(0)$ 存在且等于 A .

证明. 毫无疑问这里要用到连续性. 由题设可知 $f(2x) - f(x) = Ax + o(x)$, 于是

$$f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = A \cdot \frac{x}{2} + o(x),$$

$$f\left(\frac{x}{2}\right) - f\left(\frac{x}{4}\right) = A \cdot \frac{x}{4} + o(x),$$

•
•
•

$$f\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right) - f\left(\frac{x}{2^n}\right) = A \cdot \frac{x}{2^n} + o(x).$$

将以上各式相加得到

$$f(x) - f\left(\frac{x}{2^n}\right) = Ax\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) + o(x) = Ax\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + o(x).$$

注意这里是因为只有有限项, 所以所有的 $o(x)$ 加起来还是 $o(x)$. 但是这里不能直接令 $n \rightarrow \infty$ 得到 $f(x) - f(0) = Ax + o(x)$, 因为 $x \rightarrow 0$ 和 $n \rightarrow \infty$ 不能随便交换.

例. 设 $f(x)$ 是定义在 $-1 < x < 1$ 的实值函数, 且 $f'(0)$ 存在. 设 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是两个实数列, 且 $-1 < a_n < 0 < b_n < 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = f'(0)$.

证明. 这题和上一题有类似的想法. 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得当 $0 < |x| < \delta$ 时, $\left| \frac{f(x) - f(0)}{x} - f'(0) \right| < \varepsilon$. 由于 a_n, b_n 极限均为 0, 因此存在 N 使得当 $n > N$ 时, $|a_n| < \delta, |b_n| < \delta$. 于是

$$|f(a_n) - f(0) - a_n f'(0)| < |a_n| \varepsilon = -a_n \varepsilon,$$

$$|f(b_n) - f(0) - b_n f'(0)| < |b_n| \varepsilon = b_n \varepsilon.$$

由三角不等式

$$\begin{aligned} & |f(b_n) - f(a_n) - (b_n - a_n)f'(0)| \\ & \leq |f(b_n) - f(0) - b_nf'(0)| + |f(a_n) - f(0) - a_nf'(0)| \\ & < (b_n - a_n)\varepsilon, \end{aligned}$$

最后由 ε 的任意性可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = f'(0)$.



例. 多选题: 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 则()存在能推出 $f'(0)$ 存在.

(A) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)| - f(0)}{x}$

(B) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - |f(0)|}{x}$

(C) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|}{x}$

(D) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)| - |f(0)|}{x}$

若这些极限存在, 则分子极限为 0.

(A) $\lim |f(x)| = |f(0)| = f(0) \implies f(0) = 0$. 由于 x 在零两侧左负右正, 因此该式极限也是左 ≤ 0 右 ≥ 0 , 从而极限只能是 0, 再由夹逼准则 $\frac{f(x)}{x}$ 极限也是 0, $f'(0) = 0$.

(B) $\lim f(x) = f(0) = |f(0)| \implies f(0) = 0$ 立得.

(C) 和 (A) 同理.

(D) 若 $f(0) \neq 0$, 则 $f(x)$ 在 0 附近和 $f(0)$ 同号, 从而该式极限就是 $f'(0)$ 或 $-f'(0)$. 若 $f(0) = 0$, 则和 (A) 同理.

例. 设 $f(1) = 0, f'(1) = 2$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x + \cos x)}{x^2 + x \tan x}$.

解. 这种极限需要先凑一个导数形式的极限.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x + \cos x) - f(1)}{\sin^2 x + \cos x - 1} \cdot \frac{\sin^2 x + \cos x - 1}{x^2 + x \tan x} \\ &= f'(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{2x^2 + o(x^2)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

例. 下列命题正确的是().

(A) 若 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 内连续, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界.

(B) 若 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内连续, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界.

(C) 若 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界.

(D) 若 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界, 则 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界.

解. 开区间内连续和有界一般没什么关系. 设 $f(x) = \frac{1}{x}$, 则可知 (A)(B) 错误. 设 $f(x) = \sqrt{x}$, 则可知 (D) 错误. 对于 (C), 由

$$f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(x - \frac{1}{2}\right)f'(\xi)$$

可知 $f(x)$ 有界.

例. 设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有界可导, 则(B).

(A) 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 时, 必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

(B) 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 存在时, 必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

(C) 当 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ 时, 必有 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$.

(D) 当 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$ 存在时, 必有 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$.

解. 只需考虑某些振荡得比较厉害的情形即可. 对于 (A), $f(x)$ 可以振荡着趋于 0, 而且每次振荡出一个非常陡的尖尖, (A) 错误.

对于 (B), 如果 $f'(x)$ 的极限为 $A \neq 0$, 那么充分大之后, $f(x)$ 基本上和 Ax 具有相似的增长幅度, 所以不可能有界.

例. 设 $f(u)$ 可导, $y = f(x^2)$ 当自变量 x 在 $x = -1$ 处取得增量 $\Delta x = -0.1$ 时, 相应函数增量 Δy 的线性主部为 0.1. 求 $f'(1)$.

只需注意 Δy 的线性主部 $= dy = f'(x_0) dx$; $\Delta x = dx$.

解. 由微分定义可知

$$y'(-1) = 2x f'(x^2)|_{x=-1} = \frac{dy}{dx} = \frac{0.1}{-0.1} = -1.$$

$$\text{故 } f'(1) = \frac{1}{2}.$$

第二节 导数的计算

- 利用求导公式和求导法则求导
- 分段函数的求导法
- 隐函数、参数方程及反函数的导数
- 积分上限函数的导数
- 高阶导数

例. 设 $f(x) = \frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$, 求 $f'(1)$.

解. 设 $g(x) = \frac{(x-2)\cdots(x-n)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$, 则 $f(x) = (x-1)g(x)$, $f'(x) = g(x) + (x-1)g'(x)$, 因此

$$f'(1) = g(1) = \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}.$$

如果利用对数求导法, 我们可以得到

$$(\ln f)' = \frac{f'}{f} = \frac{1}{x-1} + \cdots + \frac{1}{x-n} - \frac{1}{x+1} - \cdots - \frac{1}{x+n}.$$

$$\text{例如 } f'(0) = f(0) \cdot \left(-2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) = 2(-1)^{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

例. 设 $f_1(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $f_n(x) = f_1(f_{n-1}(x))$. 求 $f'_n(1)$.

解.

$$f_2(x) = f_1(f_1(x)) = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{1+x^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}.$$

我们猜测 $f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$. 归纳: 设 $f_k(x) = \frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}$, 则

$$f_{k+1}(x) = f_1(f_k(x)) = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+kx^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}.$$

因此由数学归纳法可知成立.

$$f'_n(x) = (1 + nx^2)^{-\frac{1}{2}} + x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(1 + nx^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (2nx) = \frac{1}{(1 + nx^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

例. 设函数 $y = y(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有二阶导数, 且 $y' \neq 0$, $x = x(y)$ 是 $y = y(x)$ 的反函数. 求 $\frac{d^2x}{dy^2} + (y + \sin x) \left(\frac{dx}{dy}\right)^3 = 0$ 满足 $y(0) = 0, y'(0) = \frac{3}{2}$ 的解.

解. 根据反函数的导数性质:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'}, \quad \frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d(1/y')}{dy} = \frac{1}{y'} \cdot \left(-\frac{y''}{y'^2}\right) = -\frac{y''}{y'^3}.$$

代入原方程中得到

$$-\frac{y''}{y'^3} + (y + \sin x) \left(\frac{1}{y'}\right)^3 = 0, \quad y'' - y - \sin x = 0.$$

注意到齐次部分 $y'' - y = 0$ 的通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$. 设 $y = A \cos x + B \sin x$ 是一特解, 代入可得 $A = 0, B = -\frac{1}{2}$. 因此通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2} \sin x$, 代入初值条件可得

$$y = e^x - e^{-x} - \frac{1}{2} \sin x.$$

例. 设 $y = \cos(\beta \arcsin x)$, 求 $y^{(n)}(0)$.

解. 这题的想法也是类似的. 注意到

$$y' = -\sin(\beta \arcsin x) \cdot \beta \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, y'(0) = 0,$$

$$y'' = -\cos(\beta \arcsin x) \cdot \beta^2 \cdot \frac{1}{1-x^2} - \sin(\beta \arcsin x) \cdot \beta \cdot \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}, y''(0) = -\beta^2.$$

所以

$$(1-x^2)y'' = -\beta^2 y + xy'.$$

两边同时求 n 阶导得到

$$(1-x^2)y^{(n+2)} + C_n^1(-2x)y^{(n+1)} + C_n^2(-2)y^{(n)} = -\beta^2 y^{(n)} + xy^{(n+1)} + C_n^1 y^{(n)},$$

令 $x=0$, 得到 $y^{(n+2)}(0) = (n^2 - \beta^2)y^{(n)}(0)$. 故

$$y^{(2m-1)}(0) = 0, \quad y^{(2m)}(0) = \prod_{k=1}^{m-1} (4k^2 - \beta^2).$$

第三节 导数的应用

- 函数的极值与最值
- 拐点与凹凸性
- 渐近线
- 杂例

例. 设 $f(x)$ 在 $x = 1$ 的某邻域内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(f(x+1) + \cos x)}{\sqrt{1-x^2} - 1} = -1$. 问 $f(1)$ 是否为 $f(x)$ 的极值并说明理由.

解. 由题设可知

$$\begin{aligned} -1 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(f(x+1) + \cos x)}{\sqrt{1-x^2} - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+1) + \cos x - 1}{-\frac{1}{2}x^2} = 1 - 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+1)}{x^2}. \end{aligned}$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+1)}{x^2} = 1$. 由连续可知 $f(1) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x+1) = 0$. 由极限的保号性可知存在 $\delta > 0$ 使得 $x \in \overset{\circ}{U}(0, \delta)$ 时 $\frac{f(x+1)}{x^2} > 0$, 从而 $x \in \overset{\circ}{U}(1, \delta)$ 时 $f(x) > 0$, $f(1)$ 是一个极小值.

关键在于分母是偶数次的.

例. 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 二阶连续可导, 且满足 $xf''(x) + 3x(f'(x))^2 = 1 - e^{-x}$. 若 $x = c$ 是 $f(x)$ 的驻点, 问 $f(c)$ 是否为 $f(x)$ 的极值并说明理由.

解. (1) 若 $c \neq 0$, 则 $f'(c) = 0$,

$$f''(c) = \frac{1 - e^{-c}}{c} > 0.$$

从而是极小值点.

(2) 若 $c = 0$, 则当 $x \neq 0$ 时,

$$f''(x) = -3(f'(x))^2 + \frac{1 - e^{-x}}{x}.$$

由于 $f(x)$ 二阶连续可导, 因此

$$f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f''(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-3(f'(x))^2 + \frac{1 - e^{-x}}{x} \right) = 1 > 0.$$

从而是极小值点.

例. 设 $y = y(x)$ 满足方程 $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+y} = e$. 求当 $x > 0$ 时, 函数 $y = y(x)$ 的值域.

解. 不难知道 $y = \frac{1}{\ln(1 + \frac{1}{x})} - x$. 为了求导方便, 我们设 $t = \frac{1}{x} \in (0, +\infty)$,

$$f(t) = \frac{1}{\ln(1+t)} - \frac{1}{t}.$$

$$f'(t) = -\frac{1}{(1+t)\ln^2(1+t)} + \frac{1}{t^2} = \frac{1}{t^2\ln^2(1+t)} \left(\ln^2(1+t) - \frac{t^2}{t+1} \right).$$

设 $s = t + 1 \in [1, +\infty)$, 则

$$\ln^2(1+t) - \frac{t^2}{t+1} = \ln^2 s - \frac{(s-1)^2}{s}.$$

- (1) 函数图像的水平渐近线和斜渐近线至多有两条: 斜率由 $a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ 所确定,
 $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax)$, (正负情形分开考虑).
- (2) 垂直渐近线可以有无穷多, 它由无穷间断点 (只需单侧趋于无穷) 决定:
 $\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = \infty$.

例. 求 $y = (x-1)e^{\frac{\pi}{2} + \arctan x}$ 的渐近线.

续解.

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x} e^{\frac{\pi}{2} + \arctan x} = 1,$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (y - ax) = \lim_{x \rightarrow -\infty} ((x-1)e^{\frac{\pi}{2} + \arctan x} - x) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(1 - \frac{1}{x})e^{\arctan x + \frac{\pi}{2}} - 1}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(1 - \frac{1}{x})(1 - \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})) - 1}{\frac{1}{x}} = -2. \end{aligned}$$

因此 $y = x - 2$ 是一条斜渐近线. 由于 y 处处连续, 因此没有垂直渐近线.

例. 求 $y = \frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}$ ($x > 0$) 的斜渐近线.

解.

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^x}{(1+x)^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x} = \frac{1}{e},$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x} - \frac{x}{e} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{1-x \ln(1+\frac{1}{x})} - 1}{\frac{e}{x}} \quad \left(\frac{0}{0} \text{ 不定式} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x \ln(1 + \frac{1}{x})}{\frac{e}{x}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t - \ln(1+t)}{et^2} = \frac{1}{2e}. \end{aligned}$$

因此 $y = \frac{x}{e} - \frac{1}{2e}$ 是一条斜渐近线.

第四节 中值定理

- 满足特定方程的单点
- 多点等式
- 恒等式
- 综合题

例. 设函数 $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上二阶可导, 且 $|f(x)| \leq 1$, $f(0)^2 + (f'(0))^2 = 4$. 证明存在 $\xi \in (-2, 2)$ 使得 $f(\xi) + f''(\xi) = 0$.

解. 设 $F(x) = f(x)^2 + (f'(x))^2$, 则

$$F'(x) = 2f(x)f'(x) + 2f'(x)f''(x) = 2f'(x)(f(x) + f''(x)).$$

我们现在需要找一个 ξ 使得 $F'(\xi) = 0$, 也就是一个驻点. 但是现在没有等式让我们应用罗尔定理. 所以我们需要另一种方法, 只要说明这个函数不单调, 那么就可以根据 F' 的连续性得到存在零点.

分别对 $f(x)$ 在 $[-2, 0]$ 和 $[0, 2]$ 上应用拉朗日定理得到存在 $\xi_1 \in (-2, 0)$, $\xi_2 \in (0, 2)$ 使得

$$f'(\xi_1) = \frac{f(0) - f(-2)}{2}, \quad f'(\xi_2) = \frac{f(2) - f(0)}{2}.$$

由 $|f(x)| \leq 1$ 可得 $|f'(\xi_1)|, |f'(\xi_2)| \leq 1$. 加上 $|f(x)| \leq 1$ 可得 $0 \leq F(\xi_1), F(\xi_2) \leq 2$. 而 $F(0) = 4$, 这表明 $F(x)$ 在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上的最大值 $F(\xi)$ 位于 (ξ_1, ξ_2) 内部, 它必然是一个驻点, $F'(\xi) = 0$. 最后 $F(\xi) \geq 4$ 表明 $f'(\xi) \neq 0$, 所以 $f(\xi) + f''(\xi) = 0$.

例 (达布定理, 即导数介值定理). 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, u 介于 $f'(a)$ 与 $f'(b)$ 之间. 证明存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi) = u$.

证明. (1) 设 $u = 0$. 此时 $f'(a), f'(b)$ 一正一负. 不妨设 $f'(a) > 0, f'(b) < 0$, 则

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) > 0.$$

由极限的保号性, 存在 $\delta > 0$ 使得 $x \in (a, a + \delta)$ 时, $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$, 从而 $f(x) > f(a)$. 同理可得: 存在 $\delta' > 0$ 使得 $x \in (b - \delta', b)$ 时, $f(x) > f(b)$. 这说明 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值 $f(\xi)$ 在 (a, b) 内部取得. 自然地, $f'(\xi) = 0$.

(2) 对于一般的 u , 设 $g(x) = f(x) - ux$. 那么 0 在 $g'(a)$ 和 $g'(b)$ 之间, 从而存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $g'(\xi) = 0$, 即 $f'(\xi) = u$. □

例. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上二阶可导, $f''(x) > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \alpha > 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \beta < 0$, 且存在 x_0 使得 $f(x_0) < 0$. 证明 $f(x)$ 有且仅有两个零点.

证明. 存在 $X_1 > x_0$ 使得当 $x > X_1$ 时, $f'(x) > \frac{\alpha}{2}$. 由拉格朗日定理, 存在 $\xi \in (X_1, x)$ 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(X_1)}{x - X_1}.$$

因此 $f(x) > f(X_1) + \frac{\alpha}{2}(x - X_1)$, 当 x 充分大时 $f(x) > 0$, 记为 $f(x_1) > 0$. 同理, 存在 $x_2 < x_0$ 满足 $f(x_2) > 0$. 由介值定理可知 $f(x)$ 在 (x_2, x_0) 和 (x_0, x_1) 内各至少有一个零点.

如果 $f(x)$ 至少有三个零点 $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3$, 则由罗尔定理, 存在 $\eta_1 \in (\xi_1, \xi_2), \eta_2 \in (\xi_2, \xi_3)$ 满足 $f'(\eta_1) = f'(\eta_2) = 0$. 再由 $f'(x)$ 的罗尔定理, 存在 $\eta \in (\eta_1, \eta_2)$ 满足 $f''(\eta) = 0$, 矛盾! 故 $f(x)$ 恰有两个零点. □

例. 设函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上连续, $(0, 2)$ 内三阶连续可导, 且 $f(-1) = 0, f(1) = 1, f'(0) = 0$. 证明存在 $\xi \in (-1, 1)$ 使得 $f'''(\xi) = 3$.

证明. $f(x)$ 在 0 处泰勒展开 $f(-1), f(1)$ 得到

$$\begin{aligned}f(-1) &= f(0) - f'(0) + \frac{1}{2}f''(0) - \frac{1}{6}f'''(\xi_1), \quad \xi_1 \in (-1, 0), \\f(1) &= f(0) + f'(0) + \frac{1}{2}f''(0) + \frac{1}{6}f'''(\xi_2), \quad \xi_2 \in (0, 1).\end{aligned}$$

两式相减得到

$$f(1) - f(-1) = 2f'(0) + \frac{1}{6}(f'''(\xi_2) + f'''(\xi_1)), \quad f'''(\xi_2) + f'''(\xi_1) = 6.$$

由于 3 位于 $f'''(\xi_1), f'''(\xi_2)$ 之间, 且 $f'''(x)$ 连续, 由介值定理可知存在 $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ 使得 $f'''(\xi) = 3$. □

第五节 不等式的证明

- 利用单调性证明不等式
- 利用函数的最值证明不等式
- 利用凹凸性证明不等式
- 利用中值定理证明不等式

例. 证明 $\frac{1}{\sin^2 x} \leq \frac{1}{x^2} + 1 - \frac{4}{\pi^2}, 0 < x \leq \frac{\pi}{2}$.

证明. 令 $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} - 1 + \frac{4}{\pi^2}$, 则 $f(\frac{\pi}{2}) = 0$,

$$f'(x) = \frac{-2 \cos x}{\sin^3 x} + \frac{2}{x^3} = \frac{2(\sin^3 x - x^3 \cos x)}{x^3 \sin^3 x}.$$

设 $g(x) = x - \sin x \cos^{-\frac{1}{3}} x$, 则 $g(0) = 0$,

$$g'(x) = 1 - \cos^{\frac{2}{3}} x - \frac{1}{3} \sin^2 x \cos^{-\frac{4}{3}} x, \quad g'(0) = 0$$

$$g''(x) = \frac{2}{3} \sin x \cos^{-\frac{1}{3}} x - \frac{1}{2} \sin x \cos^{-\frac{1}{3}} x - \frac{4}{9} \sin^3 x \cos^{-\frac{7}{3}} x = -\frac{4}{9} \sin^3 x \cos^{-\frac{7}{3}} x \leq 0,$$

因此 $g'(x) \leq g'(0) = 0, g(x) \leq g(0) = 0$. 从而 $f'(x) \geq 0, f(x) \leq f(\frac{\pi}{2}) = 0$. □

例. 证明当 $x > 0, x \neq 1$ 是, $\frac{\ln x}{x-1} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$.

证明. 当 $0 < x < 1$ 时, 原命题等价于 $\ln x \geq \frac{x-1}{\sqrt{x}}$; 当 $x > 1$ 时, 原命题等价于 $\ln x \leq \frac{x-1}{\sqrt{x}}$. 设 $u = \sqrt{x}$, $f(u) = \frac{u^2-1}{u} - 2\ln u$, 则

$$f'(u) = 1 + \frac{1}{u^2} - \frac{2}{u} = \left(1 - \frac{1}{u}\right)^2 \geq 0.$$

因此当 $0 < u < 1$ 时, $f(u) \leq f(1) = 0$; 当 $u > 1$ 时, $f(u) \geq f(1) = 0$. □

