复变函数与积分变换

张神星 (合肥工业大学)

办公室: 翡翠科教楼 *B1810* 东

Email: zhangshenxing@hfut.edu.cn

课件地址: https://faculty.hfut.edu.cn/zhangshenxing

第三章　复变函数的积分

1. 复变函数积分的概念
2. 柯西-古萨定理和复合闭路定理
3. 柯西积分公式
4. 解析函数与调和函数的关系

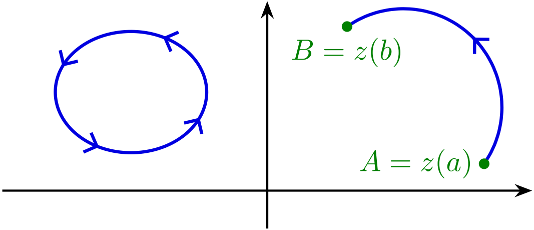
第一节　复变函数积分的概念

- 复变函数积分的定义
- 参变量法计算复变函数积分
- 长大不等式和大小圆弧引理

设 C 是平面上一条光滑或逐段光滑的连续曲线, 也就是说它的参数方程 $z=z(t), a\leqslant t\leqslant b$ 除去有限个点之外都有非零导数. 这里 $z'(t)=x'(t)+\mathrm{i}y'(t)$.

固定它的一个方向, 称为**正方向**, 则我们得到一条**有向曲线**. 和这条曲线方向相反的记作 C^-, 它的方向被称为该曲线**负方向**.

对于闭路, 它的**正方向总是指逆时针方向**, 负方向总是指顺时针方向. 以后我们不加说明的话**默认是正方向**.



复变函数积分：线积分定义

所谓的复变函数积分，本质上仍然是第二类曲线积分. 设复变函数

$$w = f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$$

定义在区域 D 内，有向曲线 C 包含在 D 中. 形式地展开

$$f(z)\,\mathrm{d}z = (u + \mathrm{i}v)(\mathrm{d}x + \mathrm{i}\,\mathrm{d}y) = (u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y) + \mathrm{i}(u\,\mathrm{d}y + v\,\mathrm{d}x).$$

定义. 若下述右侧两个线积分均存在，则定义

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_C (u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y) + \mathrm{i}\int_C (v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y)$$

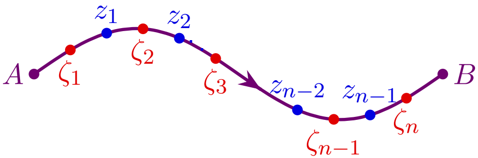
为 $f(z)$ **沿曲线** C **的积分**.

复变函数积分：黎曼积分定义

当然，我们也可以像线积分那样通过分割来定义. 在曲线 C 上依次选择分点 $z_0 = A, z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n = B$. 然后在每一段弧上任取 $\zeta_k \in \overset{\frown}{z_{k-1}z_k}$ 并作和式

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\,\Delta z_k, \quad \Delta z_k = z_k - z_{k-1}.$$

然后称 $n \to \infty$, 分割的最大弧长 $\to 0$ 时 S_n 的极限为复变函数积分. 这二者是等价的.



若 C 是闭路, 则该积分记为 $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z$. 此时该积分不依赖端点的选取.

若 C 是实轴上的区间 $[a,b]$ 且 $f(z)=u(x)$, 则

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=\int_a^b f(z)\,\mathrm{d}z=\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x$$

就是黎曼积分.

根据线积分的存在性条件可知:

定理. 若 $f(z)$ 在 D 内连续, C 是光滑曲线, 则 $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ 总存在.

线积分中诸如变量替换等技巧可以照搬过来使用. 设

$$C: z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t), \quad a \leqslant t \leqslant b$$

是一条光滑有向曲线, 且正方向为 t 增加的方向, 则
$\mathrm{d}z = z'(t)\,\mathrm{d}t = \big[x'(t)+\mathrm{i}y'(t)\big]\,\mathrm{d}t.$

积分计算方法 I: 参变量法.

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f\big[z(t)\big]z'(t)\,\mathrm{d}t.$$

若 C 的正方向是从 $z(b)$ 到 $z(a)$, 则需要交换右侧积分的上下限.

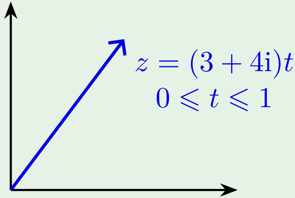
若 C 是逐段光滑的, 则相应的积分就是各段的积分之和. 以后我们**只考虑逐段光滑曲线上的连续函数的积分**.

典型例题：计算复变函数沿曲线的积分

例. 求 $\displaystyle\int_C z\,\mathrm{d}z$, 其中 C 是从原点到点 $3+4\mathrm{i}$ 的直线段.

解答. 由于 $z=(3+4\mathrm{i})t, 0\leqslant t\leqslant 1$, 因此

$$\begin{aligned}\int_C z\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 (3+4\mathrm{i})t\cdot(3+4\mathrm{i})\,\mathrm{d}t\\ &= (3+4\mathrm{i})^2\int_0^1 t\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}(3+4\mathrm{i})^2 = -\frac{7}{2}+12\mathrm{i}.\end{aligned}$$

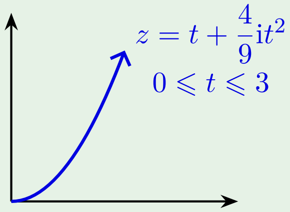


典型例题：计算复变函数沿曲线的积分

例. 求 $\int_C z\,\mathrm{d}z$，其中 C 是抛物线 $y=\frac{4}{9}x^2$ 上从原点到点 $3+4\mathrm{i}$ 的曲线段.

解答. 由于 $z=t+\frac{4}{9}\mathrm{i}t^2, 0\leqslant t\leqslant 3$，因此

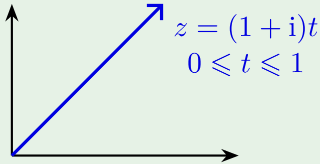
$$\begin{aligned}\int_C z\,\mathrm{d}z &= \int_0^3\left(t+\frac{4}{9}\mathrm{i}t^2\right)\cdot\left(1+\frac{8}{9}\mathrm{i}t\right)\mathrm{d}t\\ &= \int_0^3\left(t+\frac{4}{3}\mathrm{i}t^2-\frac{32}{81}t^3\right)\mathrm{d}t\\ &= \left(\frac{1}{2}t^2+\frac{4}{9}\mathrm{i}t^3-\frac{8}{81}t^4\right)\Big|_0^3=-\frac{7}{2}+12\mathrm{i}.\end{aligned}$$



例. 求 $\int_C \operatorname{Re} z \, \mathrm{d}z$, 其中 C 是从原点到点 $1+\mathrm{i}$ 的直线段.

解答. 由于 $z=(1+\mathrm{i})t, 0 \leqslant t \leqslant 1$, 因此 $\operatorname{Re} z = t$,

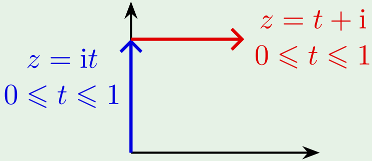
$$\int_C \operatorname{Re} z \, \mathrm{d}z = \int_0^1 t \cdot (1+\mathrm{i}) \, \mathrm{d}t$$
$$= (1+\mathrm{i}) \int_0^1 t \, \mathrm{d}t = \frac{1+\mathrm{i}}{2}.$$



例. 求 $\displaystyle\int_C \operatorname{Re} z\,\mathrm{d}z$，其中 C 是从原点到点 i 再到 $1+\mathrm{i}$ 的折线段.

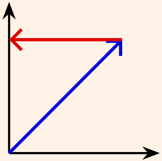
解答. 第一段 $z=\mathrm{i}t$, $0\leqslant t\leqslant 1$, $\operatorname{Re} z=0$, 第二段 $z=t+\mathrm{i}$, $0\leqslant t\leqslant 1$, $\operatorname{Re} z=t$. 因此

$$\int_C \operatorname{Re} z\,\mathrm{d}z=\int_0^1 t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}.$$



可以看出，即便起点和终点相同，沿不同路径 $f(z)=\operatorname{Re} z$ 的积分也可能不同. 而 $f(z)=z$ 的积分则只和起点和终点位置有关，与路径无关. 原因在于 $f(z)=z$ 是处处解析的，我们会在下一节解释为何如此.

练习. 求 $\displaystyle\int_C \operatorname{Im} z\,\mathrm{d}z = \underline{\quad -\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2} \quad}$，其中 C 是从原点沿 $y=x$ 到点 $1+\mathrm{i}$ 再到 i 的折线段.



例题: 计算复变函数沿圆周的积分

例. 求 $\displaystyle\oint_{|z-z_0|=r}\frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}}$, 其中 n 为整数.

解答. $C:|z-z_0|=r$ 的参数方程为 $z=z_0+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$. 于是 $\mathrm{d}z=\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta$.

$$\oint_C\frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}}=\int_0^{2\pi}\mathrm{i}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^{-n}\,\mathrm{d}\theta=\mathrm{i}r^{-n}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\,\mathrm{d}\theta$$
$$=\mathrm{i}r^{-n}\int_0^{2\pi}\big[\cos(n\theta)+\mathrm{i}\sin(n\theta)\big]\,\mathrm{d}\theta=\begin{cases}2\pi\mathrm{i}, & \text{若 } n=0;\\ 0, & \text{若 } n\neq 0.\end{cases}$$

这个积分以后经常用到, 它的特点是积分值与圆周的圆心和半径都无关.

积分的性质

定理 (线性性质).

(1) $\displaystyle\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{C^-} f(z)\,\mathrm{d}z.$

(2) $\displaystyle\int_C kf(z)\,\mathrm{d}z = k\int_C f(z)\,\mathrm{d}z.$

(3) $\displaystyle\int_C [f(z) \pm g(z)]\,\mathrm{d}z = \int_C f(z)\,\mathrm{d}z \pm \int_C g(z)\,\mathrm{d}z.$

长大不等式. 设有向曲线 C 的长度为 L, $f(z)$ 在 C 上满足 $|f(z)| \leqslant M$, 则

$$\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \int_C |f(z)|\,\mathrm{d}s \leqslant ML.$$

证明. 对

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\,\Delta z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)\,\Delta z_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)|\,\Delta s_k \leqslant M \sum_{k=1}^{n} \Delta s_k$$

取极限即可. □

长大不等式常常用于证明等式: 估算一个积分和一个具体的数值之差不超过任意给定的 ε, 从而得到二者相等.

注意到: 若被积函数 $f(z)$ 在 C 上的点都连续, 那么 $|f(z)|$ 是 C 的参变量 $t \in [a,b]$ 的连续函数, 从而有界, 即存在 M 使得 $|f(z)| \leqslant M, \forall z \in C$.

小圆弧引理. 设函数 $f(z)$ 满足 $\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)=k$. 那么对于闭路

$$C_r: z=a+re^{i\theta},\quad \theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2,$$

有

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r} f(z)\,dz = ik(\theta_2-\theta_1).$$

证明. 和前面的例题类似,

$$\int_{C_r} \frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} \cdot \mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{i}(\theta_2-\theta_1).$$

对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得当 $|z-a|<\delta$ 时, $\big|(z-a)f(z)-k\big|\leqslant\varepsilon$. 当 $0<r<\delta$ 时,

$$\left|\int_{C_r} f(z)\,\mathrm{d}z - \mathrm{i}k(\theta_2-\theta_1)\right| = \left|\int_{C_r}\left[f(z)-\frac{k}{z-a}\right]\mathrm{d}z\right|$$
$$= \left|\int_{C_r}\frac{(z-a)f(z)-k}{z-a}\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{r}\cdot(\theta_2-\theta_1)r = (\theta_2-\theta_1)\varepsilon.$$

于是命题得证. □

特别地, 若 $C_r: |z-a|=r$, 则上述极限为 $2k\pi\mathrm{i}$.

类似地, 若 $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z)=k$, 则有大圆弧引理.

大圆弧引理. 设函数 $f(z)$ 满足 $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z)=k$. 那么对于闭路

$$C_R: z=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\quad \theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2,$$

有

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z=\mathrm{i}k(\theta_2-\theta_1).$$

上述结论中实际上只需要 $f(z)$ 在 $\theta_1\leqslant\operatorname{Arg}z\leqslant\theta_2$ 范围内的极限满足相应条件即可. 此外, 实际应用中遇到的常常是 $k=0$ 的情形.

第二节　柯西-古萨定理和复合闭路定理

- 柯西-古萨定理
- 复合闭路定理和连续变形定理
- 原函数和不定积分

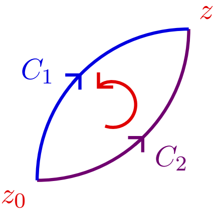
积分路径无关与闭路积分

观察下方的两条曲线 C_1, C_2. 设 $C = C_1^- + C_2$. 可以看出

$$\int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z \iff \oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

所以 $f(z)$ 的积分只与起点终点有关 $\iff$ $f(z)$ 绕任意闭路的积分为零.

这里, 若闭合曲线 C 不是闭路 (有自相交的点), 也可以拆分为一些闭路的并.



上一节中我们计算了 $f(z)=z, \operatorname{Re} z, \dfrac{1}{z-z_0}$ 的积分. 其中

- $f(z)=z$ 处处解析, 积分只与起点终点有关 (闭路积分为零);
- $f(z)=\dfrac{1}{z-z_0}$ 有奇点 z_0, 沿绕 z_0 闭路的积分非零;
- $f(z)=\operatorname{Re} z$ 处处不解析, 积分与路径有关 (闭路积分可能非零).

由此可见函数沿闭路积分为零, 与函数在闭路内部是否解析有关.

设 C 是一条闭路, D 是其内部区域. 设 **$f(z)$ 在闭区域 $\overline{D} = D \cup C$ 上解析**, 即存在区域 $B \supseteq \overline{D}$ 使得 $f(z)$ 在 B 上解析.

为了简便假设 $f'(z)$ 连续, 则

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z &= \oint_C (u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y) + \mathrm{i}\oint_C (v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y) \\ &\xlongequal{\text{格林公式}} -\iint_D (v_x + u_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \mathrm{i}\iint_D (u_x - v_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &\xlongequal{\text{C-R 方程}} 0.\end{aligned}$$

也可以从

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = -\iint_D \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\overline{z} = 0$$

看出.

柯西-古萨定理

柯西-古萨定理. 设 $f(z)$ 在闭路 C 上连续, C 内部解析, 则 $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

推论. 设 $f(z)$ 在**单连通区域** D 内解析, C 是 D 内一条闭合曲线, 则 $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

这里的闭合曲线可以不是闭路.

例题：柯西-古萨定理计算积分

例. 求 $\oint_{|z|=1} \frac{1}{2z-3}\,\mathrm{d}z$.

解答. 由于 $\frac{1}{2z-3}$ 在 $|z| \leqslant 1$ 上解析，因此由柯西-古萨定理

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{2z-3}\,\mathrm{d}z = 0.$$

练习.

(1) $\oint_{|z-2|=1} \frac{1}{z^2+z}\,\mathrm{d}z = \underline{\quad 0 \quad}$.

(2) $\oint_{|z|=2} \frac{\sin z}{|z|}\,\mathrm{d}z = \underline{\quad 0 \quad}$.

例. 求 $\displaystyle\oint_C \frac{1}{z(z^2+1)}\,\mathrm{d}z$，其中 $C: |z-\mathrm{i}| = \dfrac{1}{2}$.

解答. 注意到

$$\frac{1}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{z+\mathrm{i}} + \frac{1}{z-\mathrm{i}}\Big).$$

由于 $\dfrac{1}{z}, \dfrac{1}{z+\mathrm{i}}$ 在 $|z-\mathrm{i}| \leqslant \dfrac{1}{2}$ 上解析，因此由柯西-古萨定理

$$\oint_C \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \oint_C \frac{1}{z+\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z = 0,$$

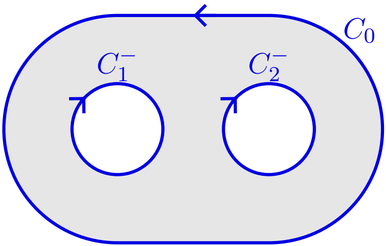
$$\oint_C \frac{1}{z(z^2+1)}\,\mathrm{d}z = -\frac{1}{2}\oint_C \frac{1}{z-\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z = -\pi\mathrm{i}.$$

多连通区域边界与复合闭路

设 $C_0, C_1, \ldots, C_n$ 是 $n+1$ 条闭路, $C_1, \ldots, C_n$ 每一条都包含在其它闭路的外部, 而且它们都包含在 C_0 的内部. 这样它们围成了一个多连通区域 D, 它的边界称为一个复合闭路

$$C = C_0 + C_1^- + \cdots + C_n^-.$$

沿着 C 前进的点, D 总在它的左侧, 所以这就是它的正方向.

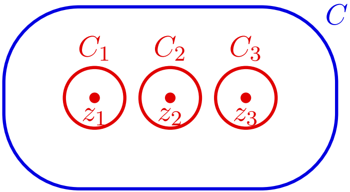


复合闭路定理. 设 $f(z)$ 在复合闭路 $C=C_0+C_1^-+\cdots+C_n^-$ 及其所围成的多连通区域内解析，则

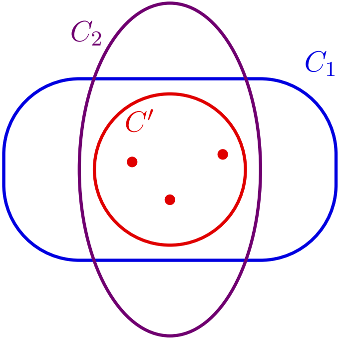
$$\oint_{C_0} f(z)\,\mathrm{d}z=\oint_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z+\cdots+\oint_{C_n} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

事实上，复合闭路定理和柯西-古萨定理可以看成一个定理的两种情形：设 C 是一个闭路或复合闭路，若 $f(z)$ 在 C 及其围成的区域 (单连通或多连通) 内解析，则 $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z=0$.

在实际应用中, 若被积函数 $f(z)$ 在 (复合) 闭路 C 的内部有有限多个奇点 $z_1, \dots, z_k$. 那么我们可以在 C 内部 (围成的区域) 构造闭路 $C_1, \dots, C_k$, 使得每个 C_j 内部只包含一个奇点 z_j. 这样, 内部含多个奇点的情形就可以化成内部只含一个奇点的情形. 最后将这些闭路上的积分相加即可.



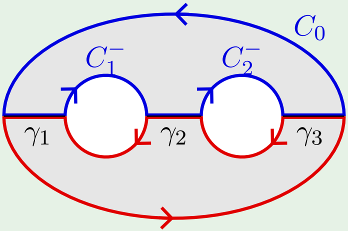
此外，从复合闭路定理还可以看出，在计算积分 $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z$ 时，C 的具体形状无关紧要，只要其内部奇点不变，C 可以任意变形。因为我们总可以选择一个包含这些奇点的闭路 C'，使得 C' 包含在 C 及其变形后的闭路内部。这样它们的积分自然都和 C' 上的积分相同。这里即使 C 是复合闭路也是可以自由变形的。



证明. 以曲线 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n+1}$ 把 $C_0, C_1, \dots, C_n$ 连接起来, 则它们把区域 D 分成了两个单连通区域 D_1, D_2. 对 D_1 和 D_2 的边界应用柯西-古萨定理并相加, 则 γ_i 对应的部分正好相互抵消, 因此

$$\oint_{C_0} f(z)\,\mathrm{d}z - \oint_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z - \cdots - \oint_{C_n} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

于是定理得证. □



例题：复合闭路定理的应用

例. 证明对于任意闭路 C, $\oint_C (z-a)^n \,\mathrm{d}z = 0$, $n \neq -1$ 为整数.

证明.

(1) 若 a 不在 C 的内部, 则 $(z-a)^n$ 在 C 及其内部解析. 由柯西-古萨定理,

$$\oint_C (z-a)^n \,\mathrm{d}z = 0.$$

(2) 若 a 在 C 的内部, 则在 C 的内部取一个以 a 为圆心的圆周 C_1. 由复合闭路定理以及上一节的结论

$$\oint_C (z-a)^n \,\mathrm{d}z = \oint_{C_1} (z-a)^n \,\mathrm{d}z = 0. \qquad \square$$

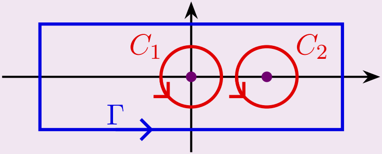
同理，由复合闭路定理和上一节的结论可知当 a 在 C 的内部且 $n=-1$ 时积分为 $2\pi\mathrm{i}$.

定理. 当 a 在 C 的内部时，

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^{n+1}} = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i}, & n=0; \\ 0, & n\neq 0. \end{cases}$$

例题：复合闭路定理的应用

例. 求 $\displaystyle\oint_{\Gamma} \frac{2z-1}{z^2-z}\,\mathrm{d}z$，其中 Γ 是由 $2\pm \mathrm{i}, -2\pm \mathrm{i}$ 形成的矩形闭路.



解答. 函数 $\dfrac{2z-1}{z^2-z}$ 在 Γ 内有两个奇点 $z=0,1$. 设 C_1, C_2 如图所示，由复合闭路定理

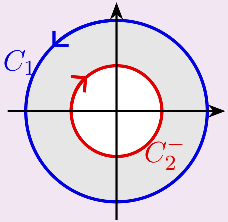
$$\oint_{\Gamma} \frac{2z-1}{z^2-z}\,\mathrm{d}z = \oint_{C_1} \frac{2z-1}{z^2-z}\,\mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{2z-1}{z^2-z}\,\mathrm{d}z$$

$$= \oint_{C_1} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z + \oint_{C_1} \frac{1}{z-1}\,\mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{1}{z-1}\,\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi\mathrm{i} + 0 + 0 + 2\pi\mathrm{i} = 4\pi\mathrm{i}.$$

例题：复合闭路定理的应用

例. 求 $\oint_{\Gamma} \frac{\mathrm{e}^z}{z}\,\mathrm{d}z$, 其中 $\Gamma = C_1 + C_2^-$, $C_1 : |z| = 2, C_2 : |z| = 1$.



解答. 函数 $\frac{\mathrm{e}^z}{z}$ 在 C_1, C_2 围城的圆环域内解析. 由复合闭路定理可知 $\oint_{\Gamma} \frac{\mathrm{e}^z}{z}\,\mathrm{d}z = 0$.

例. 设 $f(z)=\dfrac{p(z)}{q(z)}$ 是一个有理函数，其中 p,q 的次数分别是 m,n. 证明：若 $f(z)$ 的所有奇点都在闭路 C 的内部，则

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z=\begin{cases}0, & 若\ n-m\geqslant 2,\\ 2\pi\mathrm{i}a/b, & 若\ n-m=1,\end{cases}$$

其中 a,b 分别是 $p(z),q(z)$ 的最高次项系数.

证明. 设 $C_R : |z| = R$. 注意到

$$\lim_{z\to\infty} zf(z) = \begin{cases} 0, & \text{若 } n-m \geqslant 2, \\ a/b, & \text{若 } n-m=1, \end{cases}$$

于是由大圆弧引理可知

$$\lim_{R\to+\infty} \oint_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \begin{cases} 0, & \text{若 } n-m \geqslant 2, \\ 2\pi \mathrm{i} a/b, & \text{若 } n-m=1. \end{cases}$$

由连续变形定理可知，当 R 充分大使得 $f(z)$ 的所有奇点都在 C_R 的内部时，

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z$$

恒成立，由此命题得证. □

例题：有理函数绕闭路积分

注意闭路 C 内部必须包含 $f(z)$ 的所有奇点上述结论方可成立. 若 $m \geqslant n$, 则我们可将 $f(z)$ 写成一个多项式和上述形式有理函数之和.

练习. $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{z^2}{(2z+1)(z^2+1)}\,\mathrm{d}z = \underline{\quad \pi\mathrm{i} \quad}.$

设有向曲线 $C: z=z(t), a \leqslant t \leqslant b$ 起于 $z_1=z(a)$ 终于 $z_2=z(b)$. 若存在 C 上的解析函数 $F(z)$ 使得 $F'(z)=f(z)$, 则

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_a^b f\big[z(t)\big]z'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= F\big[z(t)\big]\Big|_a^b = F(z_2)-F(z_1).\end{aligned}$$

这就是牛顿-莱布尼兹公式. 我们把 $F(z)$ 称为 $f(z)$ 的一个原函数. 特别地, 若 C 是闭路, 则 $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z=0$.

例如对于整数 $n \neq 0$, 当 a 在闭路 C 的内部时,

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^{n+1}}$$

在 C 上有原函数 $F(z) = -\dfrac{1}{n(z-a)^n}$. 从而 $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$. 于是我们再次证明了该积分结论的 $n \neq 0$ 情形.

但需要注意 $\dfrac{1}{z-a}$ 在 C 上并没有原函数, 因为 $\ln(z-a)$ 在 C 上有奇点.

原函数的存在性

不过, 不同于单变量实函数的情形, 并不是所有的连续函数都有原函数.

设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, C 是 D 内一条起于 z_0 终于 z 的曲线. 由柯西-古萨定理可知, 积分 $\int_C f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$ 与路径无关, 只与 z_0, z 有关. 因此我们也将其记为 $\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$.

定理. **固定 $z_0 \in D$, 则函数**

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta.$$

是 D 内的解析函数, 且 $F'(z) = f(z)$.

由此可知, 单连通区域上的解析函数总有原函数.

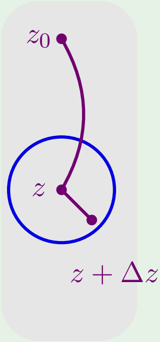
证明. 以 z 为中心作一包含在 D 内的圆 K, 取 $|\Delta z|$ 小于 K 的半径. 那么

$$
\begin{aligned}
F(z+\Delta z)-F(z) &= \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta - \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \\
&= \int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta.
\end{aligned}
$$

容易知道

$$
\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)\,\mathrm{d}\zeta = f(z)\int_{z}^{z+\Delta z}\mathrm{d}\zeta = f(z)\,\Delta z.
$$

我们需要比较上述两个积分, 其中 z 到 $z+\Delta z$ 取直线.



由于 $f(z)$ 解析，因此连续. $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$ 使得当 $|\zeta-z|<\delta$ 时，z 落在 K 中且 $|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon$. 当 $|\Delta z|<\delta$ 时，由长大不等式

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right| &= \left|\int_z^{z+\Delta z}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\Delta z}\,\mathrm{d}\zeta\right| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{|\Delta z|}\cdot|\Delta z| = \varepsilon.\end{aligned}$$

由于 ε 是任意的，因此

$$f(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=F'(z). \qquad \square$$

积分计算方法 II: 原函数法. 设 $f(z)$ 在单连通区域 D 上解析, z_1 至 z_2 的积分路径落在 D 内, 则

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,\mathrm{d}z = F(z)\Big|_{z_1}^{z_2} = F(z_2) - F(z_1),$$

其中 $F(z)$ 是 $f(z)$ 的一个原函数.

由于导函数为 0 的函数只能是常值函数, 因此

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,\mathrm{d}z + C.$$

我们称之为 $f(z)$ 的不定积分, 记为 $\int f(z)\,\mathrm{d}z$.

复变函数和实变函数的牛顿-莱布尼兹定理的差异在哪呢? 复变情形要求是单连通区域上解析函数, 实变情形要求是闭区间上连续函数.

典型例题：利用原函数求积分

例. 求 $\displaystyle\int_{z_0}^{z_1} z\,\mathrm{d}z$.

解答. 由于 $f(z)=z$ 处处解析，且 $\displaystyle\int z\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2}z^2+C$，因此

$$\int_{z_0}^{z_1} z\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2}z^2\Big|_{z_0}^{z_1}=\frac{1}{2}(z_1^2-z_0^2).$$

因此之前的例子中 $\displaystyle\int_0^{3+4\mathrm{i}} z\,\mathrm{d}z=-\frac{7}{2}+12\mathrm{i}$，无论从 0 到 $3+4\mathrm{i}$ 的路径如何.

例. 求 $\displaystyle\int_0^{\pi\mathrm{i}} z\cos z^2\,\mathrm{d}z$.

解答. 由于 $f(z)=z\cos z^2$ 处处解析, 且

$$\int z\cos z^2\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\int\cos z^2\,\mathrm{d}z^2=\frac{1}{2}\sin z^2+C,$$

因此

$$\int_0^{\pi\mathrm{i}} z\cos z^2\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\sin z^2\Big|_0^{\pi\mathrm{i}}=-\frac{1}{2}\sin\pi^2.$$

这里我们使用了凑微分法.

例. 求 $\displaystyle\int_0^{\mathrm{i}} z\cos z\,\mathrm{d}z.$

解答. 由于 $f(z)=z\cos z$ 处处解析, 且

$$\int z\cos z\,\mathrm{d}z=\int z\,\mathrm{d}(\sin z)=z\sin z-\int \sin z\,\mathrm{d}z=z\sin z+\cos z+C,$$

因此

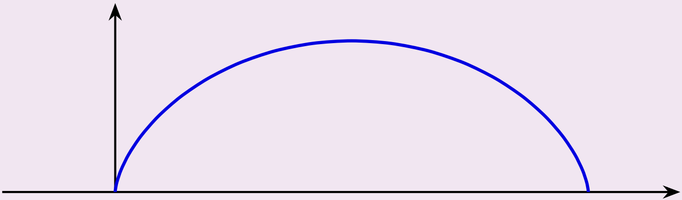
$$\int_0^{\mathrm{i}} z\cos z\,\mathrm{d}z=(z\sin z+\cos z)\Big|_0^{\mathrm{i}}=\mathrm{i}\sin\mathrm{i}+\cos\mathrm{i}-1=\mathrm{e}^{-1}-1.$$

这里我们使用了分部积分法.

练习. 求 $\displaystyle\int_0^{1} z\sin z\,\mathrm{d}z=$ $\underline{\quad \sin 1-\cos 1 \quad}$.

典型例题：利用原函数求积分

例. 求 $\int_C (2z^2+8z+1)\,\mathrm{d}z$，其中 C 是摆线 $\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta), \\ y = a(1-\cos\theta), \end{cases}$ $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.



解答. 由于 $f(z) = 2z^2+8z+1$ 处处解析，因此

$$
\begin{aligned}
\text{原积分} &= \int_0^{2\pi a} (2z^2+8z+1)\,\mathrm{d}z \\
&= \left(\frac{2}{3}z^3 + 4z^2 + z\right)\Big|_0^{2\pi a} = \frac{16}{3}\pi^3 a^3 + 16\pi^2 a^2 + 2\pi a.
\end{aligned}
$$

例. 设 C 为沿着 $|z|=1$ 从 1 到 i 的逆时针圆弧，求 $\displaystyle\int_C \frac{\ln(z+1)}{z+1}\,\mathrm{d}z$.

解答. 函数 $f(z)=\dfrac{\ln(z+1)}{z+1}$ 在单连通区域 $\operatorname{Re} z>-1$ 内解析.

$$\int \frac{\ln(z+1)}{z+1}\,\mathrm{d}z=\int \ln(z+1)\,\mathrm{d}\big[\ln(z+1)\big]=\frac{1}{2}\ln^2(z+1)+C.$$

因此

$$\begin{aligned}\int_C \frac{\ln(z+1)}{z+1}\,\mathrm{d}z&=\frac{1}{2}\ln^2(z+1)\Big|_1^{\mathrm{i}}=\frac{1}{2}\Big[\ln^2(1+\mathrm{i})-\ln^2 2\Big]\\&=\frac{1}{2}\Big[\Big(\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}\mathrm{i}\Big)^2-\ln^2 2\Big]=-\frac{\pi^2}{32}-\frac{3}{8}\ln^2 2+\frac{\pi\ln 2}{8}\mathrm{i}.\end{aligned}$$

第三节　柯西积分公式

- 柯西积分公式
- 高阶导数的柯西积分公式

柯西-古萨定理是解析函数理论的基础，但在很多情形下它由柯西积分公式表现.

柯西积分公式. 设

- 函数 $f(z)$ 在闭路 C 及其内部 D 解析,
- $z_0 \in D$,

则

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} \,\mathrm{d}z.$$

若 $z_0 \notin \overline{D}$, 由柯西-古萨定理, 右侧的积分是 0.

解析函数可以用一个积分

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta, \quad z \in D$$

来表示，这是研究解析函数理论的强有力工具.

解析函数在闭路 C 内部的取值完全由它在 C 上的值所确定. 这也是解析函数的特征之一. 特别地，解析函数在圆心处的值等于它在圆周上的平均值. 设 $z = z_0 + R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则 $\mathrm{d}z = \mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta$，

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\theta.$$

证明. 由连续性可知, $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$ 使得当 $|z-z_0|\leqslant\delta$ 时, $z\in D$ 且 $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$. 设 $\Gamma: |z-z_0|=\delta$, 则

$$\left|\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z - 2\pi\mathrm{i}f(z_0)\right| \xlongequal{\text{复合闭路定理}} \left|\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z - 2\pi\mathrm{i}f(z_0)\right|$$
$$= \left|\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z - \oint_\Gamma \frac{f(z_0)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z\right|$$
$$= \left|\oint_\Gamma \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{\delta}\cdot 2\pi\delta = 2\pi\varepsilon.$$

由 ε 的任意性可知

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}f(z_0).$$

□

可以看出，当被积函数分子解析而分母形如 $z-z_0$ 时，绕闭路的积分可以使用柯西积分公式计算.

例. 求 $\displaystyle\oint_{|z|=4} \frac{\sin z}{z}\,\mathrm{d}z$.

解答. 函数 $\sin z$ 处处解析. 取 $f(z)=\sin z, z_0=0$ 并应用柯西积分公式得

$$\oint_{|z|=4} \frac{\sin z}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sin z\big|_{z=0} = 0.$$

典型例题：柯西积分公式的应用

例. 求 $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z-1}\,dz$.

解答. 由于函数 e^z 处处解析，取 $f(z)=e^z, z_0=1$ 并应用柯西积分公式得

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z-1}\,dz = 2\pi i e^z\big|_{z=1} = 2\pi e i.$$

练习. 求 $\displaystyle\oint_{|z|=2\pi} \frac{\cos z}{z-\pi}\,dz = \underline{-2\pi i}$.

典型例题：柯西积分公式的应用

例. 设 $f(z)=\oint_{|\zeta|=\sqrt{3}}\frac{3\zeta^2+7\zeta+1}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta$，求 $f'(1+\mathrm{i})$.

解答. 当 $|z|<\sqrt{3}$ 时，由柯西积分公式得

$$f(z)=\oint_{|\zeta|=\sqrt{3}}\frac{3\zeta^2+7\zeta+1}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta=2\pi\mathrm{i}(3\zeta^2+7\zeta+1)|_{\zeta=z}=2\pi\mathrm{i}(3z^2+7z+1).$$

因此 $f'(z)=2\pi\mathrm{i}(6z+7)$，

$$f'(1+\mathrm{i})=2\pi\mathrm{i}(13+6\mathrm{i})=-12\pi+26\pi\mathrm{i}.$$

注意当 $|z|>\sqrt{3}$ 时，$f(z)\equiv 0$.

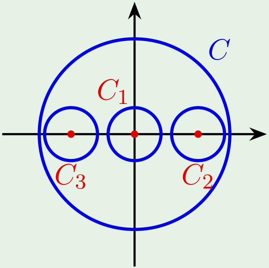
例. 求 $\displaystyle\oint_{|z|=3}\frac{e^z}{z(z^2-1)}\,dz.$

解答. 被积函数的奇点为 $0,\pm1$. 设 C_1, C_2, C_3 分别为绕 0, 1, -1 的分离圆周. 由复合闭路定理和柯西积分公式

$$\oint_{|z|=3}\frac{e^z}{z(z^2-1)}\,dz=\oint_{C_1+C_2+C_3}\frac{e^z}{z(z^2-1)}\,dz$$

$$=2\pi i\left[\frac{e^z}{z^2-1}\bigg|_{z=0}+\frac{e^z}{z(z+1)}\bigg|_{z=1}+\frac{e^z}{z(z-1)}\bigg|_{z=-1}\right]$$

$$=2\pi i\left(-1+\frac{e}{2}+\frac{e^{-1}}{2}\right)=\pi i(e+e^{-1}-2).$$



解析函数可以由它的积分所表示．不仅如此，通过积分表示，还可以说明**解析函数是任意阶可导的**．

柯西积分公式． 设函数 $f(z)$ 在闭路 C 及其内部 D 解析，则对任意 $z_0 \in D$，

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z.$$

假如 $f(z)$ 有泰勒展开

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n + \cdots$$

那么由 $\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^n}$ 的性质可知上述公式右侧应当为 $f^{(n)}(z_0)$.

证明. 先证明 $n=1$ 的情形. 不妨设 $C: |z-z_0|=\delta$. 由柯西积分公式,

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z,\quad f(z_0+h)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0-h}\,\mathrm{d}z.$$

两式相减得到

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)(z-z_0-h)}\,\mathrm{d}z.$$

当 $h\to 0$ 时, 左边的极限是 $f'(z_0)$. 因此我们只需要证明右边的极限等于

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,\mathrm{d}z.$$

$$\text{二者之差} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{hf(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)}\,\mathrm{d}z.$$

由于 $f(z)$ 在 C 上连续, 故存在 M 使得 $|f(z)| \leqslant M$. 注意到 $z \in C$ 时, $|z-z_0| = \delta$, $|z-z_0-h| \geqslant \delta - |h|$. 由长大不等式,

$$\left| \oint_C \frac{hf(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)}\,\mathrm{d}z \right| \leqslant \frac{M|h|}{\delta^2(\delta-|h|)} \cdot L,$$

其中 L 是闭路 C 的长度. 当 $h \to 0$ 时, 它的极限为 0, 因此 $n=1$ 情形得证.

对于一般的 n, 我们通过归纳法将 $f^{(n)}(z_0)$ 和 $f^{(n)}(z_0+h)$ 表达为积分形式. 比较 $\dfrac{f^{(n)}(z_0+h)-f^{(n)}(z_0)}{h}$ 与积分公式右侧之差, 并利用长大不等式证明 $h \to 0$ 时, 差趋于零. 具体过程见教材. □

柯西积分公式不是用来计算高阶导数的，而是用来计算高阶导数来计算积分的.

例. 求 $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{\cos(\pi z)}{(z-1)^5}\,\mathrm{d}z.$

解答. 由于 $\cos(\pi z)$ 处处解析，因此由柯西积分公式，

$$\oint_{|z|=2} \frac{\cos(\pi z)}{(z-1)^5}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi\mathrm{i}}{4!}\cos(\pi z)^{(4)}\Big|_{z=1} = \frac{2\pi\mathrm{i}}{24}\cdot\pi^4\cos\pi = -\frac{\pi^5\mathrm{i}}{12}.$$

例. 求 $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{\mathrm{e}^z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z$.

解答. 被积函数在 $|z|<2$ 的奇点为 $z=\pm\mathrm{i}$. 取 C_1, C_2 为以 $\mathrm{i}, -\mathrm{i}$ 为圆心的分离圆周.

$$\oint_{C_1} \frac{\mathrm{e}^z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi\mathrm{i}}{1}\left[\frac{\mathrm{e}^z}{(z+\mathrm{i})^2}\right]'\Big|_{z=\mathrm{i}} = 2\pi\mathrm{i}\left[\frac{\mathrm{e}^z}{(z+\mathrm{i})^2}-\frac{2\mathrm{e}^z}{(z+\mathrm{i})^3}\right]\Big|_{z=\mathrm{i}} = \frac{(1-\mathrm{i})\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\pi}{2}.$$

类似地, $\displaystyle\oint_{C_2} \frac{\mathrm{e}^z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z = \frac{-(1+\mathrm{i})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}}\pi}{2}$. 故

$$\begin{aligned}\oint_{|z|=2} \frac{\mathrm{e}^z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z &= \left(\oint_{C_1}+\oint_{C_2}\right)\frac{\mathrm{e}^z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{(1-\mathrm{i})\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\pi}{2} + \frac{-(1+\mathrm{i})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}}\pi}{2} = \pi\mathrm{i}(\sin 1-\cos 1).\end{aligned}$$

典型例题：使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

例. 求 $\oint_{|z|=1} z^n \mathrm{e}^z \,\mathrm{d}z$，其中 n 是整数.

解答.

(1) 当 $n \geqslant 0$ 时，$z^n \mathrm{e}^z$ 处处解析. 由柯西-古萨定理，

$$\oint_{|z|=1} z^n \mathrm{e}^z \,\mathrm{d}z = 0.$$

(2) 当 $n \leqslant -1$ 时，e^z 处处解析. 由柯西积分公式，

$$\oint_{|z|=1} z^n \mathrm{e}^z \,\mathrm{d}z = \frac{2\pi \mathrm{i}}{(-n-1)!} (\mathrm{e}^z)^{(-n-1)}\Big|_{z=0} = \frac{2\pi \mathrm{i}}{(-n-1)!}.$$

典型例题：使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

例. 求 $\displaystyle\oint_{|z-3|=2}\frac{1}{(z-2)^2z^3}\,\mathrm{d}z$ 和 $\displaystyle\oint_{|z-1|=3}\frac{1}{(z-2)^2z^3}\,\mathrm{d}z.$

解答.

(1) $\dfrac{1}{(z-2)^2z^3}$ 在 $|z-3|<2$ 的奇点为 $z=2$. 由柯西积分公式,

$$\oint_{|z-3|=2}\frac{1}{(z-2)^2z^3}\,\mathrm{d}z=\frac{2\pi\mathrm{i}}{1!}\Big(\frac{1}{z^3}\Big)'\Big|_{z=2}=-\frac{3\pi\mathrm{i}}{8}.$$

(2) $\dfrac{1}{(z-2)^2z^3}$ 在 $|z-1|<3$ 的奇点为 $z=0,2$. 取 C_1,C_2 为以 $0,2$ 为圆心的分离圆周.

$$\oint_{|z-1|=3}\frac{1}{(z-2)^2z^3}\,\mathrm{d}z=\oint_{C_1}\frac{1}{(z-2)^2z^3}\,\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{1}{(z-2)^2z^3}\,\mathrm{d}z$$

$$=\frac{2\pi\mathrm{i}}{2!}\left[\frac{1}{(z-2)^2}\right]''\Big|_{z=0}+\frac{2\pi\mathrm{i}}{1!}\Big(\frac{1}{z^3}\Big)'\Big|_{z=2}=0.$$

练习. $\displaystyle\oint_{|z-2\mathrm{i}|=3}\frac{1}{z^2(z-\mathrm{i})}\,\mathrm{d}z=$ ___0___.

例 (莫累拉定理). 设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内连续, 且对于 D 中任意闭路 C 都有 $\displaystyle\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z=0$, 则 $f(z)$ 在 D 内解析.

证明. 由题设可知 $f(z)$ 的积分与路径无关. 固定 $z_0\in D$, 则

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(z)\,\mathrm{d}z$$

定义了 D 内的一个函数. 类似于原函数的证明可知 $F'(z)=f(z)$. 故 $f(z)$ 作为解析函数 $F(z)$ 的导数也是解析的. □

高阶柯西积分公式说明解析函数的导数与实函数的导数有何不同? 高阶柯西积分公式说明, 函数 $f(z)$ 只要在区域 D 中处处可导, 它就一定无限次可导, 并且各阶导数仍然在 D 中解析. **这一点与实变量函数有本质的区别.**

同时我们也可以看出, 若一个二元实函数 $u(x,y)$ 是一个解析函数的实部或虚部, 则 u 也是具有任意阶偏导数. 这便引出了调和函数的概念.

第四节　解析函数与调和函数的关系

- 调和函数
- 共轭调和函数

调和函数是一类重要的二元实变函数, 它和解析函数有着紧密的联系. 为了简便, 我们用 u_{xx}, u_{yy} 来表示二阶偏导数.

定义. 若二元实变函数 $u(x,y)$ 在区域 D 内有二阶连续偏导数, 且满足**拉普拉斯方程**

$$\Delta u := u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

则称 $u(x,y)$ 是 D 内的**调和函数**.

定理. 区域 D 内解析函数 $f(z)$ 的实部和虚部都是调和函数.

证明. 设 $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$, 则 u, v 存在偏导数且

$$f'(z) = u_x + \mathrm{i}v_x = v_y - \mathrm{i}u_y.$$

由于 $f(z)$ 任意阶可导, 因此 u, v 存在任意阶偏导数. 由 C-R 方程 $u_x = v_y, u_y = -v_x$ 可知

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0,$$

$$\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = -u_{yx} + u_{xy} = 0.$$

□

反过来，调和函数是否一定是某个解析函数的实部或虚部呢？对于单连通的情形，答案是肯定的.

若 $u+\mathrm{i}v$ 是区域 D 内的解析函数，则我们称 v 是 u 的**共轭调和函数**. 换言之 $u_x=v_y, u_y=-v_x$. 显然 $-u$ 是 v 的共轭调和函数.

定理. 设 $u(x,y)$ 是单连通区域 D 内的调和函数，则线积分

$$v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -u_y\,\mathrm{d}x+u_x\,\mathrm{d}y+C$$

是 u 的共轭调和函数.

由此可知，区域 D 上的调和函数在 $z\in D$ 的一个邻域内是一解析函数的实部，从而在该邻域内具有任意阶连续偏导数. 而 z 的任取的，因此**调和函数总具有任意阶连续偏导数**.

若 D 是多连通区域, 则未必存在共轭调和函数. 例如 $\ln(x^2+y^2)$ 是复平面去掉原点上的调和函数, 但它并不是某个解析函数的实部. 事实上, 它是 $2\,\mathrm{Ln}\,z$ 的实部.

在实际计算中, 我们一般不用线积分来得到共轭调和函数, 而是采用下述两种办法:

偏积分法. 通过 $v_y=u_x$ 解得 $v=\varphi(x,y)+\psi(x)$, 其中 $\psi(x)$ 待定. 再代入 $u_y=-v_x$ 中解出 $\psi(x)$.

不定积分法. 对 $f'(z)=u_x-\mathrm{i}u_y=v_y+\mathrm{i}v_x$ 求不定积分得到 $f(z)$.

典型例题：求共轭调和函数和相应的解析函数

例. 证明 $u(x,y) = y^3 - 3x^2y$ 是调和函数，并求其共轭调和函数以及由它们构成的解析函数.

解答. 由 $u_x = -6xy, u_y = 3y^2 - 3x^2$ 可知

$$u_{xx} + u_{yy} = -6y + 6y = 0,$$

故 u 是调和函数.

由 $v_y = u_x = -6xy$ 得 $v = -3xy^2 + \psi(x)$.

由 $v_x = -u_y = 3x^2 - 3y^2$ 得 $\psi'(x) = 3x^2$, $\psi(x) = x^3 + C$.

故 $v(x,y) = -3xy^2 + x^3 + C$,

$$\begin{aligned} f(z) = u + \mathrm{i}v &= y^3 - 3x^2y + \mathrm{i}(-3xy^2 + x^3 + C) \\ &= \mathrm{i}(x + \mathrm{i}y)^3 + \mathrm{i}C = \mathrm{i}(z^3 + C), C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

当解析函数 $f(z)$ 是 x, y 的多项式形式时，$f(z)$ 本身一定是 z 的多项式．于是将 x 全部换成 z，y 全部换成 0 就是 $f(z)$．即使 $f(z)$ 不是 x, y 的多项式形式，这种替换方式很多时候也奏效．

在上例中我们也可由另一种方法计算得到：

$$f'(z) = u_x - \mathrm{i}u_y = -6xy - \mathrm{i}(3y^2 - 3x^2) = 3\mathrm{i}z^2.$$

因此 $f(z) = \mathrm{i}z^3 + C$.

例. 求解析函数 $f(z)$ 使得它的虚部为

$$v(x,y)=\mathrm{e}^x(y\cos y+x\sin y)+x+y.$$

解答. 由 $u_x=v_y=\mathrm{e}^x(\cos y-y\sin y+x\cos y)+1$ 得

$$u=\mathrm{e}^x(x\cos y-y\sin y)+x+\psi(y).$$

由 $u_y=-v_x=-\mathrm{e}^x(y\cos y+x\sin y+\sin y)-1$ 得

$$\psi'(y)=-1,\quad \psi(y)=-y+C.$$

故

$$\begin{aligned}f(z)&=u+\mathrm{i}v\\&=\mathrm{e}^x(x\cos y-y\sin y)+x-y+C+\mathrm{i}\big[\mathrm{e}^x(y\cos y+x\sin y)+x+y\big]\\&=z\mathrm{e}^z+(1+\mathrm{i})z+C,\quad C\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

也可由

$$\begin{aligned} & f'(z) = v_y + \mathrm{i}v_x \\ = \ & \mathrm{e}^x(\cos y - y\sin y + x\cos y) + 1 + \mathrm{i}\big[\mathrm{e}^x(y\cos y + x\sin y + \sin y) + 1\big] \\ = \ & (z+1)\mathrm{e}^z + 1 + \mathrm{i}. \end{aligned}$$

得 $f(z) = z\mathrm{e}^z + (1+\mathrm{i})z + C$.

练习. 证明 $u(x,y) = x^3 - 6x^2y - 3xy^2 + 2y^3$ 是调和函数并求它的共轭调和函数.

答案. $v(x,y) = 2x^3 + 3x^2y - 6xy^2 - y^3 + C$.

显然 $u + \mathrm{i}v = (1+2\mathrm{i})z^3 + \mathrm{i}C$.