



合肥工业大学

HEFEI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

复变函数与积分变换

张神星 (合肥工业大学)

办公室: 翡翠科教楼 B1810 东

Email: zhangshenxing@hfut.edu.cn

课件地址: <https://faculty.hfut.edu.cn/zhangshenxing>

- 课时: 共 10 周 40 课时, 从 2025-09-09 到 2025-11-13
- 期末考试在课程结束后两周左右



002 班 QQ 群: **1002019981**
入群答案 **1400261B**



教材: 《复变函数与积分变换》
机械工业出版社

003 班 (自动化) 课程信息

- 课时: 共 10 周 40 课时, 从 2025-09-09 到 2025-11-13
- 期末考试在课程结束后两周左右



003 班 QQ 群: **1006453495**
入群答案 **1400261B**



教材: 《复变函数与积分变换》
机械工业出版社

成绩构成

期末考试 50 分

期末卷面需要达到 45 分才计算总评分数, 45 分以下直接不及格.

作业 15 分

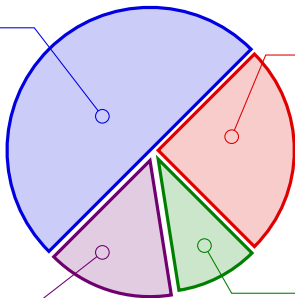
作业通过超星发布和提交, 约两周交一次. **作业必须按时提交, 不允许补交.**

课堂测验 25 分

课堂测验共 3 次, 取最高的两次平均. 测验范围和时间会提前通知. **测验时在教室内作答, 否则按未考处理.**

其它 10 分

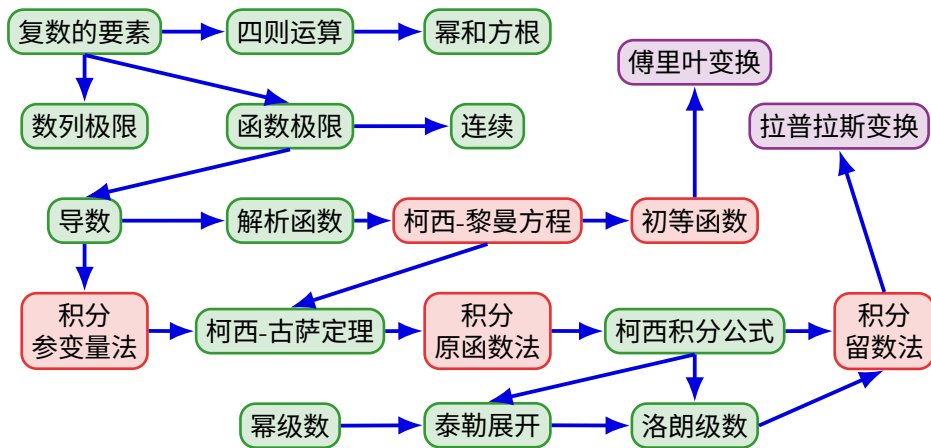
完成超星各个章节的任务点和主观研讨题.

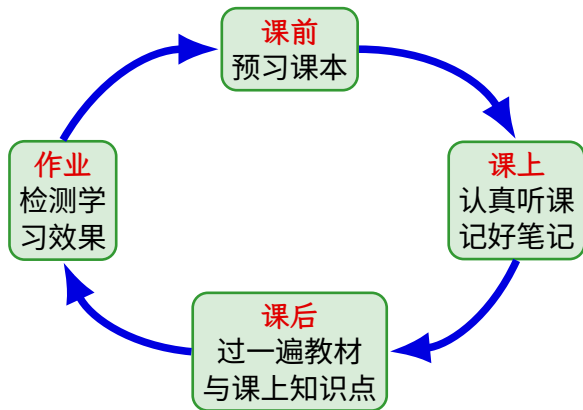


复变函数的应用非常广泛, 它包括:

- 数学中的代数、数论、几何、分析、动力系统……
- 物理学中流体力学、材料力学、电磁学、光学、量子力学……
- 信息学、电子学、电气工程……

可以说复变函数应用之广, 在大学数学课程中仅次于高等数学和线性代数.





第一章 复数与复变函数

- ① 复数及其代数运算
- ② 复数的三角形式与指数形式
- ③ 三角和指数形式在计算中的运用
- ④ 曲线和区域
- ⑤ 复变函数
- ⑥ 极限和连续性

第一节 复数及其代数运算

- 复数的产生
- 复数的概念
- 复数的代数运算
- 共轭复数

复数起源于多项式方程的求根问题. 考虑一元二次方程
 $x^2 + bx + c = 0$. 配方可得

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2 - 4c}{4}.$$

于是得到求根公式 $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2}$, 其中 $\Delta = b^2 - 4c$.

- (1) 当 $\Delta > 0$ 时, 有两个不同的实根;
- (2) 当 $\Delta = 0$ 时, 有一个二重的实根;
- (3) 当 $\Delta < 0$ 时, 无实根.

可以看出, 在一元二次方程中, 我们可以舍去包含**负数开方**的解. 然而在一元三次方程中, 即便只考虑实数根也会不可避免地引入负数开方.

例. 解方程 $x^3 + 6x - 20 = 0$.

解答. 设 $x = u + v$, 那么

$$u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + 6(u + v) - 20 = 0.$$

我们希望

$$u^3 + v^3 = 20, \quad uv = -2.$$

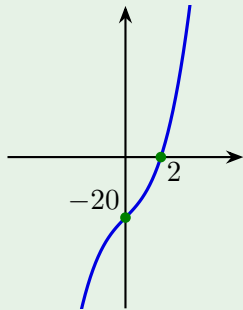
那么 u^3, v^3 满足一元二次方程

$$X^2 - 20X - 8 = 0.$$

解得

$$u^3 = 10 \pm \sqrt{108} = (1 \pm \sqrt{3})^3.$$

所以 $u = 1 \pm \sqrt{3}, v = 1 \mp \sqrt{3}. x = u + v = 2$.



现在我们来正式介绍复数的概念. 为了避免记号 $\sqrt{-1}$ 带来的歧义, 我们先引入抽象符号 i , 再通过定义它的运算来构造复数.

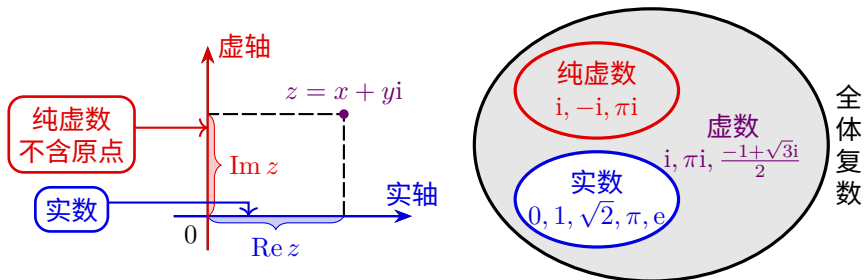
定义. 固定一个记号 i , **复数**就是形如 $z = x + yi$ 的元素, 其中 x, y 均是实数, 且不同的 (x, y) 对应不同的复数.

回忆全体实数、有理数、整数、自然数构成的集合分别记作 $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$. 将**全体复数**记作 $\mathbb{C}$.

实数 x 可以自然地看成复数 $x + 0i$. 于是我们有 $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

实部和虚部, 虚数和纯虚数

- x, y 轴分别对应复平面的**实轴**和**虚轴**.
- 称 $z = x + yi$ 中 $x = \operatorname{Re} z$ 为 z 的**实部**; $y = \operatorname{Im} z$ 为 z 的**虚部**.
- 当虚部 $\operatorname{Im} z = 0$ 时, z 为实数, 它落在实轴上.
 - 不是实数的复数是**虚数**.
- 当实部 $\operatorname{Re} z = 0$ 且 $z \neq 0$ 时, z 为**纯虚数**, 它落在虚轴上.



例题：判断实数和纯虚数

例. 实数 x 取何值时, $z = (x^2 + 3x - 4) + (x^2 + 5x - 6)i$ 是:

(1) 实数;

(2) 纯虚数.

解答.

(1) $\operatorname{Im} z = x^2 + 5x - 6 = 0$, 即 $x = 1$ 或 -6 .

(2) $\operatorname{Re} z = x^2 + 3x - 4 = 0$, 即 $x = 1$ 或 -4 . 但同时要求

$\operatorname{Im} z = x^2 + 5x - 6 \neq 0$, 因此 $x \neq 1$. 故 $x = -4$.

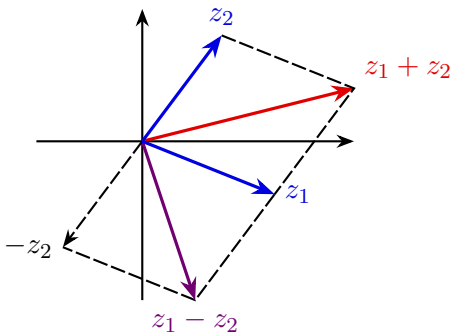
练习. 若 $(x^2 - 5x + 4) + (x^2 - 4x + 3)i$ 是纯虚数, 则实数 $x = \underline{\quad 4 \quad}$.

复数的加法与减法

设 $z_1 = x_1 + y_1i, z_2 = x_2 + y_2i$. 定义复数的**加法**和**减法**:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\mathbf{i}, \quad z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)\mathbf{i}.$$

复数的加减法与其对应的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的加减法是一致的.



例题: 复数的乘幂

例.

(1) $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$. 一般地, 对于整数 n ,

$$i^{4n} = 1, \quad i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i.$$

(2) 令 $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$, 则 $\omega^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}, \omega^3 = 1$.

(3) 令 $z = 1 + i$, 则

$$z^2 = 2i, \quad z^3 = -2 + 2i, \quad z^4 = -4, \quad z^8 = 16 = 2^4.$$

将满足 $z^n = 1$ 的复数 z 称为 n 次单位根. 那么 $1, i, -1, -i$ 是 4 次单位根, $1, \omega, \omega^2$ 是 3 次单位根, $-\omega$ 是 6 次单位根.

例题：复数代数式的计算

实数情形的等差数列求和公式、等比数列求和公式、二项式展开、平方差公式等代数恒等式在复数情形也成立.

例. 化简 $1 + i + i^2 + \cdots + i^{1000}$.

解答. 根据等比数列求和公式,

$$1 + i + i^2 + \cdots + i^{1000} = \frac{i^{1001} - 1}{i - 1} = \frac{i - 1}{i - 1} = 1.$$

练习. 化简 $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2026} = \underline{-1}$.

例题：共轭复数判断实数

例. 设 $z = x + yi$ 是虚数. 证明: $x^2 + y^2 = 1$ 当且仅当 $z + \frac{1}{z}$ 是实数.

证明. $z + \frac{1}{z}$ 是实数等价于

$$z + \frac{1}{z} = \overline{\left(z + \frac{1}{z}\right)} = \bar{z} + \frac{1}{\bar{z}},$$

等价于

$$z - \bar{z} = \frac{1}{\bar{z}} - \frac{1}{z} = \frac{z - \bar{z}}{z\bar{z}}, \quad (z - \bar{z})(z\bar{z} - 1) = 0.$$

由 z 是虚数可知 $z \neq \bar{z}$. 故上述等式等价于 $z\bar{z} = 1$, 即 $x^2 + y^2 = 1$. □

例题：复数的代数计算

由于 $z\bar{z}$ 是一个实数, 因此在做复数的除法运算时, 可以利用下式将其转化为乘法:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

例. $z = -\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i}$, 求 $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$ 以及 $z\bar{z}$.

解答.

$$z = -\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i} = i - \frac{3i-3}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i,$$

$$\operatorname{Re} z = \frac{3}{2}, \quad \operatorname{Im} z = -\frac{1}{2}, \quad z\bar{z} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}.$$

例题：复数的代数计算

例. 设 $z_1 = 5 - 5i$, $z_2 = -3 + 4i$, 求 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$.

解答.

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{5 - 5i}{-3 + 4i} = \frac{(5 - 5i)(-3 - 4i)}{(-3)^2 + 4^2} \\ &= \frac{(-15 - 20) + (-20 + 15)i}{25} = -\frac{7}{5} - \frac{1}{5}i,\end{aligned}$$

$$\text{因此 } \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = -\frac{7}{5} + \frac{1}{5}i.$$

第二节 复数的三角形式与指数形式

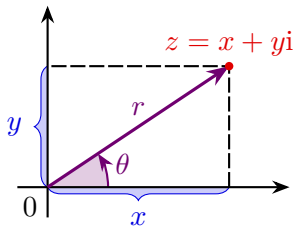
- 复数的模和辐角
- 复数的三角和指数形式

复数的极坐标形式

由平面的极坐标表示, 我们可以得到复数的另一种表示方式. 以 0 为极点, 正实轴为极轴, 逆时针为极角方向可以定义出复平面上的极坐标系.

定义.

- (1) 称 r 为 z 的模, 记为 $|z| = r$.
- (2) 称 θ 为 z 的辐角, 记为 $\text{Arg } z = \theta$. 约定 0 的辐角没有定义.



$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

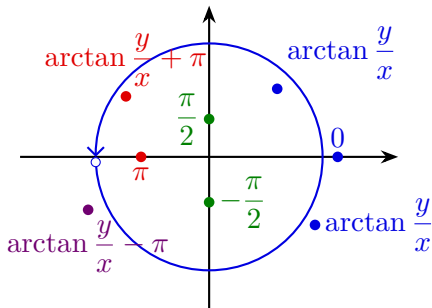
辐角主值

任意非零复数 z 都有无穷多个辐角. 称其中位于 $(-\pi, \pi]$ 的那个辐角为**辐角主值**或**主辐角**, 记作 $\arg z$. 那么

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

注意 $\arg \bar{z} = -\arg z$ **未必成立**, 当且仅当 z 不是负实数和 0 时该等式成立.

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & x > 0; \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & x < 0, y \geq 0; \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi, & x < 0, y < 0; \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0. \end{cases}$$



由 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ 可得

复数的三角形式.

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

定义 $e^{i\theta} = \exp(i\theta) := \cos \theta + i \sin \theta$ (欧拉恒等式). 那么我们得到

复数的指数形式.

$$z = r e^{i\theta} = r \exp(i\theta).$$

这两种形式的等价的, 指数形式可以认为是三角形式的一种缩写方式. 求复数的三角和指数形式的**关键在于计算模和辐角**.

例题：求复数的三角和指数形式

例. 将 $z = -\sqrt{12} - 2i$ 化成三角形式和指数形式.

解答. $r = |z| = \sqrt{12 + 4} = 4$. 由于 z 在第三象限, 因此

$$\arg z = \arctan \frac{-2}{-\sqrt{12}} - \pi = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5\pi}{6}.$$

故

$$z = 4 \left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) \right] = 4e^{-\frac{5\pi i}{6}}.$$

例题：求复数的三角和指数形式

例. 将 $z = \sin \frac{\pi}{5} + i \cos \frac{\pi}{5}$ 化成三角形式和指数形式.

解答. $r = |z| = 1$. 由于 z 在第一象限, 因此

$$\arg z = \arctan \frac{\cos(\pi/5)}{\sin(\pi/5)} = \arctan \cot \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{10}.$$

$$z = \cos \frac{3\pi}{10} + i \sin \frac{3\pi}{10} = e^{\frac{3\pi i}{10}}.$$

求复数的三角或指数形式时, 只需取一个辐角就可以了, 不要求必须是辐角主值.

例题：求复数的三角和指数形式

另解.

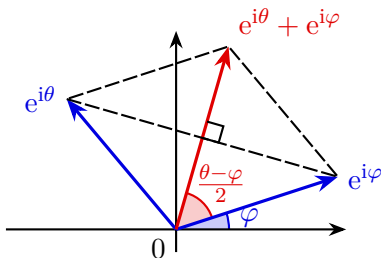
$$\begin{aligned} z &= \sin \frac{\pi}{5} + i \cos \frac{\pi}{5} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) \\ &= \cos \frac{3\pi}{10} + i \sin \frac{3\pi}{10} = e^{\frac{3\pi i}{10}}. \end{aligned}$$

练习. 将 $z = \sqrt{3} - 3i$ 化成三角形式和指数形式.

答案. $z = 2\sqrt{3}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] = 2\sqrt{3}e^{-\frac{\pi i}{3}}$, 写成 $\frac{5\pi}{3}$ 也可以.

两个模相等的复数之和的三角和指数形式形式较为简单.

$$e^{i\theta} + e^{i\varphi} = 2 \cos \frac{\theta - \varphi}{2} e^{\frac{\theta + \varphi}{2} i}.$$



例. 若 $|z| = 1, \arg z = \theta$, 则 $z + 1 = 2 \cos \frac{\theta}{2} e^{\frac{\theta i}{2}}$.

第三节 三角和指数形式在计算中的运用

- 复数的乘除
- 复数乘法的几何意义
- 复数的乘幂
- 复数的方根
- 实系数三次方程根的情况

三角和指数形式在复数的乘法、除法和幂次计算中非常有用.

定理. 设

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) = r_1 e^{i\theta_1},$$

$$z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = r_2 e^{i\theta_2} \neq 0,$$

则

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)] = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

我们利用复数乘幂公式来计算复数 z 的 n 次方根 $\sqrt[n]{z}$. 设

$$w^n = z = re^{i\theta} \neq 0, \quad w = \rho e^{i\varphi},$$

则

$$w^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

比较两边的模可知

$$\rho^n = r, \quad \rho = \sqrt[n]{r}.$$

为了避免记号冲突, 当 r 是正实数时, $\sqrt[n]{r}$ 默认表示 r 的唯一的 n 次正实根, 称之为**算术根**. 由于 $n\varphi$ 和 θ 的正弦和余弦均相等, 因此存在整数 k 使得

$$n\varphi = \theta + 2k\pi, \quad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}.$$

故

$$w = w_k = \sqrt[n]{r} \exp\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}i\right).$$

不难看出, $w_k = w_{k+n}$, 而 $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$ 两两不同. 因此只需取 $k = 0, 1, \dots, n-1$.

复数的方根. 任意一个非零复数 z 的 n 次方根有 n 个值:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \exp\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}i\right) = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right),$$

其中 $k = 0, 1, \dots, n-1$.

这些根的模都相等, 且 w_k 和 w_{k+1} 辐角相差 $\frac{2\pi}{n}$. 因此它们是以原点为中心, $\sqrt[n]{r}$ 为半径的圆的内接正 n 边形的顶点.

典型例题: 复数方根的计算

例. 求 $\sqrt[4]{1+i}$.

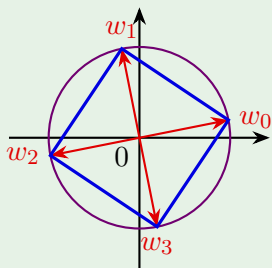
解答. 由于 $1+i = \sqrt{2} \exp\left(\frac{\pi i}{4}\right)$, 因此

$$\sqrt[4]{1+i} = \sqrt[8]{2} \exp \frac{(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)i}{4}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

于是该方根所有值为

$$w_0 = \sqrt[8]{2} e^{\frac{\pi i}{16}}, \quad w_1 = \sqrt[8]{2} e^{\frac{9\pi i}{16}},$$

$$w_2 = \sqrt[8]{2} e^{\frac{17\pi i}{16}}, \quad w_3 = \sqrt[8]{2} e^{\frac{25\pi i}{16}}.$$



第四节 曲线和区域

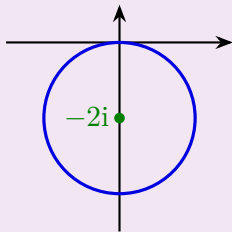
- 复数表平面曲线
- 区域和闭区域
- 区域的特性

例题：复数方程表圆

很多的平面图形能用复数形式的方程来表示. 这种表示方程有些时候会显得更加直观和易于理解.

例. $|z + 2i| = 2$. 该方程表示与 $-2i$ 的距离为 2 的点全体, 即圆心为 $-2i$ 半径为 2 的圆.

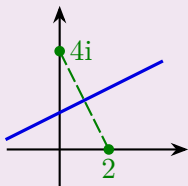
一般的圆方程为 $|z - z_0| = R$, 其中 z_0 是圆心, R 是半径.



例题：复数方程表直线

例. $|z - 4i| = |z - 2|$. 该方程表示与 $4i$ 和 2 的距离相等的点, 即二者连线的垂直平分线. 两边同时平方化简可得 $x - 2y + 3 = 0$. 该方程也可以表达为

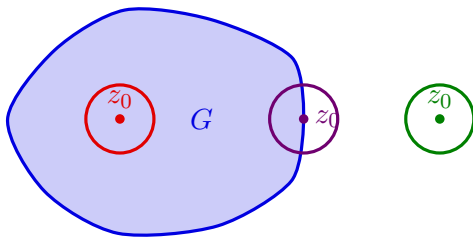
$$(1 + 2i)z + (1 - 2i)\bar{z} + 6 = 0.$$



设 G 是复平面的一个子集, $z_0 \in \mathbb{C}$. 它们的位置关系有三种可能:

- (1) 若存在 z_0 的一个邻域 U 完全包含在 G 中, 则称 z_0 是 G 的一个内点.
- (2) 若存在 z_0 的一个邻域 U 完全不包含在 G 中, 则称 z_0 是 G 的一个外点.
- (3) 若 z_0 既不是内点也不是外点, 则称 z_0 是 G 的一个边界点.

内点都属于 G , 外点都不属于 G , 而边界点则都有可能. 这类比于区间的端点和区间的关系.



定义.

- (1) 若 G 的所有点都是内点, 也就是说, G 的边界点都不属于它, 称 G 是一个开集.
- (2) 若 G 的所有边界点都属于 G , 称 G 是一个闭集.

G 是一个闭集当且仅当它的补集是开集.

例如

$$|z - z_0| < R, \quad 1 < \operatorname{Re} z < 3, \quad \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}$$

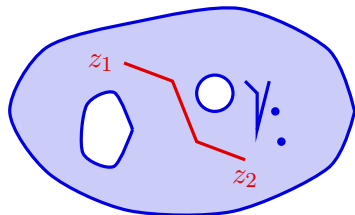
都是开集. 直观上看: 开集往往由 $>, <$ 的不等式给出, 闭集往往由 $\geq, \leq$ 的不等式给出. 不过注意这并不是绝对的.

若 D 可以被包含在某个开圆盘 $U(0, R)$ 中, 则称它是有界的. 否则称它是无界的.

定义. 若开集 D 的任意两个点之间都可以用一条完全包含在 D 中的折线连接起来, 则称 D 是一个**区域**. 也就是说, 区域是连通的开集.

观察右侧图案, 阴影部分 (不包含线条部分) 中任意两点可用折线连接, 因此它是一个区域. 这些线条和点构成了它的边界.

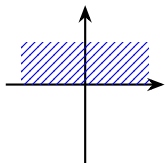
区域和它的边界一起构成了**闭区域**, 记作 $\bar{D}$. 它是一个闭集.



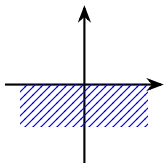
注意数学中边界的概念与日常所说的边界是两码事. 例如区域 $|z| > 1$ 的边界是 $|z| = 1$, 其闭区域是 $|z| \geq 1$.

常见区域

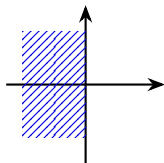
很多区域可以由复数的实部、虚部、模和辐角的不等式所确定. 下方区域对应的闭区域是什么?



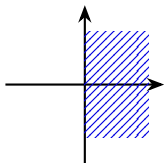
上半平面
 $\text{Im } z > 0$



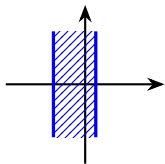
下半平面
 $\text{Im } z < 0$



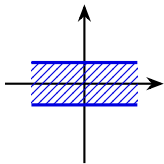
左半平面
 $\operatorname{Re} z < 0$



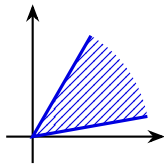
右半平面
 $\operatorname{Re} z > 0$



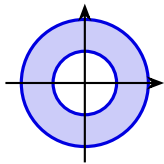
竖直带状区域
 $x_1 < \operatorname{Re} z < x_2$



水平带状区域
 $y_1 < \operatorname{Im} z < y_2$



角状区域
 $\alpha_1 < \arg z < \alpha_2$



圆环域
 $r < |z| < R$

第五节 复变函数

- 复变函数的定义
- 复平面的变换

所谓的**映射**, 就是两个集合之间的一种对应 $f: A \rightarrow B$, 使得对于每一个 $a \in A$, 有一个唯一确定的 $b = f(a)$ 与之对应.

- (1) 当 A 和 B 都是实数集合的子集时, 它就是一个实变函数.
- (2) 当 A 和 B 都是复数集合的子集时, 它就是一个**复变函数**.

例. $f(z) = \operatorname{Re} z, \arg z, |z|, z^n$ (n 为整数), $\frac{z+1}{z^2+1}$ 都是复变函数.

定义. 称 A 为函数 f 的**定义域**, 称 $\{w = f(z) \mid z \in A\}$ 为它的**值域**.

上述函数的定义域和值域分别是什么?

在复变函数理论中, 我们常常会遇到**多值的复变函数**, 也就是说一个 $z \in A$ 可能有多个 w 与之对应. 例如 $\operatorname{Arg} z$, $\sqrt[n]{z}$ 等.

为了方便研究, 我们常常需要对每一个 z , 选取固定的一个 $f(z)$ 的值. 这样我们得到了这个多值函数的一个**单值分支**.

例. $\arg z$ 是无穷多值函数 $\operatorname{Arg} z$ 的一个单值分支.

在考虑多值的情况下, 复变函数总有反函数. 若 f 和 f^{-1} 都是单值的, 则称 f 是**一一对应**.

例. $f(z) = z^n$ 的反函数就是 $f^{-1}(w) = \sqrt[n]{w}$. 当 $n = \pm 1$ 时, f 是一一对应.

若无特别声明, 本课程中**复变函数总是指单值的复变函数**.

例题: 变换的像

例. 求扇形区域 $0 < \arg z < \frac{\pi}{3}, 0 < |z| < 2$ 在变换 $w = z^2$ 下的像.

解答. 设 $z = re^{i\theta}$, 则 $w = r^2 e^{2i\theta}$. 因此它的像是扇形区域

$$0 < \arg w < \frac{2\pi}{3}, \quad 0 < |w| < 4.$$

第六节 极限和连续性

- 数列的极限
- 无穷远点和复球面
- 函数的极限
- 函数的连续性

类似于实数的情形, 我们可以定义复数列和复变函数的极限.

我们先来看数列极限的定义.

定义. 设 $\{z_n\}_{n \geq 1}$ 是一个复数列. 若存在复数 z 满足对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N 使得当 $n \geq N$ 时, $|z_n - z| < \varepsilon$, 则称 z 是数列 $\{z_n\}$ 的极限, 记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$.

此时称**极限存在**或**数列收敛**. 若不存在这样的 z , 则称**极限不存在**或**数列发散**.

可以看出, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ 等价于实极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - z| = 0$.

由于复数列极限的定义和实数列极限的定义在形式上完全相同, 因此类似地, 极限的四则运算法则对于复数列也是成立的.

定理. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$, $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = w$, 则

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n \pm w_n) = z \pm w$;
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n w_n = zw$;
- (3) 当 $w \neq 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{z}{w}$.

定义. 设函数 $f(z)$ 在点 z_0 的某个去心邻域内有定义. 若存在复数 A , 使得对 A 的任意邻域 $U(A, \varepsilon)$, $\exists \delta > 0$ 使得

$$z \in \mathring{U}(z_0, \delta) \implies f(z) \in U(A, \varepsilon),$$

则称 A 为 $f(z)$ 当 $z \rightarrow z_0$ 时的极限, 记为 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$ 或 $f(z) \rightarrow A (z \rightarrow z_0)$.

在此表述下, 将上述定义中的 z_0 或 A 换成 ∞ , 即可得到 $z \rightarrow \infty$ 时的极限定义, 以及 $\lim f(z) = \infty$ 的含义.

类似于复数列情形, 极限的四则运算法则对于复变函数也是成立的.

定理. 设 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$, $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = B$, 则

(1) $\lim_{z \rightarrow z_0} (f \pm g)(z) = A \pm B$;

(2) $\lim_{z \rightarrow z_0} (fg)(z) = AB$;

(3) 当 $B \neq 0$ 时, $\lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{f}{g}\right)(z) = \frac{A}{B}$.

和数列极限类似, 我们有下列定理:

定理. 设 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z_0 = x_0 + y_0i$, $A = u_0 + v_0i$, 则

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A \iff \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = u_0, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = v_0.$$

该定理表明: 研究复变函数极限, 只需研究其实部、虚部两个二元实函数的极限.

在学习了复变函数的导数后, 我们也可以使用等价无穷小替换、洛必达法则等工具来计算极限.

例题: 判断函数极限是否存在

例. 证明: 当 $z \rightarrow 0$ 时, 函数 $f(z) = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}$ 的极限不存在.

证明. 令 $z = x + yi$, 则 $f(z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. 因此

$$u(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad v(x, y) = 0.$$

当 z 在实轴原点两侧分别趋向于 0 时, $u(x, y) \rightarrow \pm 1$. 因此 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} u(x, y)$ 不存在, 从而 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ 不存在. □

例题: 连续函数的性质

例.

(1) 设

$$f(z) = \ln(x^2 + y^2) + i(x^2 - y^2).$$

$u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ 除原点外处处连续, $v(x, y) = x^2 - y^2$ 处处连续. 因此 $f(z)$ 在 $z \neq 0$ 处连续.

(2) 显然 $f(z) = z$ 是处处连续的, 故多项式函数

$$P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n$$

也处处连续, 有理函数 $\frac{P(z)}{Q(z)}$ 在 $Q(z)$ 的零点以外处处连续.

例题：函数连续性的判定

例. 证明：若 $f(z)$ 在 z_0 连续, 则 $\overline{f(z)}$ 在 z_0 也连续.

证明. 设

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z_0 = x_0 + iy_0.$$

那么 $u(x, y), v(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 连续. 从而 $-v(x, y)$ 也在 (x_0, y_0) 连续.
所以

$$\overline{f(z)} = u(x, y) - iv(x, y)$$

在 (x_0, y_0) 连续. □

另证. 函数 $g(z) = \bar{z} = x - iy$ 处处连续, 从而 $g[f(z)] = \overline{f(z)}$ 在 z_0 处连续. □

