复变函数与积分变换

张神星 (合肥工业大学)
办公室: 翡翠科教楼 *B1810* 东
Email: zhangshenxing@hfut.edu.cn
课件地址: https://faculty.hfut.edu.cn/zhangshenxing

第二章　解析函数

1. 解析函数的概念
2. 函数解析的充要条件
3. 初等函数

第一节　解析函数的概念

- 可导函数
- 可微函数
- 解析函数

由于 $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{R}$ 一样是域, 因此我们可以像一元实变函数一样去定义复变函数的导数和微分.

定义. 设 $w = f(z)$ 的定义域是区域 D, $z_0 \in D$. 若极限

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

存在, 则称 $f(z)$ 在 z_0 可导. 这个极限值称为 $f(z)$ 在 z_0 的导数, 记作 $f'(z_0)$. 若 $f(z)$ 在区域 D 内处处可导, 称 $f(z)$ 在 D 内可导.

例. 函数 $f(z)=x+2y\mathrm{i}$ 在哪些点处可导？

解答. 由定义可知

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{(x+\Delta x)+2(y+\Delta y)\mathrm{i}-(x+2y\mathrm{i})}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta x+2\,\Delta y\mathrm{i}}{\Delta x+\Delta y\mathrm{i}}. \end{aligned}$$

当 $\Delta x=0,\Delta y\to 0$ 时，上式 $\to 2$；当 $\Delta y=0,\Delta x\to 0$ 时，上式 $\to 1$. 因此该极限不存在，$f(z)$ 处处不可导.

例题：复变函数的导数

练习. 函数 $f(z)=\overline{z}=x-yi$ 在哪些点处可导？

答案. 处处不可导.

例. 求 $f(z)=z^2$ 的导数.

解答.

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^2-z^2}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z\to 0}(2z+\Delta z) = 2z. \end{aligned}$$

求导运算法则

事实上, 和单变量实函数情形类似, 复变函数也有如下求导法则.

定理.

(1) $(c)' = 0$, 其中 c 为复常数;

(2) $(z^n)' = nz^{n-1}$, 其中 n 为整数;

(3) $(f \pm g)' = f' \pm g', \quad (cf)' = cf'$; 线性性质

(4) $(fg)' = f'g + fg', \quad \left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$; 莱布尼兹法则

(5) $\left\{f\left[g(z)\right]\right\}' = f'\left[g(z)\right] \cdot g'(z)$; 复合函数求导

(6) $g'(z) = \dfrac{1}{f'(w)}, g = f^{-1}, w = g(z)$. 反函数求导

由上述求导法则，不难知道：

定理.

(1) 在 z_0 处可导的两个函数 $f(z), g(z)$ 之和、差、积、商 ($g(z_0)\neq 0$) 仍然在 z_0 处可导.

(2) 若函数 $g(z)$ 在 z_0 处可导，函数 $f(w)$ 在 $g(z_0)$ 处可导，则 $f[g(z)]$ 在 z_0 处可导.

由此可知，多项式函数处处可导，有理函数在其定义域内处处可导，且二者导数形式和单变量实函数情形类似.

例题：利用求导运算法则计算导数

例. 求 $f(z) = \dfrac{z^2+3}{z+1}$ 的导数.

解答. 由于

$$f(z) = z - 1 + \frac{4}{z+1},$$

因此

$$f'(z) = 1 - \frac{4}{(z+1)^2}.$$

可导蕴含连续

定理. 若 $f(z)$ 在 z_0 可导, 则 $f(z)$ 在 z_0 连续.

该定理的证明和单变量实函数情形完全相同.

证明. 设 $\Delta w = f(z_0+\Delta z) - f(z_0)$, 则

$$\lim_{\Delta z\to 0} \Delta w = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}\cdot \Delta z = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}\cdot \lim_{\Delta z\to 0} \Delta z = f'(z_0)\cdot 0 = 0,$$

从而 $f(z)$ 在 z_0 处连续. □

复变函数的微分也和单变量实函数情形类似.

定义. 若存在常数 A 使得函数 $w = f(z)$ 满足

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A\,\Delta z + o(\Delta z),$$

其中 $o(\Delta z)$ 表示 Δz 的高阶无穷小量, 则称 $f(z)$ 在 z_0 处可微, 称 $A\,\Delta z$ 为 $f(z)$ 在 z_0 的微分, 记作 $\mathrm{d}w = A\,\Delta z$.

和一元实变函数情形一样, 复变函数的可微和可导是等价的, 且 $\mathrm{d}w = f'(z_0)\,\Delta z$, $\mathrm{d}z = \Delta z$. 故

$$\mathrm{d}w = f'(z_0)\,\mathrm{d}z, \quad f'(z_0) = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}.$$

定义.

(1) 若函数 $f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内处处可导，则称 $f(z)$ 在 z_0 解析.

(2) 若 $f(z)$ 在区域 D 内处处解析，则称 $f(z)$ 在 D 内解析，或称 $f(z)$ 是 D 内的一个解析函数.

(3) 若 $f(z)$ 在 z_0 不解析，则称 z_0 为 $f(z)$ 的一个奇点.

在一点解析蕴含在这点可导，反之未必. 无定义、不连续、不可导、可导但不解析，都会导致奇点的产生. 不过，若 z_0 是 $f(z)$ 定义域的外点，即存在 z_0 的邻域与 $f(z)$ 定义域交集为空集，这种情形不甚有趣，因此我们不考虑这类奇点.

在区域 D 内解析和在 D 内可导是等价的. 这是因为任意 $z_0 \in D$ 均存在一个包含在 D 内的邻域.

例题: 解析与可导的关系

由于一个点的邻域也是一个开集, 因此若 $f(z)$ 在 z_0 处解析, 则 $f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内处处可导, 从而在该邻域内解析. 因此 $f(z)$ **解析点全体是一个开集**, 它是可导点集合的内点构成的集合.

练习. 函数 $f(z)$ 在点 z_0 处解析是 $f(z)$ 在该点可导的(A).

(A) 充分非必要条件
(B) 必要非充分条件
(C) 充要条件
(D) 既非充分也非必要条件

答案. 解析要求在 z_0 的一个邻域内都可导才行.

例题：函数的解析性

例. 研究函数 $f(z)=|z|^2$ 的解析性.

解答. 注意到

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{(z+\Delta z)(\overline{z}+\overline{\Delta z})-z\overline{z}}{\Delta z}=\overline{z}+\overline{\Delta z}+z\frac{\Delta x-\Delta y\mathrm{i}}{\Delta x+\Delta y\mathrm{i}}.$$

- 若 $z=0$, 则当 $\Delta z\to 0$ 时该式极限为 0.
- 若 $z\neq 0$, 则当 $\Delta y=0,\Delta x\to 0$ 时该式极限为 $\overline{z}+z$;

当 $\Delta x=0,\Delta y\to 0$ 时该式极限为 $\overline{z}-z$. 因此此时极限不存在. 故 $f(z)$ 仅在 $z=0$ 处可导, 从而处处不解析.

解析函数的四则运算和复合

定理.

(1) 在 z_0 处解析的两个函数 $f(z)$, $g(z)$ 之和、差、积、商 ($g(z_0)\neq 0$) 仍然在 z_0 处解析.

(2) 若函数 $g(z)$ 在 z_0 处解析, 函数 $f(w)$ 在 $g(z_0)$ 处解析, 则 $f[g(z)]$ 在 z_0 处解析.

定理.

(1) 在 D 内解析的两个函数 $f(z)$, $g(z)$ 之和、差、积、商仍然在 D (作商时需要去掉 $g(z)=0$ 的点) 内解析.

(2) 若函数 $g(z)$ 在 D 内解析且像均落在 D' 中, 函数 $f(w)$ 在 D' 内解析, 则 $f[g(z)]$ 在 D 内解析.

由此可知, 多项式函数处处解析. 有理函数在其定义域内处处解析, 分母的零点是它的奇点.

第二节　函数解析的充要条件

- 柯西-黎曼方程
- 柯西-黎曼方程的应用

可导函数的特点

通过对一些简单函数的分析, 我们发现可导的函数往往可以直接表达为 z 的函数的形式, 而不解析的往往包含 $x, y, \overline{z}$ 等内容.

这种现象并不是偶然的. 我们来研究二元实变量函数的可微性与复变函数可导的关系.

为了简便我们用 u_x, u_y, v_x, v_y 等记号表示偏导数.

可导的等价刻画：形式推导

设 $f = u + \mathrm{i}v$ 在 z 处可导，$f'(z) = a + b\mathrm{i}$，则

$$\Delta u + \mathrm{i}\,\Delta v = \Delta f = (a + b\mathrm{i})(\Delta x + \mathrm{i}\,\Delta y) + o(\Delta z).$$

展开可知

$$\Delta u = a\,\Delta x - b\,\Delta y + o(\Delta z),$$
$$\Delta v = b\,\Delta x + a\,\Delta y + o(\Delta z).$$

由于 $o(\Delta z) = o(|\Delta z|) = o(\sqrt{x^2 + y^2})$，因此 u, v 可微且 $u_x = v_y = a, v_x = -u_y = b$.

反过来, 假设 u, v **可微且** $u_x = v_y, v_x = -u_y$. 由全微分公式

$$\begin{aligned}
\Delta u &= u_x\,\Delta x + u_y\,\Delta y + o(\Delta z) = u_x\,\Delta x - v_x\,\Delta y + o(\Delta z),\\
\Delta v &= v_x\,\Delta x + v_y\,\Delta y + o(\Delta z) = v_x\,\Delta x + u_x\,\Delta y + o(\Delta z),\\
\Delta f &= \Delta(u + \mathrm{i}v) = (u_x + \mathrm{i}v_x)\,\Delta x + (-v_x + \mathrm{i}u_x)\,\Delta y + o(\Delta z)\\
&= (u_x + \mathrm{i}v_x)\,\Delta(x + \mathrm{i}y) + o(\Delta z)\\
&= (u_x + \mathrm{i}v_x)\,\Delta z + o(\Delta z).
\end{aligned}$$

故 $f(z)$ **在** z **处可导, 且** $f'(z) = u_x + \mathrm{i}v_x = v_y - \mathrm{i}u_y$.

可导的等价刻画：柯西-黎曼方程

由此得到

柯西-黎曼定理. $f(z)$ 在 z 可导当且仅当在 z 点 u, v 可微且满足柯西-黎曼方程 (简称为 C-R 方程):

$$u_x = v_y, \quad v_x = -u_y.$$

此时

$$f'(z) = u_x + \mathrm{i}v_x = v_y - \mathrm{i}u_y.$$

需要注意的是：柯西-黎曼定理中的可微性和 C-R 方程缺一不可.

注意到 $x=\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}\overline{z}, y=-\frac{\mathrm{i}}{2}z+\frac{\mathrm{i}}{2}\overline{z}$. 仿照着二元实函数偏导数在变量替换下的变换规则, 定义 f 对 z 和 $\overline{z}$ 的偏导数为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial z}=\dfrac{\partial x}{\partial z}\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial z}\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x}-\dfrac{\mathrm{i}}{2}\dfrac{\partial f}{\partial y},\\ \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}=\dfrac{\partial x}{\partial \overline{z}}\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial \overline{z}}\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\mathrm{i}}{2}\dfrac{\partial f}{\partial y}.\end{cases}$$

若把 $z,\overline{z}$ 看成独立变量, 那么

- 当 f 在 z 处可导时, $\mathrm{d}f=f'\,\mathrm{d}z$.
- 当 f 关于 $z,\overline{z}$ 可微时 (即 u,v 可微), $\mathrm{d}f=\dfrac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z+\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,\mathrm{d}\overline{z}$.

所以 **f 在 z 处可导当且仅当 u,v 可微且 $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}=0$, 此时 $f'(z)=\dfrac{\partial f}{\partial z}$.** 这也解释了为何含有 $x,y,\overline{z}$ 形式的函数往往不可导, 而可导的函数往往可以直接表达为 z 的形式.

由于二元函数的偏导数均连续蕴含可微, 因此我们有:

定理.

(1) **若 u_x, u_y, v_x, v_y 在 z 处连续, 且满足 C-R 方程, 则 $f(z)$ 在 z 可导.**

(2) **若 u_x, u_y, v_x, v_y 在区域 D 上处处连续, 且满足 C-R 方程, 则 $f(z)$ 在 D 上可导 (从而解析).**

这些连续性要求也可以换成 $\dfrac{\partial f}{\partial z}, \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}$ 的连续性.

典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

例. 函数 $f(z)=\overline{z}$ 在何处可导，在何处解析?

解答. 由 $u=x, v=-y$ 可知

$$\begin{aligned} u_x &= 1, & u_y &= 0, \\ v_x &= 0, & v_y &= -1. \end{aligned}$$

因为 $u_x=1\neq v_y=-1$，所以该函数处处不可导，处处不解析.

也可由 $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}=1\neq 0$ 看出.

典型例题：利用 C-R 方程判断可导和解析

例. 函数 $f(z)=z\operatorname{Re}z$ 在何处可导，在何处解析？

解答. 由 $f(z)=x^2+\mathrm{i}xy, u=x^2, v=xy$ 可知

$$\begin{aligned} u_x &= 2x, & u_y &= 0, \\ v_x &= y, & v_y &= x. \end{aligned}$$

由 $2x=x, 0=-y$ 可知只有 $x=y=0, z=0$ 满足 *C-R* 方程. 因此该函数只在 0 可导，处处不解析且 $f'(0)=u_x(0,0)+\mathrm{i}v_x(0,0)=0$.

也可由

$$f=\frac{1}{2}z(z+\overline{z}),\quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}=\frac{1}{2}z$$

看出，$f'(0)=\dfrac{\partial f}{\partial z}\Big|_{z=0}=\Big(z+\dfrac{1}{2}\overline{z}\Big)\Big|_{z=0}=0.$

例. 函数 $f(z)=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)$ 在何处可导, 在何处解析?

解答. 由 $u=\mathrm{e}^x\cos y, v=\mathrm{e}^x\sin y$ 可知

$$\begin{aligned} u_x &= \mathrm{e}^x\cos y, & u_y &= -\mathrm{e}^x\sin y,\\ v_x &= \mathrm{e}^x\sin y, & v_y &= \mathrm{e}^x\cos y. \end{aligned}$$

因此该函数处处可导, 处处解析, 且

$$f'(z)=u_x+\mathrm{i}v_x=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)=f(z).$$

实际上, 这个函数就是复变量的指数函数 e^z.

典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

练习. 函数(A)在 $z=0$ 处不可导.

(A) $2x+3y\mathrm{i}$

(B) $2x^2+3y^2\mathrm{i}$

(C) $\mathrm{e}^x\cos y+\mathrm{i}\mathrm{e}^x\sin y$

(D) $x^2-xy\mathrm{i}$

答案. 根据 *C-R* 方程可知对于 *A*, $u_x(0)=2\neq v_y(0)=3$. 对于 *BD*, 各个偏导数在 0 处取值都是 0. *C* 则是处处都可导.

例. 设函数 $f(z)=(x^2+axy+by^2)+\mathrm{i}(cx^2+dxy+y^2)$ 在复平面内处处解析. 求实常数 a,b,c,d 以及 $f'(z)$.

解答. 由于

$$\begin{aligned} u_x &= 2x+ay, & u_y &= ax+2by, \\ v_x &= 2cx+dy, & v_y &= dx+2y, \end{aligned}$$

因此

$$2x+ay=dx+2y,\quad ax+2by=-(2cx+dy),$$

$$a=d=2,\quad b=c=-1,$$

$$f'(z)=u_x+\mathrm{i}v_x=2x+2y+\mathrm{i}(-2x+2y)=(2-2\mathrm{i})z.$$

例. 若 $f'(z)$ 在区域 D 内处处为零, 则 $f(z)$ 在 D 内是一常数.

证明. 由于

$$f'(z) = u_x + \mathrm{i}v_x = v_y - \mathrm{i}u_y = 0,$$

因此 $u_x = v_x = u_y = v_y = 0$, u, v 均为常数, 从而 $f(z) = u + \mathrm{i}v$ 是常数. □

类似地可以证明, 若 $f(z)$ 在 D 内解析, 则下述条件均可推出 $f(z)$ 是常数:

- $\arg f(z)$ 是一常数,
- $|f(z)|$ 是一常数,
- $\operatorname{Re} f(z)$ 是一常数,
- $\operatorname{Im} f(z)$ 是一常数,
- $v = u^2$,
- $u = v^2$.

例题: 解析函数的保角性

例. 若 $f(z)$ 解析且 $f'(z)$ 处处非零, 则曲线族 $u(x,y)=c_1$ 和曲线族 $v(x,y)=c_2$ 互相正交.

证明. 由于 $f'(z)=u_x-\mathrm{i}u_y$, 因此 u_x,u_y 不全为零. 对 $u(x,y)=c_1$ 使用隐函数求导法则得

$$u_x\,\mathrm{d}x+u_y\,\mathrm{d}y=0,$$

从而 $\boldsymbol{u}=(u_y,-u_x)$ 是该曲线在 z 处的非零切向量. 同理 $\boldsymbol{v}=(v_y,-v_x)$ 是 $v(x,y)=c_2$ 在 z 处的非零切向量. 由于

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=u_yv_y+u_xv_x=u_yu_x-u_xu_y=0,$$

因此这两个切向量 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 正交, 从而曲线正交. □

当 $f'(z_0)\neq 0$ 时, 经过 z_0 的两条曲线 C_1, C_2 的夹角和它们的像 $f(C_1), f(C_2)$ 在 $f(z_0)$ 处的夹角总是相同的. 这种性质被称为**保角性**.

这是因为 $\mathrm{d}f = f'(z_0)\,\mathrm{d}z$. 局部来看 f 把 z_0 附近的点以 z_0 为中心放缩至 $|f'(z_0)|$ 倍并逆时针旋转 $\arg f'(z_0)$. 由 w 复平面上曲线族 $u=c_1, v=c_2$ 正交可知上述例题成立.

第三节　初等函数

- 指数函数
- 对数函数
- 幂函数
- 三角函数和反三角函数
- 在有理函数的应用

我们将实变函数中的初等函数推广到复变函数. 多项式函数和有理函数的解析性质已经介绍过, 这里不再重复. 现在我们来定义指数函数.

指数函数有多种等价的定义方式:

(1) $\exp z = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$ (欧拉恒等式);

(2) $\exp z = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n$ (极限定义);

(3) $\exp z = 1 + z + \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^3}{3!} + \cdots = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{z^k}{k!}$ (级数定义);

(4) $\exp z$ 是唯一的一个处处解析的函数, 使得当 $z = x \in \mathbb{R}$ 时, $\exp z = \mathrm{e}^x$ (解析延拓).

指数函数与欧拉恒等式

有些人会从 $\mathrm{e}^x, \cos x, \sin x$ 的泰勒展开

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots \end{aligned}$$

形式地带入得到欧拉恒等式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i} \sin x$. 事实上我们可以把它当做复指数函数的定义, 而不是欧拉恒等式的证明. 我们将在第四章说明(1)、(3)和(4)是等价的.

指数函数的定义

我们来证明(1)和(2)等价.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|1+\frac{z}{n}\right|^n &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} \quad (1^\infty \text{ 型不定式})\\ &= \exp\left[\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\left(\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)\right] = \mathrm{e}^x.\end{aligned}$$

不妨设 $n > |z|$, 这样 $1+\dfrac{z}{n}$ 落在右半平面,

$$\lim_{n\to\infty} n\arg\left(1+\frac{z}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\arctan\frac{y}{n+x} = \lim_{n\to\infty}\frac{ny}{n+x} = y.$$

故 $\exp z = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$.

指数函数的性质

定义. 指数函数

$$\exp z := \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y).$$

为了方便, 我们也记 $\mathrm{e}^z = \exp z$. 指数函数有如下性质:

- $\exp z$ 处处解析, 且 $(\exp z)' = \exp z$.
- $\exp z \neq 0$.
- $\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \cdot \exp z_2$.
- $\exp(z + 2k\pi\mathrm{i}) = \exp z$, 即 $\exp z$ 周期为 $2\pi\mathrm{i}$.
- $\exp z_1 = \exp z_2$ 当且仅当 $z_1 = z_2 + 2k\pi\mathrm{i}, k \in \mathbb{Z}$.
- 指数函数将直线族 $\operatorname{Re} z = c$ 映为圆周族 $|w| = \mathrm{e}^c$, 将直线族 $\operatorname{Im} z = c$ 映为射线族 $\operatorname{Arg} w = c$.

例题：指数函数的周期

例. 计算函数 $f(z)=\exp\left(\dfrac{z}{6}\right)$ 的周期.

解答. 设 $f(z_1)=f(z_2)$, 则 $\mathrm{e}^{z_1/6}=\mathrm{e}^{z_2/6}$. 因此存在 $k\in\mathbb{Z}$ 使得

$$\frac{z_1}{6}=\frac{z_2}{6}+2k\pi\mathrm{i},$$

从而 $z_1-z_2=12k\pi\mathrm{i}$. 所以 $f(z)$ 的周期是 $12\pi\mathrm{i}$.

一般地, $\exp(az+b)$ 的周期是 $\dfrac{2\pi\mathrm{i}}{a}$ (或写成 $-\dfrac{2\pi\mathrm{i}}{a}$), $a\neq 0$.

对数函数 $\operatorname{Ln} z$ 定义为指数函数 $\exp z$ 的反函数. 为什么我们用大写的 Ln 呢? 在复变函数中, 很多函数是多值函数. 为了便于研究, 我们会固定它的一个单值分支. 我们将多值的这个开头字母大写, 而对应的单值的则是开头字母小写. 例如 $\operatorname{Arg} z$ 和 $\arg z$.

设 $z \neq 0, \mathrm{e}^w = z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\ln r + \mathrm{i}\theta}$, 则

$$w = \ln r + \mathrm{i}\theta + 2k\pi\mathrm{i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

定义.

(1) 定义对数函数

$$\operatorname{Ln} z=\ln|z|+\mathrm{i}\operatorname{Arg} z.$$

它是一个多值函数.

(2) 定义对数函数主值

$$\ln z=\ln|z|+\mathrm{i}\arg z.$$

对于每一个整数 k, $\ln z+2k\pi\mathrm{i}$ 都给出了 $\operatorname{Ln} z$ 的一个单值分支. 特别地, 当 $z=x>0$ 是正实数时, $\ln z$ 就是实变的对数函数.

典型例题：对数函数的计算

例. 求 $\operatorname{Ln} 2, \operatorname{Ln}(-1)$ 以及它们的主值.

解答.

(1)

$$\operatorname{Ln} 2 = \ln 2 + 2k\pi\mathrm{i}, k \in \mathbb{Z},$$

主值为 $\ln 2$.

(2)

$$\operatorname{Ln}(-1) = \ln 1 + \mathrm{i}\operatorname{Arg}(-1) = (2k+1)\pi\mathrm{i}, k \in \mathbb{Z},$$

主值为 $\pi\mathrm{i}$.

例. 求 $\mathrm{Ln}(-2+3\mathrm{i}), \mathrm{Ln}(3-\sqrt{3}\mathrm{i})$.

解答.

(1)

$$\begin{aligned}\mathrm{Ln}(-2+3\mathrm{i}) &= \ln|-2+3\mathrm{i}| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(-2+3\mathrm{i}) \\ &= \frac{1}{2}\ln 13 + \Big(-\arctan\frac{3}{2} + \pi + 2k\pi\Big)\mathrm{i}, \quad k\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\mathrm{Ln}(3-\sqrt{3}\mathrm{i}) &= \ln|3-\sqrt{3}\mathrm{i}| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(3-\sqrt{3}\mathrm{i}) \\ &= \ln 2\sqrt{3} + \Big(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi\Big)\mathrm{i} \\ &= \ln 2\sqrt{3} + \Big(2k - \frac{1}{6}\Big)\pi\mathrm{i}, \quad k\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

例. 解方程 $e^z - 1 - \sqrt{3}i = 0$.

解答. 由于 $1 + \sqrt{3}i = 2e^{\frac{\pi i}{3}}$, 因此

$$z = \mathrm{Ln}(1 + \sqrt{3}i) = \ln 2 + \left(2k + \frac{1}{3}\right)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

练习. 求 $\ln(-1 - \sqrt{3}i) = \underline{\ln 2 - \frac{2\pi i}{3}}$.

对数函数的性质

对数函数与其主值的关系是

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + \operatorname{Ln} 1 = \ln z + 2k\pi\mathrm{i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

根据辐角以及辐角主值的相应等式, 我们有

$$\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2, \quad \operatorname{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2,$$

$$\operatorname{Ln} \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \operatorname{Ln} z.$$

而当 $|n| \geqslant 2$ 时, $\operatorname{Ln} z^n = n \operatorname{Ln} z$ 不成立. 以上等式换成 $\ln z$ 均未必成立.

对数函数的导数

设 x 是正实数, 则

$$\ln(-x)=\ln x+\pi\mathrm{i},\qquad \lim_{y\to 0^-}\ln(-x+y\mathrm{i})=\ln x-\pi\mathrm{i},$$

因此 $\ln z$ 在负实轴和零处不连续.

而在其它地方 $-\pi<\arg z<\pi$, $\ln z$ 是 e^z 在区域 $-\pi<\operatorname{Im} z<\pi$ 上的单值反函数, 从而 $(\ln z)'=\dfrac{1}{z}$, $\ln z$ **在除负实轴和零处的区域解析**.

也可以通过 C-R 方程来得到 $\ln z$ 的解析性和导数: 当 $x>0$ 时,

$$\ln z=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\mathrm{i}\arctan\frac{y}{x},$$

$$u_x=v_y=\frac{x}{x^2+y^2},\qquad v_x=-u_y=-\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$(\ln z)'=\frac{x-yi}{x^2+y^2}=\frac{1}{z}.$$

其它情形可取虚部为 $\operatorname{arccot}\dfrac{x}{y}$ 或 $\operatorname{arccot}\dfrac{x}{y}-\pi$ 类似证明.

定义.

(1) 设 $a \neq 0$, $z \neq 0$, 定义**幂函数**

$$w = z^a = \mathrm{e}^{a \operatorname{Ln} z} = \exp\big(a \ln|z| + \mathrm{i} a \operatorname{Arg} z\big), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(2) **幂函数的主值**为

$$w = \mathrm{e}^{a \ln z} = \exp\big(a \ln|z| + \mathrm{i} a \arg z\big).$$

根据 a 的不同, 这个函数有着不同的性质.

当 a 为整数时, 辐角的选取不影响幂函数的取值, 所以 $w = z^a$ 是单值的. 此时 z^a 就是我们之前定义的乘幂.

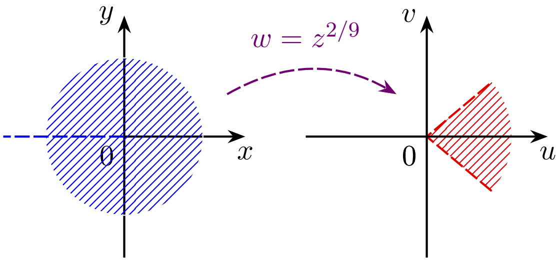
当 a 是非负整数时, z^a 在复平面上解析; 当 a 是负整数时, z^a 在 $\mathbb{C} - \{0\}$ 上解析.

当 $a = \dfrac{p}{q}$ 为分数, p, q 为互质的整数且 $q > 1$ 时,

$$z^{\frac{p}{q}} = |z|^{\frac{p}{q}} \exp\left[\frac{\mathrm{i}p(\arg z + 2k\pi)}{q}\right], \quad k = 0, 1, \ldots, q-1$$

具有 q 个值. 事实上它就是 $\sqrt[q]{z^p} = (\sqrt[q]{z})^p$.

去掉负实轴和 0 之后, 它的主值 $w = \exp(a \ln z)$ 是处处解析的.



对于其它的 a, z^a 具有无穷多个值. 因为此时当 $k \neq 0$ 时, $\mathrm{e}^{2k\pi a\mathrm{i}} \neq 1$. 从而不同的 k 得到的是不同的值. 去掉负实轴和 0 之后, 它的主值 $w = \exp(a \ln z)$ 也是处处解析的.

a	z^a 的值	z^a 的解析区域
整数 n	单值	$n \geqslant 0$ 时处处解析 $n < 0$ 时除零点外解析
分数 p/q	q 值	除负实轴和零点外解析
无理数或虚数	无穷多值	除负实轴和零点外解析

典型例题：幂函数的计算

例. 求 $1^{\sqrt{2}}$ 和 i^{i}.

解答.

$$1^{\sqrt{2}} = \mathrm{e}^{\sqrt{2}\,\mathrm{Ln}\,1} = \mathrm{e}^{\sqrt{2}\cdot 2k\pi\mathrm{i}} = \cos(2\sqrt{2}k\pi) + \mathrm{i}\sin(2\sqrt{2}k\pi), k \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathrm{i}^{\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Ln}\,\mathrm{i}} = \exp\left[\mathrm{i}\cdot\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi\mathrm{i}\right] = \exp\left(-2k\pi - \frac{1}{2}\pi\right), k \in \mathbb{Z}.$$

练习. 3^{i} 的辐角主值是 $\underline{\ \ln 3\ }$.

幂函数的性质

幂函数与其主值有如下关系:

$$z^a = \mathrm{e}^{a\ln z}\cdot 1^a = \mathrm{e}^{a\ln z}\cdot \mathrm{e}^{2ak\pi\mathrm{i}},\quad k\in\mathbb{Z}.$$

对于幂函数的主值,

$$(z^a)' = (\mathrm{e}^{a\ln z})' = \frac{a\mathrm{e}^{a\ln z}}{z} = az^{a-1}.$$

一般而言, $z^a\cdot z^b = z^{a+b}$ 和 $(z^a)^b = z^{ab}$ 都是不成立的.

最后, 注意 e^a 作为指数函数 $f(z) = \mathrm{e}^z$ 在 a 处的值和作为 $g(z) = z^a$ 在 e 处的值是不同的. 因为后者在 $a\notin\mathbb{Z}$ 时总是多值的. 前者实际上是后者的主值. 为避免混淆, 以后我们总默认 e^a 表示指数函数 $\exp a$.

三角函数的定义

我们知道

$$\cos x=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2},\quad \sin x=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}$$

对于任意实数 x 成立, 我们将其推广到复数情形.

定义. 余弦和正弦函数

$$\cos z=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2},\quad \sin z=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}.$$

那么欧拉恒等式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}=\cos z+\mathrm{i}\sin z$ **对任意复数 z 均成立**.

不难得到

$$\cos(\mathrm{i}y)=\frac{\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^{-y}}{2},\qquad \sin(\mathrm{i}y)=\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^y-\mathrm{e}^{-y}}{2}.$$

当 $y\to\infty$ 时, $\cos(\mathrm{i}y)$ 和 $\sin(\mathrm{i}y)$ 都 $\to\infty$. 因此 $\sin z$ **和** $\cos z$ **并不有界**. 这和实变情形完全不同.

容易看出 $\cos z$ 和 $\sin z$ 的零点都是实数. 于是我们可类似定义其它三角函数

$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z}, z\neq\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi,\qquad \cot z=\frac{\cos z}{\sin z}, z\neq k\pi,$$

$$\sec z=\frac{1}{\cos z}, z\neq\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi,\qquad \csc z=\frac{1}{\sin z}, z\neq k\pi.$$

这些三角函数的奇偶性, 周期性和导数与实变情形类似,

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z,$$

且在定义域范围内是处处解析的.

三角函数的各种恒等式在复数情形也仍然成立, 例如

- $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$,
- $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$,
- $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

双曲函数

类似的, 我们可以定义双曲函数:

$$\operatorname{ch} z = \frac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2} = \cos \mathrm{i}z,$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{2} = -\mathrm{i}\sin \mathrm{i}z,$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}} = -\mathrm{i}\tan \mathrm{i}z, \quad z \neq \Big(k + \frac{1}{2}\Big)\pi\mathrm{i}.$$

它们的奇偶性和导数与实变情形类似, 在定义域范围内是处处解析的.

$\operatorname{ch} z, \operatorname{sh} z$ 的周期是 $2\pi\mathrm{i}$, $\operatorname{th} z$ 的周期是 $\pi\mathrm{i}$.

设 $z=\cos w=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}w}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}w}}{2}$, 则

$$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}w}-2z\mathrm{e}^{\mathrm{i}w}+1=0,\quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}w}=z+\sqrt{z^2-1}\text{ (双值)}.$$

因此反余弦函数为

$$w=\operatorname{Arccos} z=-\mathrm{i}\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2-1}).$$

显然它是多值的. 同理, 我们有:

- 反正弦函数 $\operatorname{Arcsin} z=-\mathrm{i}\operatorname{Ln}(\mathrm{i}z+\sqrt{1-z^2})$;
- 反正切函数 $\operatorname{Arctan} z=-\dfrac{\mathrm{i}}{2}\operatorname{Ln}\dfrac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}, z\neq\pm\mathrm{i}$;
- 反双曲余弦函数 $\operatorname{Arch} z=\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2-1})$;
- 反双曲正弦函数 $\operatorname{Arsh} z=\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2+1})$;
- 反双曲正切函数 $\operatorname{Arth} z=\dfrac{1}{2}\operatorname{Ln}\dfrac{1+z}{1-z}, z\neq\pm1$.

例. 解方程 $\sin z = 2$.

解答. 由于 $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2$, 我们有

$$e^{2iz} - 4ie^{iz} - 1 = 0.$$

于是 $e^{iz} = (2 \pm \sqrt{3})i$,

$$z = -i\,\mathrm{Ln}\big[(2 \pm \sqrt{3})i\big] = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi \pm i\ln(2 + \sqrt{3}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

另解. 由 $\sin z = 2$ 可知

$$\cos z = \sqrt{1-\sin^2 z} = \pm\sqrt{3}\mathrm{i}.$$

于是 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i}\sin z = (2\pm\sqrt{3})\mathrm{i}$,

$$z = -\mathrm{i}\,\mathrm{Ln}\big[(2\pm\sqrt{3})\mathrm{i}\big] = \Big(2k+\frac{1}{2}\Big)\pi \pm \mathrm{i}\ln(2+\sqrt{3}), \quad k\in\mathbb{Z}.$$

对于任意 z, 总存在 θ 使得

$$\begin{aligned} \mathrm{Arcsin}\, z &= (2k+\frac{1}{2})\pi \pm \theta, \\ \mathrm{Arccos}\, z &= 2k\pi \pm \theta, \\ \mathrm{Arctan}\, z &= k\pi + \theta, \quad (z \neq \pm\mathrm{i}). \end{aligned}$$

称分子次数小于分母次数的有理函数为**真分式**. 任何一个有理函数 $f(z)$ 都可以通过带余除法分解为一个多项式 $g(z)$ 和一个真分式之和.

若这个有理函数分母的零点均能求出, 则这个真分式又可以分拆为部分分式之和, 其中**部分分式**是指形如 $\dfrac{a}{(x-b)^k}$ 的真分式. 我们来介绍求这种分拆的一种方法.

例题：有理函数分拆

例. 将 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)^2}$ 展开成部分分式之和.

解答. 设 $f(z)=\dfrac{a}{z-1}+\dfrac{b}{z-2}+\dfrac{c}{(z-2)^2}$, 则

$$a=\lim_{z\to1}(z-1)f(z)=\lim_{z\to1}\frac{1}{(z-2)^2}=1,$$

$$b=\lim_{z\to2}\big[(z-2)^2f(z)\big]'=\lim_{z\to2}\Big(\frac{1}{z-1}\Big)'=-1,$$

$$c=\lim_{z\to2}(z-2)^2f(z)=\lim_{z\to2}\frac{1}{z-1}=1.$$

因此

$$f(z)=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z-2}+\frac{1}{(z-2)^2}.$$

得到这种分拆之后，我们可以求出该有理函数的任意阶导数.

例. 计算 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 的 n 阶导数.

解答. 设

$$f(z)=\frac{1}{1+z^2}=\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{1}{z+\mathrm{i}}-\frac{1}{z-\mathrm{i}}\right),$$

则它在除 $z=\pm\mathrm{i}$ 外处处解析，且

$$f^{(n)}(z)=\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{1}{z+\mathrm{i}}-\frac{1}{z-\mathrm{i}}\right)^{(n)}=\frac{\mathrm{i}}{2}\cdot(-1)^n n!\left[\frac{1}{(z+\mathrm{i})^{n+1}}-\frac{1}{(z-\mathrm{i})^{n+1}}\right].$$

当 $z=x$ 为实数时,

$$|x+\mathrm{i}|=\sqrt{x^2+1},\qquad \arg(x+\mathrm{i})=\operatorname{arccot}x,$$

于是

$$\frac{1}{(z\pm\mathrm{i})^{n+1}}=(x^2+1)^{-\frac{n+1}{2}}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}(n+1)\operatorname{arccot}x}.$$

因此

$$\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(n)}=(-1)^n n!(x^2+1)^{-\frac{n+1}{2}}\sin\big[(n+1)\operatorname{arccot}x\big].$$

我们还可以利用复对数函数来计算实有理函数的不定积分.

例. 计算 $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-1}\,\mathrm{d}x$.

解答. 设 $\zeta = \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}} = \dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$, 那么我们有分拆

$$f(x) = \frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{x-1} + \frac{\zeta}{x-\zeta} + \frac{\zeta^2}{x-\zeta^2}\Big),$$

设

$$g(z) = \frac{1}{3}\big[\ln(z-1) + \zeta\ln(z-\zeta) + \zeta^2\ln(z-\zeta^2)\big].$$

$g(z)$ 在复平面去掉三条射线 $x+\zeta^k, x \leqslant 0$ 内的导数为 $f(z)$.

当 $z=x>1$ 时,

$$\begin{aligned}
3g(z)-\ln(x-1)&=2\operatorname{Re}\big[\zeta\ln(x-\zeta)\big]\\
&=2\operatorname{Re}\left[\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\ln\left(x-\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)\right]\\
&=2\operatorname{Re}\left[\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\left(\ln\sqrt{x^2+x+1}-\mathrm{i}\operatorname{arccot}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right]\\
&=\ln\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{3}\operatorname{arccot}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

于是我们得到当 $x>1$ 时,

$$g(x)=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)+\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arccot}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

可以看出对于实数 $x<1$, 上式的导数也等于 $f(x)$, 从而 $f(x)$ 的不定积分为 $g(x)+C$, $C\in\mathbb{R}$.