FIR 幅频特性相频特性

1、h(n)偶对称，N 为奇数

$$h(n)=h(N-1-n)$$

$$\theta(\omega)=-\frac{N-1}{2}\omega$$

$$H(\omega)=\sum_{n=0}^{(N-1)/2}a(n)\cos(\omega n)$$

$$a(0)=h(\frac{N-1}{2})$$

$$a(n)=2h(\frac{N-1}{2}-n)\quad n=1,2,\ldots\frac{N-1}{2}$$

例：h(0)=2,h(1)=h(2)=h(3)=1,h(4)=2; N=5

方法一：按线性相位求解

幅频特性：

$$a(0)=h(\frac{5-1}{2})=h(2)=1$$

$$a(1)=2h(\frac{5-1}{2}-1)=2h(1)=2$$

$$a(2)=2h(\frac{5-1}{2}-2)=2h(0)=4$$

$$\therefore H(\omega)=\sum_{n=0}^{(N-1)/2}a(n)\cos(\omega n)=a(0)+a(1)\cos\omega+a(2)\cos2\omega$$
$$=1+2\cos\omega+4\cos2\omega$$

相频特性：$\theta(\omega)=-\frac{N-1}{2}\omega=-\frac{5-1}{2}\omega=-2\omega$

方法二：按 DTFT 求解

$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)e^{-j\omega n}=2+e^{-j\omega}+e^{-j2\omega}+e^{-j3\omega}+2e^{-j4\omega}$$
$$=e^{-j2\omega}(2e^{j2\omega}+e^{j\omega}+1+e^{-j\omega}+2e^{-j2\omega})$$
$$=e^{-j2\omega}\left[1+\left(e^{j\omega}+e^{-j\omega}\right)+\left(2e^{j2\omega}+2e^{-j2\omega}\right)\right]$$
$$=e^{-j2\omega}\left(1+2\cos\omega+4\cos2\omega\right)=H(\omega)e^{j\theta(\omega)}$$

$$H(\omega)=1+2\cos\omega+4\cos2\omega;\ \theta(\omega)=-2\omega$$

2、h(n)偶对称，N 为偶数

$$h(n) = h(N-1-n)$$

$$\theta(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega$$

$$H(\omega) = \sum_{n=1}^{N/2} b(n)\cos\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\omega\right)$$

$$b(n) = 2h(\frac{N}{2}-n) \quad n = 1,2,\ldots\frac{N}{2}$$

例：h(0)=2,h(1)=h(2)=1,h(3)=2；N=4

方法一：按线性相位求解

幅频特性：

$$b(1) = 2h(\frac{4}{2}-1) = 2h(1) = 2$$

$$b(2) = 2h(\frac{4}{2}-2) = 2h(0) = 4$$

$$\therefore H(\omega) = \sum_{n=1}^{N/2} b(n)\cos\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\omega\right) = b(1)\cos\frac{1}{2}\omega + b(2)\cos\frac{3}{2}\omega$$

$$= 2\cos\frac{1}{2}\omega + 4\cos\frac{3}{2}\omega$$

相频特性：$\theta(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega = -\frac{4-1}{2}\omega = -\frac{3}{2}\omega$

方法二：按 DTFT 求解

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} = 2 + e^{-j\omega} + e^{-j2\omega} + 2e^{-j3\omega}$$

$$= e^{-j\frac{3}{2}\omega}(2e^{j\frac{3}{2}\omega} + e^{j\frac{1}{2}\omega} + e^{-j\frac{1}{2}\omega} + 2e^{-j\frac{3}{2}\omega})$$

$$= e^{-j\frac{3}{2}\omega}\left[\left(e^{j\frac{1}{2}\omega} + e^{-j\frac{1}{2}\omega}\right) + \left(2e^{j\frac{3}{2}\omega} + 2e^{-j\frac{3}{2}\omega}\right)\right]$$

$$= e^{-j\frac{3}{2}\omega}\left(2\cos\frac{\omega}{2} + 4\cos\frac{3\omega}{2}\right) = H(\omega)e^{j\theta(\omega)}$$

$$H(\omega) = 2\cos\frac{\omega}{2} + 4\cos\frac{3\omega}{2}；\ \theta(\omega) = -\frac{3}{2}\omega$$

3、h(n)奇对称，N 为奇数

$$h(n) = -h(N-1-n)$$

$$\theta(\omega) = \frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2}\omega$$

$$H(\omega) = \sum_{n=1}^{(N-1)/2} c(n)\sin(\omega n)$$

$$c(n) = 2h(\frac{N-1}{2} - n) \qquad n = 1,2,\ldots\frac{N-1}{2}$$

例：h(0)=2,h(1)=1,h(2)=0,h(3)=-1,h(4)=-2；N=5

方法一：按线性相位求解

幅频特性：

$$c(1) = 2h(\frac{5-1}{2} - 1) = 2h(1) = 2$$

$$c(2) = 2h(\frac{5-1}{2} - 2) = 2h(0) = 4$$

$$\therefore H(\omega) = \sum_{n=1}^{(N-1)/2} c(n)\sin(\omega n) = c(1)\sin\omega + c(2)\sin 2\omega$$
$$= 2\sin\omega + 4\sin 2\omega$$

相频特性：$\theta(\omega) = \frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2}\omega = \frac{\pi}{2} - \frac{5-1}{2}\omega = \frac{\pi}{2} - 2\omega$

方法二：按 DTFT 求解

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} = 2 + e^{-j\omega} + 0 - e^{-j3\omega} - 2e^{-j4\omega}$$
$$= e^{-j2\omega}(2e^{j2\omega} + e^{j\omega} - e^{-j\omega} - 2e^{-j2\omega})$$
$$= e^{-j2\omega}\left[\left(e^{j\omega} - e^{-j\omega}\right) + \left(2e^{j2\omega} - 2e^{-j2\omega}\right)\right]$$
$$= e^{-j2\omega}\left(2j\sin\omega + 4j\sin 2\omega\right) = e^{-j2\omega}e^{j\frac{\pi}{2}}\left(2\sin\omega + 4\sin 2\omega\right)$$
$$= H(\omega)e^{j\theta(\omega)}$$

$$H(\omega) = 2\sin\omega + 4\sin 2\omega;\ \ \theta(\omega) = \frac{\pi}{2} - 2\omega$$

4、h(n)奇对称，N 为偶数

$$h(n) = -h(N-1-n)$$

$$\theta(\omega) = \frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2}\omega$$

$$H(\omega) = \sum_{n=1}^{N/2} d(n)\sin\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\omega\right)$$

$$d(n) = 2h(\frac{N}{2}-n) \quad n = 1,2,\ldots\frac{N}{2}$$

例：h(0)=2,h(1)=1,h(2)=-1,h(3)=-2；N=4

方法一：按线性相位求解

幅频特性：

$$d(1) = 2h(\frac{4}{2}-1) = 2h(1) = 2$$

$$d(2) = 2h(\frac{4}{2}-2) = 2h(0) = 4$$

$$\therefore H(\omega) = \sum_{n=1}^{N/2} d(n)\sin\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\omega\right) = d(1)\sin\frac{1}{2}\omega + d(2)\sin\frac{3}{2}\omega$$

$$= 2\sin\frac{\omega}{2} + 4\sin\frac{3\omega}{2}$$

相频特性：$\theta(\omega) = \frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2}\omega = \frac{\pi}{2} - \frac{4-1}{2}\omega = \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2}\omega$

方法二：按 DTFT 求解

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} = 2 + e^{-j\omega} - e^{-j2\omega} - 2e^{-j3\omega}$$

$$= e^{-j\frac{3}{2}\omega}(2e^{j\frac{3}{2}\omega} + e^{j\frac{1}{2}\omega} - e^{-j\frac{1}{2}\omega} - 2e^{-j\frac{3}{2}\omega})$$

$$= e^{-j\frac{3}{2}\omega}\left[\left(e^{j\frac{1}{2}\omega} - e^{-j\frac{1}{2}\omega}\right) + \left(2e^{j\frac{3}{2}\omega} - 2e^{-j\frac{3}{2}\omega}\right)\right]$$

$$= e^{-j\frac{3}{2}\omega}\left(2j\sin\frac{\omega}{2} + 4j\sin\frac{3\omega}{2}\right) = e^{-j\frac{3}{2}\omega}e^{j\frac{\pi}{2}}\left(2\sin\frac{\omega}{2} + 4\sin\frac{3\omega}{2}\right)$$

$$= H(\omega)e^{j\theta(\omega)}$$

$$H(\omega) = 2\sin\frac{\omega}{2} + 4\sin\frac{3\omega}{2};\ \theta(\omega) = \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2}\omega$$