巴特沃斯模拟滤波器设计步骤

已知模拟滤波器技术参数：Ω_p，Ω_s，α_p，α_s

巴特沃斯滤波器模方函数：$|H(j\Omega)|^2 = \dfrac{1}{1+\varepsilon^2(\dfrac{j\Omega}{j\Omega_c})^{2N}}$，　$N = 1,2,\cdots$

衰减函数：$\alpha(\Omega) = -10\lg|H(j\Omega)|^2$

巴特沃斯模拟滤波器设计步骤：

1、求阶数 N

由上述已知条件，可得：

$$\begin{cases} \alpha_s = -10\lg|H(j\Omega_s)|^2 = -10\lg\dfrac{1}{1+\varepsilon^2\left(\dfrac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2N}} = 10\lg\left[1+\varepsilon^2\left(\dfrac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2N}\right] \\ \alpha_p = -10\lg|H(j\Omega_p)|^2 = -10\lg\dfrac{1}{1+\varepsilon^2\left(\dfrac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N}} = 10\lg\left[1+\varepsilon^2\left(\dfrac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N}\right] \end{cases}$$

解上述方程组，可求得阶数 N：

$$\begin{cases} \varepsilon^2\left(\dfrac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2N} = 10^{0.1\alpha_s}-1 \\ \varepsilon^2\left(\dfrac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N} = 10^{0.1\alpha_p}-1 \end{cases} \Rightarrow \left(\dfrac{\Omega_s}{\Omega_p}\right)^{2N} = \dfrac{10^{0.1\alpha_s}-1}{10^{0.1\alpha_p}-1} \Rightarrow \left(\dfrac{\Omega_s}{\Omega_p}\right)^{N} = \sqrt{\dfrac{10^{0.1\alpha_s}-1}{10^{0.1\alpha_p}-1}}$$

$$\Rightarrow N\lg\dfrac{\Omega_s}{\Omega_p} = \lg\sqrt{\dfrac{10^{0.1\alpha_s}-1}{10^{0.1\alpha_p}-1}} \Rightarrow N = \dfrac{\lg\sqrt{\dfrac{10^{0.1\alpha_s}-1}{10^{0.1\alpha_p}-1}}}{\lg\dfrac{\Omega_s}{\Omega_p}}$$

2、求极点 s_k

由巴特沃斯滤波器模方函数可得：

$$|H(j\Omega)|^2 = H(s)H(-s)\big|_{s=j\Omega} = \dfrac{1}{1+\varepsilon^2(\dfrac{s}{j\Omega_c})^{2N}}, \quad N = 1,2,\cdots$$

令模方函数的分母=0，求其极点：

$$1+\varepsilon^2(\frac{s}{j\Omega_c})^{2N}=0 \quad 令-1=e^{j(2k-1)\pi}, j=e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow \ s_k=\varepsilon^{-\frac{1}{N}}\Omega_c e^{\frac{j(2k+N-1)\pi}{2N}} \quad k=0,1,...2N-1$$

极点分布特点：

1） 巴特沃斯滤波器在 s 平面上共有 2N 个极点，等间距地分布在半径为$\Omega_c\varepsilon^{-1/N}$的圆上；

2） 这些极点对称于虚轴，而虚轴上无极点；

3） N 为奇数时，实轴上有两个极点，N 为偶数时，实轴上无极点；

4） 各极点间的间隔为π/N。

3、求传递函数 $H_a(s)$

由模方函数可得：

$$H_a(s)H_a(-s)\Big|_{s=j\Omega}=\frac{1}{1+\varepsilon^2(\frac{s}{j\Omega_c})^{2N}}=\frac{A}{\prod_{k=1}^{N}(s-s_k)}\cdot\frac{B}{\prod_{r=1}^{N}(s-s_r)}$$

s_k为s左半平面的极点， s_r为s右半平面的极点， A和B都为常数。

将 s 左半面的极点分配给 $H_a(s)$，右半平面的极点分配给 $H_a(-s)$，就有：

$$H_a(s)=\frac{A}{\prod_{k=1}^{N/2}(s-s_k)(s-s_k^*)}$$

求常数 A：

$$H_a(0)=\frac{A}{\prod_{k=1}^{N/2}s_k s_k^*}=1 \quad \Rightarrow \quad A=\prod_{k=1}^{N/2}s_k s_k^*=\Omega_c^N\varepsilon^{-1}$$

综上可得巴特沃斯模拟滤波器的传递函数为：

$$H_a(s)=\frac{\Omega_c^N\varepsilon^{-1}}{\prod_{k=1}^{N/2}(s-s_k)(s-s_k^*)} \quad N为偶数$$

$$H_a(s)=\frac{\Omega_c^N\varepsilon^{-1}}{\prod_{k=1}^{(N-1)/2}(s-s_k)(s-s_k^*)(s-s_p)} \quad N为奇数$$

其中，s_k为左半平面的极点， s_k^*为s_k的共轭极点， s_p为实轴上的极点。

4、归一化的传递函数 $H_a(s)$

取 $\Omega_c = 1, \varepsilon = 1$，则得归一化巴特沃斯滤波器的系统函数：

$$H_a(s) = \frac{1}{\prod_{k=1}^{N/2}(s-s_k)(s-s_k^{*})} \qquad N\text{为偶数}$$

$$H_a(s) = \frac{1}{\prod_{k=1}^{(N-1)/2}(s-s_k)(s-s_k^{*})(s-s_p)} \qquad N\text{为奇数}$$

其中，$\Omega_c = 1, \varepsilon = 1, s_k$是$\Omega_c = 1$时求得的极点。

Ω_p，Ω_s，α_p，α_s

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2(\frac{j\Omega}{j\Omega_c})^{2N}}, \qquad N = 1,2,\cdots$$

$$\alpha(\Omega) = -10\lg|H(j\Omega)|^2$$

求阶数 →

$$N = \frac{\lg\sqrt{\frac{10^{0.1\alpha_s}-1}{10^{0.1\alpha_p}-1}}}{\lg\frac{\Omega_s}{\Omega_p}}$$

求极点 →

$$s_k = \varepsilon^{-\frac{1}{N}}\Omega_c e^{\frac{j(2k+N-1)\pi}{2N}}$$

$$k = 0,1,\ldots 2N-1$$

求传递函数 →

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^N \varepsilon^{-1}}{\prod_{k=1}^{N/2}(s-s_k)(s-s_k^{*})} \qquad N\text{为偶数}$$

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^N \varepsilon^{-1}}{\prod_{k=1}^{(N-1)/2}(s-s_k)(s-s_k^{*})(s-s_p)} \qquad N\text{为奇数}$$

其中，s_k为左半平面的极点，
s_k^{*}为s_k的共轭极点，s_p为实轴上的极点。

归一化的传递函数 →

$$H_a(s) = \frac{1}{\prod_{k=1}^{N/2}(s-s_k)(s-s_k^{*})} \qquad N\text{为偶数}$$

$$H_a(s) = \frac{1}{\prod_{k=1}^{(N-1)/2}(s-s_k)(s-s_k^{*})(s-s_p)} \qquad N\text{为奇数}$$

其中，$\Omega_c = 1, \varepsilon = 1, s_k$是$\Omega_c = 1$时求得的极点。