双线性变换法推导

映射规则：

（1）频率压缩：把整个 s 平面压缩变换到某一中介的 s1 平面的一条横带里。

（2）数字化：将 s1 平面通过标准变换关系变换到 z 平面。$z=e^{s_1T}$

具体推导如下：

（1）**频率压缩：**把整个 s 平面压缩变换到某一中介的 s1 平面的一条横带里，宽度为 $\frac{2\pi}{\mathrm{T}}$，从 $-\frac{\pi}{\mathrm{T}}\to\frac{\pi}{\mathrm{T}}$，采用如下变换方式：$\Omega=\tan\frac{\Omega_1T}{2}$，这样满足：

$$\Omega=-\infty\to\Omega_1=-\frac{\pi}{T},\quad \Omega=+\infty\to\Omega_1=+\frac{\pi}{T},\quad \Omega=0\to\Omega_1=0$$

又因为

$$s=j\Omega=j\tan\frac{\Omega_1T}{2}=j\frac{\sin\frac{\Omega_1T}{2}}{\cos\frac{\Omega_1T}{2}}=\frac{e^{j\frac{\Omega_1T}{2}}-e^{-j\frac{\Omega_1T}{2}}}{e^{j\frac{\Omega_1T}{2}}+e^{-j\frac{\Omega_1T}{2}}}=\frac{e^{\frac{s_1T}{2}}-e^{-\frac{s_1T}{2}}}{e^{\frac{s_1T}{2}}+e^{-\frac{s_1T}{2}}}=\tanh\left(\frac{s_1T}{2}\right)$$

所以，$s=\frac{e^{\frac{s_1T}{2}}-e^{-\frac{s_1T}{2}}}{e^{\frac{s_1T}{2}}+e^{-\frac{s_1T}{2}}}=\frac{1-e^{-s_1T}}{1+e^{-s_1T}}$

（2）**数字化：**将 s1 平面通过标准变换关系变换到 z 平面。

$z=e^{j\omega}=e^{s_1T}=e^{j\Omega_1T}$，此时 $\Omega_1T=\omega$，$s_1\to z$

则可得到 s 平面到 z 平面的单值映射关系为：

$$s=\frac{1-e^{-s_1T}}{1+e^{-s_1T}}=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \text{ 或 } z=\frac{1+s}{1-s}$$

以后变换只须用公式带入即可。

实际中，为了使模拟滤波器的某一频率与数字化滤波器的任一频率有对应的关系，要引入常数 C。

$$\Omega=C\tan\frac{\Omega_1T}{2}=C\tan\frac{\omega}{2}$$

$$s=C\tanh\left(\frac{s_1T}{2}\right)=C\frac{1-e^{-s_1T}}{1+e^{-s_1T}}=C\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}},\quad z=\frac{C+s}{C-s}$$

(3) 变换常数 C 的选择

调节常数 C，可使模拟滤波器与数字滤波器在不同频率点处有对应的关系。

(a) 使模拟滤波器与数字滤波器在低频处有较确切的对应关系。

$$\Omega T \approx \Omega_1 T = \omega$$

$$\tan\frac{\Omega_1 T}{2} \approx \frac{\Omega_1 T}{2} = \frac{\omega}{2} \approx \frac{\Omega T}{2}$$

由 $\Omega = C\tan\frac{\Omega_1 T}{2} \approx C\frac{\omega}{2}$ 可得， $C = \frac{2}{T}$

在低频处，模拟滤波器的低频特性近似等于数字滤波器的低频特性。

(b) 利用数字滤波器的某一特定频率（如截止频率 ω_c）与模拟滤波器的某一特定频率 Ω_c 严格相对应。

$$\Omega_c = C\tan\left(\frac{\Omega_{1c}T}{2}\right) = C\tan\left(\frac{\omega_c}{2}\right)$$

$$\Rightarrow C = \Omega_c ctg\left(\frac{\omega_c}{2}\right)$$

特定频率处频率响应严格相等，可以较准确地控制截止频率位置。

(4) 预畸变

双线性变换的频率标度的非线性失真可以通过预畸变的方法来补偿。

如，给定数字滤波器的截止频率 ω_1，则：

$$\Omega_1 = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{\omega_1}{2}\right)$$

按 Ω_1 设计模拟滤波器，经双线性变换后，即可得到截止频率为 ω_1 的数字滤波器。

双线性变换法设计 IIR 数字滤波器

IIR-双线性变换法