采样定理知识拓展讨论

已知信号$x_1(t)$和$x_2(t)$的最高频率分别为f_{m1}和f_{m2}，且$f_{m1} > f_{m2}$。下列工程实际中的复杂信号，离散采样不失真的最小采样频率分别是多少?

信号	最高频率	最小采样频率
$x_1(t)$	f_{m1}	$2f_{m1}$
$x_2(t)$	$f_{m2} \quad (f_{m1} > f_{m2})$	$2f_{m2}$
$x_1(t)+x_2(t)$	f_{m1}	$2f_{m1}$
$x_1(t)x_2(t)$	$f_{m1}+f_{m2}$	$2(f_{m1}+f_{m2})$
$x_1(t)*x_2(t)$	f_{m2}	$2f_{m2}$
$x_1(2t)$	$2f_{m1}$	$4f_{m1}$
$x_1(t/2)$	$f_{m1}/2$	f_{m1}

采样定理：

$$\Omega_s \geq 2\Omega_m \quad (f_s \geq 2f_m)$$

优秀讨论结果展示

$x_1(t)x_2(t), x_1(t)*x_2(t)$

信号$x_1(t)$的最高频率为f_{m1}，信号$x_2(t)$的最高频率为f_{m2}. $f_{m1}>f_{m2}$

信号为$x_1(t)x_2(t)$时，最高频率为$f_{m1}+f_{m2}$，最小采样频率为$2(f_{m1}+f_{m2})$

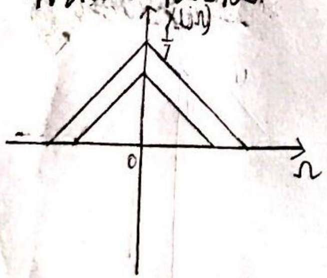
信号为$x_1(t)*x_2(t)$时，最高频率为f_{m2}，最小采样频率为$2f_{m2}$.

时域的卷积相当于频域的乘积，频域的卷积相当于时域的乘积.

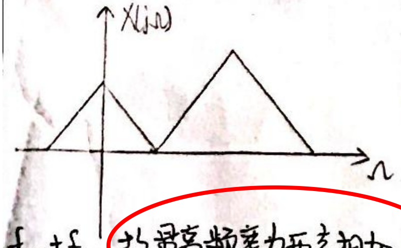
$x_s(t)=x(t)\delta_T(t) \leftrightarrow X(j\Omega)=\frac{1}{2\pi}X(j\Omega)*\Delta(j\Omega)$

$x_1(t)x_2(t)$

在频域内较方便



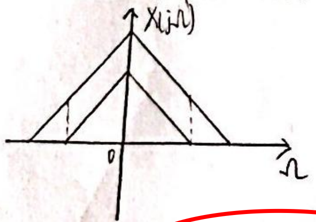
翻转，移位，相乘，相加.



$f_{m1}+f_{m2}$ 故最高频率为两者相加.

$x_1(t)*x_2(t)$

相当于频域内的乘积.



直接相乘，取较小的频率f_{m2}.

以上是最终较为简单易懂的方法.

开始时，小组通过取特殊情况的函数来计算得到答案，而后一起讨论得出最终的方法.

$x_1(t)x_2(t)$:

首先根据和差化积公式 $\cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$ ①

推测出 $f_m=f_{m1}+f_{m2}$

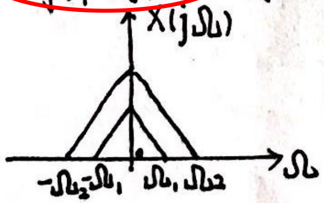
后我们尝试给出普遍的证明：

二者相乘可转换为卷积，卷积可产生为傅立叶级数的形式，又可转化为三角形式，在转化为三角形式后我们可将其用和差化积公式转化为类似①式的形式，便可得出$f_m=f_{m1}+f_{m2}$，故有

$f_s=2(f_{m1}+f_{m2})$.

$x_1(t)*x_2(t)$:

用作图法，时域卷积相当于频域相乘



相乘后频域分布于$[-\Omega,\Omega]$内，Ω取$\min(\Omega_1,\Omega_2)$

代入采样定理，知最小采样频率为

$2\Omega=2\min(\Omega_1,\Omega_2)$.

优秀讨论结果展示

$x_1(t)x_2(t), x_1(t)*x_2(t)$

一、$x_1(t)\,x_2(t)$ 最高频率计算

$$x_1(t)\,x_2(t) \rightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(j\Omega) * X_2(j\Omega)$$

其中 $X_1(j\Omega) * X_2(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\Omega')\,X_2[j(\Omega-\Omega')]\,d\Omega'$

$$\begin{cases} \Omega' \le f_{m1} & ① \\ \Omega-\Omega' \le f_{m2} \Rightarrow \Omega \le f_{m2}+\Omega' & ② \end{cases}$$

综合 ①-②，得 $\Omega \le f_{m2}+\Omega' \le f_{m1}+f_{m2}$

二、$x_1(t)*x_2(t)$ 最高频率计算：

$$x_1(t)*x_2(t) \rightarrow X_1(j\Omega)\,X_2(j\Omega)$$

易得 $\begin{cases} \Omega \le f_{m1} \\ \Omega \le f_{m2} \end{cases} \Rightarrow \Omega \le \min\{f_{m1}, f_{m2}\}$

已知 $f_{m1} > f_{m2}$，故 $\Omega \le f_{m2}$